

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

W1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Восьмизначное число будет состоять из цифр: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1
(цифры не больше 9, так как $3 \cdot 7 = 21 > 9$ - не может быть в числе)

Всего таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$

W2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi m$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9} \end{cases}$$

w3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2): y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 4y + 8x &= 0 \\ y(y-2x) + x(y-2x) - 4(y-2x) &= 0 \\ (y-2x)(y+x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{a) } y=2x \quad \text{b) } y=4-x \\ &\left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} &= y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x} \\ x^{-2\ln x} &= y^{-3\ln x + \ln y} \\ \ln x^{-2\ln x} &= \ln y^{-3\ln x + \ln y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\ln x \cdot \ln x &= (-3\ln x + \ln y) \ln y \\ 2\ln^2 x - 3\ln x \ln y + \ln^2 y &= 0 \\ (2\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{a) } y=2x \quad \left[\begin{array}{l} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{array} \right. \\ &2\ln x = \ln y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x \\ \ln y=2\ln x \\ \ln y=\ln x \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x \\ y=x^2 \\ y=x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=2x \\ y=x^2 \\ y=4-x \\ y=x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2=2x \\ y=2x \\ 2x=x \\ y=x \\ 4-x=x^2 \\ y=4-x \\ 4-x=x \\ y=x \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ - не в OD3} \\ x=2 \\ y=4 \\ x=0 \text{ - не в OD3} \\ y=0 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=4,5-\frac{\sqrt{17}}{2} \\ x=2 \\ y=2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 4 &= 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ x_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x_2 &= \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \text{ - не в OD3} \end{aligned}$$

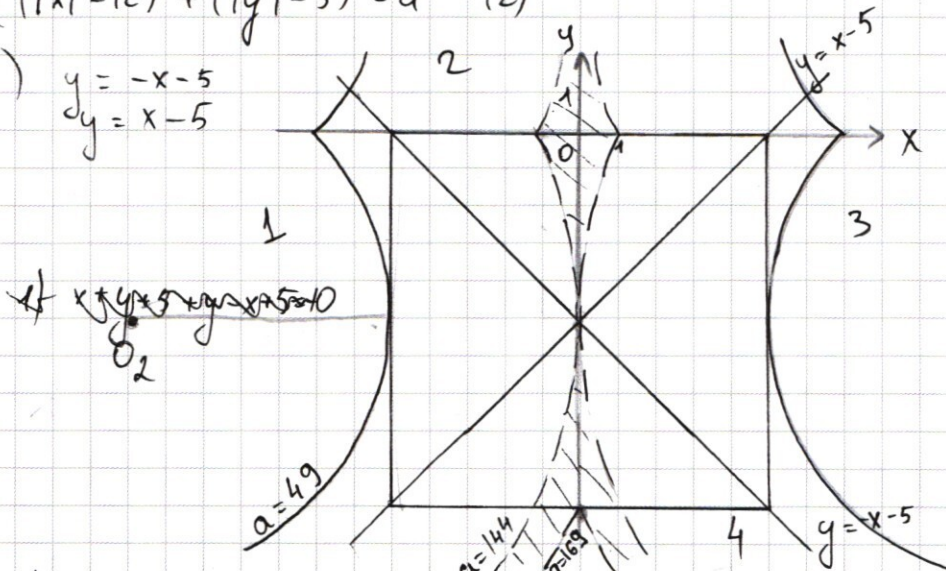
$$\text{Ответ: } (2; 4); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 4,5-\frac{\sqrt{17}}{2} \right); (2; 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $y = -x-5$
 $y = x-5$



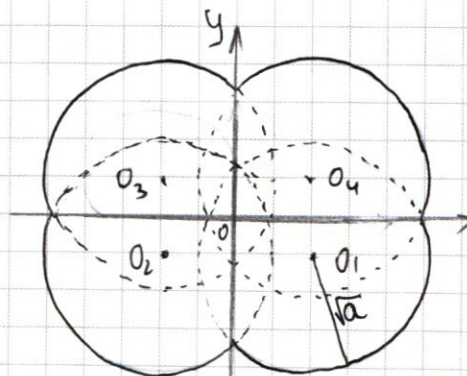
1) $-x-y-5+y-x+5=10$
 $x=-5$

2) $x+y+5+y-x+5=10$
 $y=0$

3) $x+y+5-y+x-5=10$
 $x=5$

4) $-x-y-5-y+x-5=10$
 $y=-10$

(2) График имеет вид:



4 окружности удовлетворяют те части окружностей, которые лежат в той же четверти, что и центр окружности

1) Касание графиков (1) и (2) $\Rightarrow \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$

2) Ре. Ответ: $a \in (144; 169) \cup \{49\}$

w7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33}x - 2^x - 2x \geq 3 \cdot 2^{34} - 76$$

$$f(x) = 2^{33}x - 2^x - 2x$$

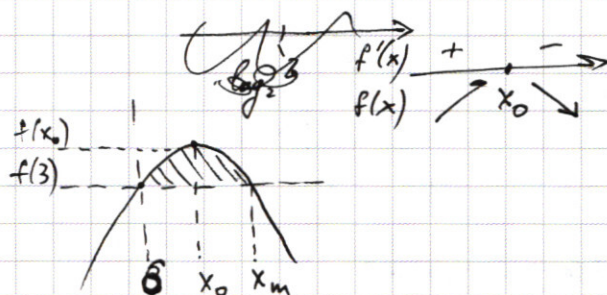
$$f'(x) = 2^{33} - \ln 2 \cdot 2^x - 2$$

$$f(6) = 2^{34} \cdot 3 - 64 - 12 = 2^{34} \cdot 3 - 76$$

$$f(x) \geq f(6)$$

$$f'(x) = 0 \quad 2^x = \frac{2^{33} - 2}{\ln 2}$$

$$x_0 = \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2}$$



$$f(x) - f(6) \geq 0$$

$$2(2^{32} - 1)(x - 6) \geq 2^6(2^{x-6} - 1)$$

$$(2^{32} - 1)(x - 6) \geq 2^5(2^{x-6} - 1)$$

$$x - 6 = 32 \quad * (2^{32} - 1) \cdot 32 \approx 2^5 \cdot (2^{32} - 1) \text{ - равенство верно } \Rightarrow x_m = 38$$

$$\text{Кон. б.о. нап.: } \sum_{i=7}^{37} (76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} - 1) =$$

$$= 75 \cdot 31 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \frac{7+37}{2} \cdot 31 - (2^{38} - 2^7) - 3 \cdot 2^{34} \cdot 31 =$$

$$= \overset{75 \cdot 31}{2325} + 2^{32} \cdot 44 \cdot 31 - 44 \cdot 31 - 2^{38} + 128 - 93 \cdot 2^{34} = 31^2 + 2^{34} \cdot 241 - 2^{38} +$$

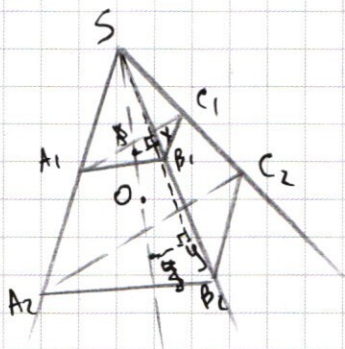
$$+ 128 - 93 \cdot 2^{34} = 991 + 128 + 248 \cdot 2^{34} - 2^{38} = 1119 + 31 \cdot 2^{37} - 2 \cdot 2^{37} =$$

$$= 1119 + 29 \cdot 2^{37}$$

$$\text{Ответ: } 1119 + 29 \cdot 2^{37}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

W4



$$S_{A,B,C} \geq 1$$

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$$

$$S_{A_7 B_7 C_7} = 16$$

$$\frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = k$$

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{1}{16}$$

$$k = \frac{1}{4}$$

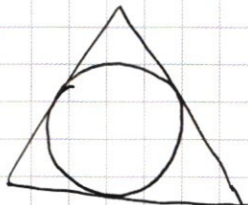
$$\frac{S_x}{S_y} = \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} = \frac{1}{4}$$

$$S_y = 4 S_x$$

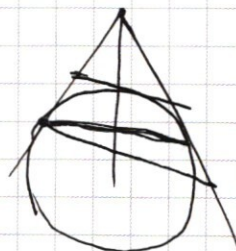
$$Xy = 2R = 3S \times$$

$$R = \frac{3}{2} SX$$

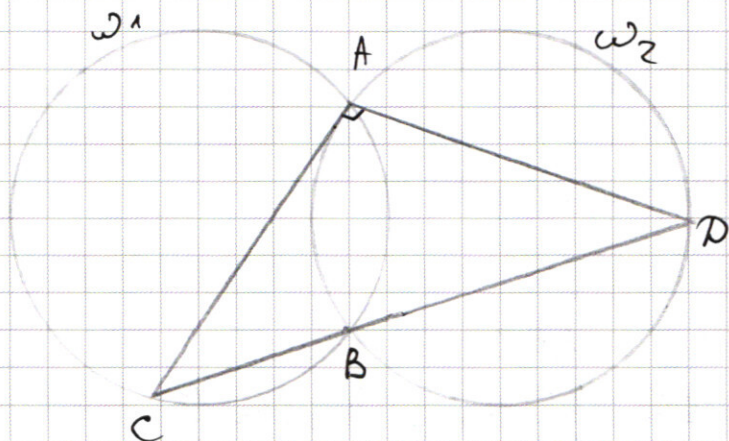
$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{\frac{3}{2}SX}{SX + \frac{3}{2}SX} = \frac{3}{5}$$

$$K \nmid L \text{ (т.е. } K \nsubseteq L) \text{ и } \text{core}(K, L) = \omega(O_1; r)$$


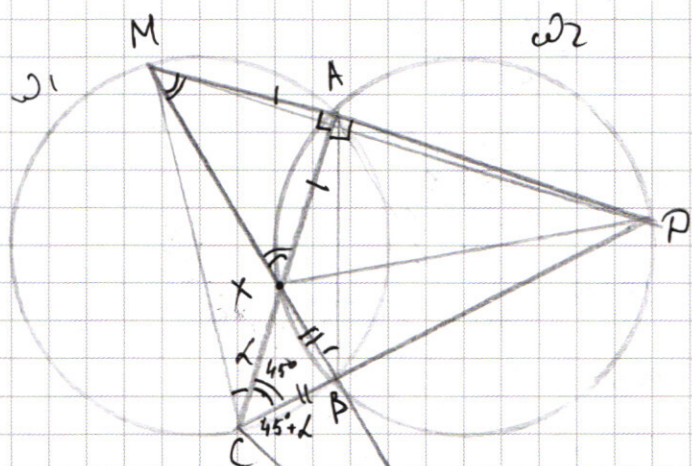
$$r = R \cos \alpha = R \cdot \frac{4}{5}$$



№ 6



$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &\Rightarrow \widehat{AB_1} = \widehat{AB_2} \\ \angle ACB &= \frac{1}{2} \widehat{AB_1} \\ \angle ADB &= \frac{1}{2} \widehat{AB_2} \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \\ \angle CAD &= 90^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle ACB &= \angle ADB = 45^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC \cap \omega_2 &= X \\ BX \cap \omega_1 &= M \\ \angle MCA &= \angle MBA = \frac{1}{2} \widehat{AM} \\ \angle ABX &= \angle ADX = \frac{1}{2} \widehat{AX} \\ \Rightarrow AM &= AX \\ \angle AMB &= \angle ACB = 45^\circ \left(\frac{1}{2} \widehat{AB} \right) \\ \angle AXM &= \angle AMX = 45^\circ \\ \angle MAX &= 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \\ \angle MAD &= (90^\circ - \angle MAX) + \angle CAD = 180^\circ \\ \Rightarrow TA &\in \text{пр } MD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle MAC &= 90^\circ \Rightarrow MC - \text{диаметр } \omega_1 \Rightarrow \angle MBC = 90^\circ \\ \angle MDB &= 45^\circ; \angle MBD = 90^\circ \Rightarrow MB = BD = BF \\ \triangle MBC &\sim \triangle FBC \text{ (по 2-м катетам: } MB = BF; BC - \text{общая)} \Rightarrow FC = MC \\ MC &= 2R = 2 \cdot 10 = 20 \Rightarrow FC = 20 \end{aligned}$$

$$BC = 12 = BX$$

$$AC = MC \cos \alpha$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} MC \cos \alpha \cdot 20 \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = 200 \cos^2 \alpha$$

$$\cos(\angle CBA) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) &= \frac{3}{5} \\ \cos \alpha &= t; t \in [0; 1] \end{aligned}$$

$$t - \sqrt{1-t^2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\alpha \in (0; 90^\circ) \Rightarrow t \in (0; 1]$$

$$t - \frac{3\sqrt{2}}{5} = \sqrt{1-t^2}$$

$$t^2 + \frac{18}{25} - \frac{6\sqrt{2}}{5}t = 1 - t^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2t^2 - \frac{6\sqrt{2}}{5}t - \frac{7}{25} = 0$$

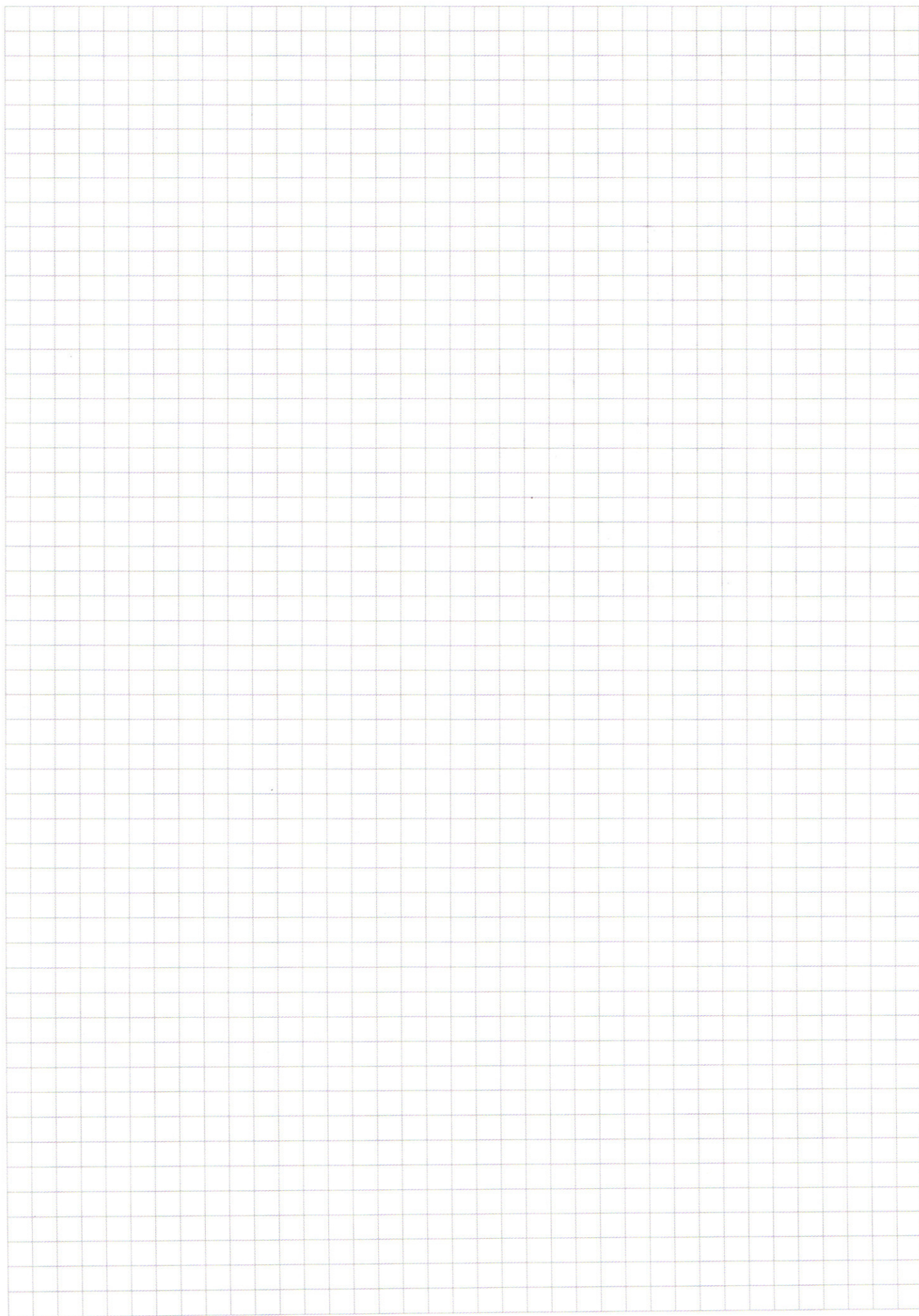
$$D = \frac{18}{25} + \frac{14}{25} = \frac{32}{25}$$

$$t_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10} < 0$$

$$t_2 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = 200 \cdot t^2 = 200 \cdot \frac{49 \cdot 2}{100} = 196$$

Ответ: $FC = 20$, $S_{ACF} = 196$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 3087 \overline{) 3} \\ 1029 \overline{) 3} \\ 343 \overline{) 7} \\ 49 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 3 \\ 7 \times 7 \\ 2 \end{array}$$

$$3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 7 \ 7 \ 11$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \quad \begin{aligned} 2\alpha &= x + y \\ \alpha &= \frac{x + y}{2} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{x - y}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 9x + \frac{\pi}{4} \\ \alpha - \beta = 5x - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$2\alpha = 4x$$

$$\alpha = 4x$$

$$\beta = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$a = (15 - 8)^2 = 49 \quad y^2 - (x + 4)y - 2x(x + 2x^2 + 8x) = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$a \in (15^2, 15^2 + 8^2) \\ 225, 225 + 64 = 289$$

$$y_1 = \frac{x + 4 + 3x - 4}{2} = 2x$$

$$y_2 = \frac{x + 4 - 3x + 4}{2} = 4 - 2x$$

$$(y - 2x)(y + 2x - 4) = 0$$

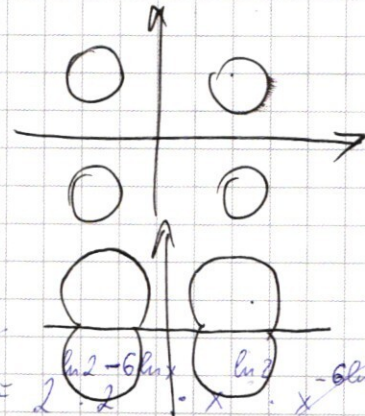
$$1) y = 2x$$

$$\begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\ln x} &= y^{\ln \frac{y}{x}} \\ (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} &= 2x^{\ln \frac{2}{x}} \\ (16x^6)^{-\ln x} &= 2 \cdot 2^{-\ln x} \end{aligned}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{6 \ln x} = 2 \cdot 2^{-\ln x} \cdot x^{-\ln x}$$

$$-4 \ln x = \ln 2 - 6 \ln x + \ln x$$

$$\ln x = \ln 2 \quad | x = 2 \Rightarrow y = 4$$



$$y = 4 - x$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{-7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{-3\ln x + \ln(4-x)}$$

$$\left(\frac{x^2}{(4-x)^3}\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$(|x-1|^2 + |y-2|^2 = a) \quad S$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$(|y-2|=3)$$

$$\log_y x = -2\ln x$$

$$\log_y x = -3\ln x + \ln y$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{-3\ln x + \ln y}$$

$$k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{Sx}{Sy} = \frac{1}{4} \Rightarrow Sx = 2R = 2 \cdot 4 = 8$$

$$R = \frac{3}{2} Sx$$

$$\sin k = \frac{R}{Sx + R}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$k = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$|x+3| + |x-3| = 10$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$1) -x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10 \Rightarrow x = -5$$

$$a = 49$$

$$a \in (144; 169)$$

$$144 = a - 25$$

$$a = 169$$

$$(|y-5|^2 = a - 49)$$

$$(|y-5|^2 = 120)$$

$$|y-5| = \sqrt{120}$$

$$|y-5| = -\sqrt{120}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{120}$$

$$y = 5 + \sqrt{120}$$

$$y = 5 - \sqrt{120}$$

$$y = 5 + \sqrt{120}$$

$$y = 5 - \sqrt{120}$$

$$y = 5 + \sqrt{120}$$

$$y = 5 - \sqrt{120}$$

$$y = 5 + \sqrt{120}$$

$$y = 5 - \sqrt{120}$$

$$y = 5 + \sqrt{120}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.7.8.9 10 3
A
31
38-6=32
7+6+5 20
7+8+9+10+11
18/2=45
341
93
248
124
62
31
2³⁸-2⁷

$y = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$
 $y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$
 $2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$
 $2^x - 2^{33} \cdot x + 2x < 76 - 3 \cdot 2^{34}$
 $f(x) = 2^x - 2^{33} \cdot x + 2x$
 $f(6) = 64 - 2^{34} \cdot 3 + 12 = 76 - 3 \cdot 2^{34}$
 $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2^{33} + 2 = 0$
 $2^x \ln 2 = 2^{33} - 2$
 $3 \ln 2 = \frac{2^{33} - 2}{2}$

$31 \cdot 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot \frac{7+37}{2} \cdot 31 - (2^{37} + 2^{36} + \dots + 2^7)x - 3 \cdot 2^{34} \cdot 31 = 31$
 $2^{32} - 2^{33} \cdot 2^{32} = 3 \cdot 2^{30} - 2^{33} \cdot 2^{32}$
 $= 2^{32} - 2^{34} (2^{32} - 1) = 2^{38} - 2^{32} \cdot 3$
 $= 31 \cdot 76 + 2 \cdot 341 - 2^{38} + 128 = 93 \cdot 2 - 31$
 $2^x - 2^{33} \cdot x + 2x = 76 - 3 \cdot 2^{34}$

$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x = \cos 9x$
 $\cos 5x (\cos 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x + 1) =$
 $\sin 5x (1 - \sin 4x + \cos 4x + 1) + \cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) =$
 $= \sqrt{2} \cos 4x$
 $\sin 5x (2 - \sin 4x) + \cos 5x (1 - \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $2 \cos 2x + \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) + 2 \sin 2x \cos 5x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $31 \cdot 2^{37}$
 $\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x \sin 5x + \sin 2x \cos 5x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$
 $\sqrt{2} \cos 7x = \cos 2x + \sin 2x$
 $\sqrt{2} \cdot 2 \sin 7x \cdot \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} 2 \sin 7x (\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 7 - 2^7 - 3 \cdot 2^{34} = \sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$
 $= 76 + 2^{33} \cdot 7 - 14 - 128 - 6 \cdot 2^{33} = 2^{33} - 66$
 $\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin (2x + \frac{\pi}{4})$
1) $7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
 $7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
 $9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$
2) $\cos 2x = \sin 2x$
 $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \sin 5x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

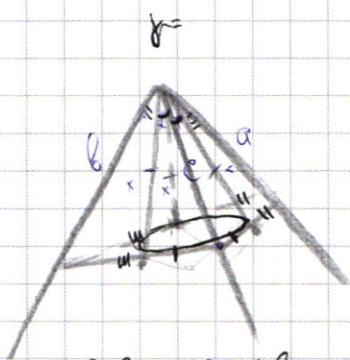
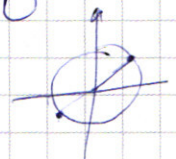
$$2 \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\sqrt{2} \sin 5x + \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$5x = -(2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n$$

$$5x = \pi + (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n$$



$$b^2 + c^2 - 2bc \cos 2\alpha = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha + b^2 + x^2 - 2xb \cos \alpha$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$x^2 = -bc \cos 2\alpha + xc \cos \alpha + xb \cos \alpha$$

$$x^2 = -2bc \cos^2 \alpha + bc + xc \cos \alpha + xb \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \cdot (-2bc \cos \alpha + xc + xb) + bc$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc \cos \alpha + bc \cos \alpha - 2 \cos \alpha (b+c)x + 2bc \cos^2 \alpha = 0$$

$$AX \cdot XC = MX \cdot XB$$

$$\frac{XC}{MX} = \frac{XB}{AX}$$

$$\tan \alpha = \frac{MA}{AC}$$

$$MA = a$$

$$BX = b$$

$$A \left(\frac{a}{a + \sqrt{2}b} \right)^2 + 1 =$$

$$\left(\frac{a + \sqrt{2}b}{a} \right)^2 + 1 = \frac{a^2 + (a + \sqrt{2}b)^2}{a^2} = \frac{a^2 + a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2}{a^2} = \frac{2a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{a}{20} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{400}} \right) = \frac{b}{20}$$

$$\frac{a}{20} - \frac{\sqrt{400 - a^2}}{20} = \frac{\sqrt{2}b}{20}$$

$$b = 4 \cdot 15\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{400 - a^2} = \sqrt{2}b$$

$$2^x - 2^x - 2^x \geq 3 \cdot 2^{34} - 76$$

$$2^{35}$$

$$x = 8$$

$$2^{33} \cdot 2^3 - 2^8 - 16 = 2^{35} - 16$$

$$x = \frac{98}{2} = 49$$

$$2^{33}x - 2^x - 2^x \geq 2^{33} \cdot 6 - 2^6 - 2 \cdot 6$$

$$2^{33}(x-6) - 2(x-6) \geq 2^x - 2^6$$

$$(x-6)(2^{32} - 1) \geq 2^5(2^{x-6} - 1)$$

$$49 \times 4 =$$

$$f(x_0) - f(6) = 2(2^{32} - 1) / (\log_2 \frac{2^{33} \cdot 2}{\ln 2} - 6) - 2^6 / (\frac{2^{33} \cdot 2}{\ln 2} - 2^6 - 1)$$