

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$2(2^{32}-1)x + 46 \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$(2^{33}-2)x + 46 \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33}x - 2x + 46 \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\begin{array}{r|l} 46 & 2 \\ 78 & 2 \\ 13 & \end{array}$$

$$2^{33}(x-6) - 2x + 2^x + 46 \geq 0$$

$$2^{33}x - 2x + 46 - 2^x - 3 \cdot 2^{34} \geq 0$$

$$2x(2^{32}-1) - 2^x + 46 \geq 2^2(19 - 3 \cdot 2^{32}) \geq 0$$

$$f'(x) = 2(2^{32}-1) - 2^x \ln 2$$

$$2^x \ln 2 = 2^{33} - 2$$

$$2^x = \frac{2^{33}-2}{\ln 2}$$

$$x = \log_2 \frac{2^{33}-2}{\ln 2} = \log_2 2^{33} (2 - \log_2 \frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}) =$$

$$= 1 + \underbrace{\log_2(2^{32}-1)}_{\substack{\approx 32 \\ \geq 31}} - \underbrace{\log_2(\ln 2)}_{< 0}$$

$> 32$

$$2^{33}x \geq 2x + 2^x + 46 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33} \cdot 2(2^{32}-1)x \geq 2^x + 46 \cdot 3 \cdot 2^{34}$$

$$2(2^{32}-1) \geq 2^x \ln 2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ \sqrt{(x-12)^2} + \sqrt{(y-5)^2} = 9 \end{cases}$$

$$(x^2 \cdot (4-x)^9)^{\ln x} = (4-x)^{\frac{9 \ln(4-x)}{x^2}}$$

$$(x^2 \cdot (4-x)^9)^{\ln x}$$

$$2x \cdot (4-x)^9 + 9(4-x)^8 \cdot x^2$$

$$2x(4-x)^8(4-x+9x) = 2x(4-x)^8(10x-4)$$

I.  $y \geq -x-5$

II.  $y \geq -x-5$

$$y \leq x-5$$

$$y \geq x-5$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

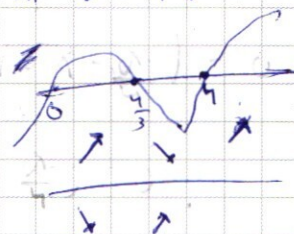
$$2y+10 = 10$$

$$y = 0$$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$



III

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$-x^2 - 28x^6 + 5x^2$$

$$8x^2 - 28x^6$$

$$x^6(6x-28)$$

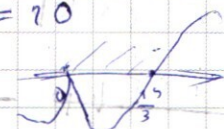
IV.  $y \leq -x-5$

$$y \leq x-5$$

$$-x-5-5 + y-x+5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$



$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y - 10 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

x=

$$\ln x^2 + \ln(4-x)^9$$

$$\ln \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (4-x)^2$$

$$= \ln \frac{(4-x)^2}{x} = \ln \left( \frac{4}{x} - 1 \right)^2 =$$

2R



$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$

$$\frac{-34 \pm \sqrt{43}}{23}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy + 2x^2 + 8x - 45 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 9 \\ \hline 388 & \\ 3084 & 3 \\ \hline 1025 & 3 \\ 343 & 7 \\ \hline 45 & 5 \\ 4 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$(y^2 - y \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2) - \frac{9}{4}x^2 + 8x$$

$$y^2 - 45 + 4 - 2(x^2 - 4x + 4) + 4 - xy = 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^2} = -$$

$$(xy^2)^{-2\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

$$\frac{1}{(xy^2)^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

$$2. (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = 2x$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = 2x$$

$$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = \dots$$

$$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = \dots$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2 + \ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2} \cdot \frac{2}{x^6}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^6} = \frac{2}{x^6}$$

$$\sqrt{2} (\sin 5x \cos 5x - \cos 5x \sin 5x)$$

$$\left(\frac{16x^6}{x^6}\right)^{-\ln x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^6}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} (\cos 4x + \sin 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\sin 5x - \cos 5x) + (\sin 5x + \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$- (\cos 5x - \sin 5x) + (\sin 5x + \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-\sqrt{2} (\cos(5x + \frac{\pi}{4})) + \sqrt{2} (\sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$- \cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \cos(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$- \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$- \cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \cos(9x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0 \quad (\cos x - \cos \pi x)$$

$$- \cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{2} - (9x + \frac{\pi}{4})) - \cos 4x = 0$$

$$- (\cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x) + \sin(9x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = 2$$

$$-2 (\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})) + \sin 2 = 0$$

$$-2 (\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})) + 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin 9x + \frac{\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k & k, l, m \in \mathbb{Z} \\ 9x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4} + 2\pi l \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi + 2\pi m \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{D}{12} + \frac{2\pi k}{9} \\ 5x = \frac{D}{4} + 2\pi l \\ 4x = \frac{D}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad k, l, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{D}{12} + \frac{2\pi k}{9} & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{D}{20} + \frac{2\pi l}{5} & l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{D}{8} + \frac{\pi m}{2} & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Объем:

$$\begin{cases} x = \frac{D}{12} + \frac{2\pi k}{9} \\ x = \frac{D}{20} + \frac{2\pi l}{5} \\ x = \frac{D}{8} + \frac{\pi m}{2} \end{cases} \quad k, l, m \in \mathbb{Z}$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \dots (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \dots (2) \end{cases}$$

И/о. рассмотрим (1):

I  $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y = 0$$

III  $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$

$$-x-y-5 + y-x+5 = 10$$

$$x = -5$$

II  $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$

$$x+y+5 - x+x-5 = 10$$

$$x = 5$$

IV  $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

рассмотрим (2):

I  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 - \text{окр. радиуса } \sqrt{9}, \text{ центр } (12; 5)$$

II  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = 9 - \text{окр. радиуса } \sqrt{9}, \text{ центр } (12; -5)$$

III  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 9 - \text{окр. радиуса } \sqrt{9}, \text{ центр } (-12; 5)$$

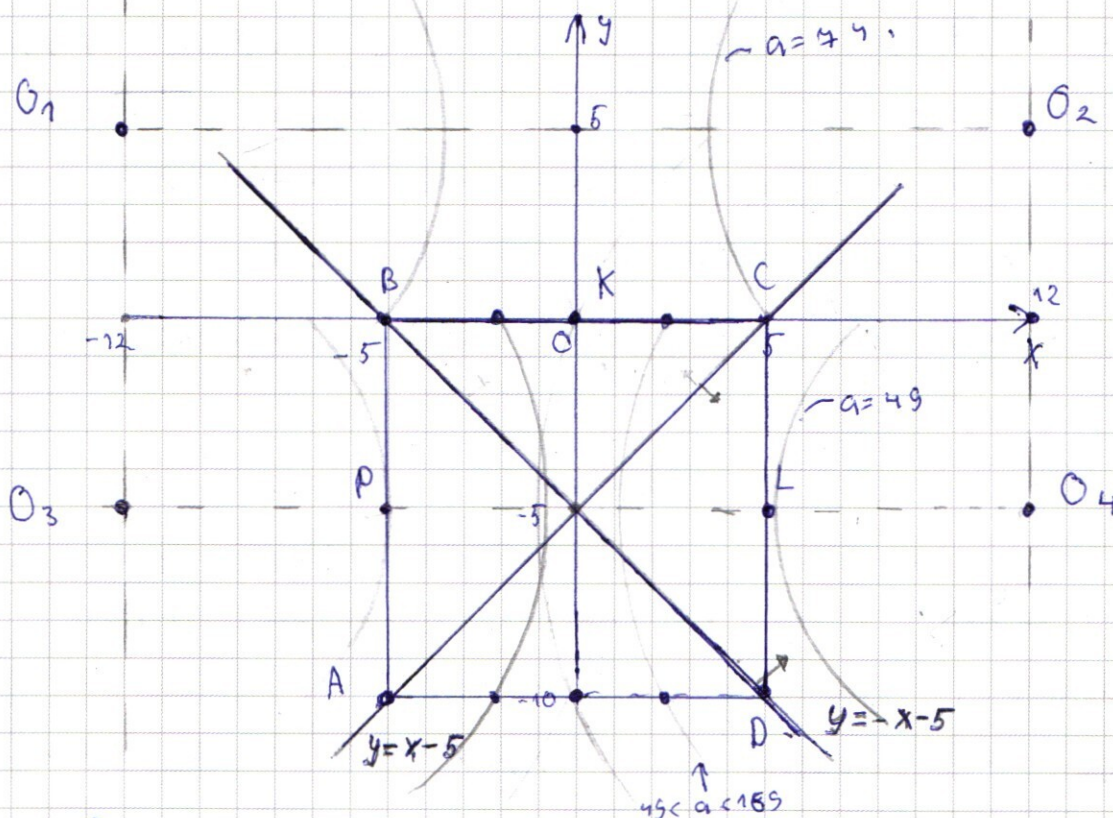


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

IV.  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

$(x+12)^2 + (y+5)^2 = 49$  - окр. радиуса  $\sqrt{49}$ , центром  $(-12; -5)$

Все окружности радиуса  $\sqrt{49}$  лежат в пределах своей четверти.



Рассмотрим случай, когда ~~окр. O3~~ окружность

$O_3$  касается внешнего образа стороны  $AB \Rightarrow$  заметим, что в этом случае окр.  $O_4$  также касается  $AB$  и  $CD$

внешний образ стороны  $CD$ , ~~т.к. центр~~ т.к. центр окр. симметричен отн-но  $O$ , так же как и  $AB$  и  $CD$ .

~~Получается~~  $O_3 P \perp AB \Rightarrow P$  - (1) касания в таком случае

(окр.  $O_3$  к  $AB$ )  $\Rightarrow O_3 P$  - радиус  $O_3 P = -5 - (-12) = 7$

$\Rightarrow \sqrt{49} = 7 \Rightarrow 49$  - при таком  $a$ , есть по крайней мере 2 решения.

Каждой  $O_2 C$ . По теореме Пифагора:  $O_2 C = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$



$$O_2 C = O_2 B \text{ (симметрия)} = \sqrt{54} \neq \dots \Rightarrow \text{при } a = 54.$$

Получа окр.  $O_2$  имеет с  $ABCD$ . окр  $O_2, O_1$  пересекаются

$ABCD$  в  $(\cdot)$   $C$  и  $B$  соответственно

при  $a < 54$  пересечения нет  $\Rightarrow$  при  $a = 54$  ровно 2 решения, что подсоединит коз условие.

~~при  $a > 54$  Заметим.~~

~~Кейс  $a$ , при котором  $O_3$  и окружность  $O_3$  проходят через  $(\cdot)$   $C$  и  $(\cdot)$   $D$ , т.е.  $O_3 C = O_3 D = \sqrt{a}$  - радиус~~

$$\text{По Тб Пифагора: } O_3 C = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314} = O_3 D.$$

~~при таком  $a$  в силу вписанности симметрии~~

~~окр.  $O_4$  не проходит через  $(\cdot)$   $A$  и  $(\cdot)$   $B$ .~~

Кейс  $a$ , при котором  $O_3, O_4$  проходят  $(\cdot)$   $(0; 0)$  и  $(0; -10)$ , т.е.  $O_3 K = \sqrt{a}$

$$O_3 K = \sqrt{14^2 + 25^2} = 27 \text{ (Тб Пифагора)}$$

$\Rightarrow a = 169$  - при таком  $a$  окружности  $O_3, O_4$  пересекают  $ABCD$  в одной и той же точке (вписанности симметрия)  $\Rightarrow$  по крайней мере 2 решения.

Заметим, что каждый из окружностей  $O_1, O_2$  может иметь максимум одно пересечение с графиком (так как рассматривается только в пределах своей четверти, т.е. может пересечь только  $BC$ )

Кейс  $a$ , при котором  $O_3, O_4$  пересекают  $BC$  в своей четверти. Получается также, что  $O_3, O_4$  проходят через  $(0; 0)$ , т.е.  $O_3 K$  - радиус

$$O_3 K = \sqrt{14^2 + 25^2} = 27 \Rightarrow a = 169.$$

Заметим, что при таком  $a$  все 4 окружности проходят  $(\cdot)$   $(0; 0)$  и окр.  $O_3, O_4$  проходят через



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Докажем, что при  $a = 169$  окружности имеют  
с  $ABCD$  ровно 2 пересечения  $(0; 0); (0; -10)$   
 $\Rightarrow a = 169$  - подходит

при  $a > 169$

радиусы окружностей  $> 13$  и пересечением  
линии с  $ABCD$  в пределах своей четверти нет  
ни 2 точек из них  $\Rightarrow$  при  $a > 169$  решений нет.

при  $49 < a < 169$

окружности  $O_3, O_4$  пересекают  $BC$  и  $AD$  в пределах  
своих четвертей  $\Rightarrow$  при всех  $a \in (49; 169)$   
будет по крайней мере 4 решения:

~~при  $49 < a < 169$  - 5 решений.~~

при  $a < 49$   $O_3, O_4$  не пересекают  $AB$  и  $CD$   
соответственно,  $O_1$  и  $O_2$  - не пересекают  $BC \Rightarrow$  решений  
нет.

Итого  $a = 49, a = 169$  - единственные подходящие

Ответ  $\begin{cases} a = 169 \\ a = 49 \end{cases}$

$\sqrt{1}$

$$261 = 3^3 \cdot 4^3$$

I, три тройки, 3 единицы, 2 единицы.

у нас есть 8 позиций, где должно быть 3 тройки.  
кол-во способов представить их:  $C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$



После того как расставили тройки остаётся 5 позиций  
3 из них - под семейкой.

Кол-во способов расставить их:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Остаётся 2 позиции и 2 единицы, которые можно  
расставить одним способом.

Итого способов:

$$N_1 = 10 \cdot 56 \cdot 1 = 560$$

II. 3 семейки, 1 тройка, 1 девятка, 3 единицы.

Кол-во способов расставить 3 семейки на 8 позиций:

$$C_8^3 = C_8^3 = 56$$

Кол-во способов расставить 3 единицы на 5 позиций:

$$C_5^3 = 10$$

Остаётся 2 позиции - 9 и 3, т.е. 2 способа  
расстановки:

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\text{Итого: } N_2 = 56 \cdot 10 \cdot 2 = 1120$$

Другие варианты образования чисел невозможны,  
т.к. в числе обязательно присутствуют 3 семейки,

а число  $3^3 = 27$  можно представить, только

как  $3 \cdot 3 \cdot 3$  или  $9 \cdot 3$ ,  $27 \cdot 1$ , но  $27 > 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  не м.б. цифрой.

Итого всего чисел

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$N = N_1 + N_2 = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \dots (2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 4y = 0 \dots (1) \end{cases}$$

$$b) y^2 - \frac{1}{2}x - 2 \cdot y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^2 + 2x - 4y = 0$$

$$\left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{9}{4}x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x\right)\left(y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x\right) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - y) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\square y = 2x$$

Подставим в (2):

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2/x^6)}$$

given use co. to log:

$$a^{\log b c} = c^{\log b a}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{2^{\ln 2x}}{x^{6 \ln 2x}} = \frac{2^{\ln 2x} \cdot (x^6)^{-\ln 2x}}{x^{6 \ln 2x}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{2^{\ln 2x} \cdot (x^6)^{-\ln 2x}}{x^{6 \ln 2x}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{2^{\ln 2x} \cdot (x^6)^{-\ln 2x}}{(x^6)^2}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2 + \ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2} \cdot \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln x}$$



$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{2^{\ln 2}}{x^6} \cdot \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x} \cdot (x^6)^{-\ln x} \quad | : (x^6)^{-\ln x} > 0$$

$$16^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x}$$

$$2^{-4\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot 2^{\ln x}$$

$$2^{-4\ln x} = 2^{(\ln \frac{2}{x^6} + \ln x)}$$

$$2^2 \uparrow \Rightarrow -4\ln x = \ln \frac{2}{x^6} + \ln x$$

$$-5\ln x = \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-5\ln x = \ln 2 - 6\ln x$$

$$\ln x = \ln 2$$

$$\ln 2 \uparrow \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow y = 4$$

$(2; 4)$  - решение

$$\square y = 4 - x$$

$$(x^2 - (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$(x \cdot (4-x)^2)^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$((x \cdot (4-x)^2)^{-2})^{\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$x^{\ln(x \cdot (4-x)^2)^{-2}} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$x^{-2\ln x(4-x)^2} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$x^{-2(\ln x + 2\ln(4-x))} = (4-x)^{\ln(4-x) - \frac{4}{x^5}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot x^{-4\ln(4-x)} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot \frac{1}{(4-x)^{\frac{4}{x^5}}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^{\ln(4-x)} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{\frac{4}{x^5}}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^{\ln(4-x)} =$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{6}$

а)

Дано:

$$R = 10$$

$$BF = CD$$

$$\angle CAP = 50^\circ$$

$$BF = BD$$

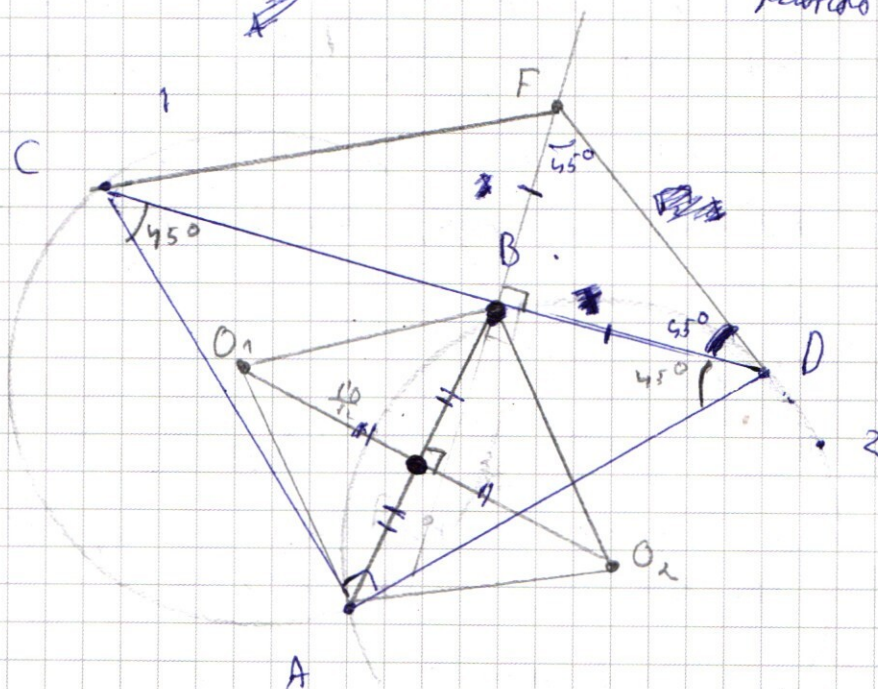
$$CF = ?$$

$O_1$  - центр окружности 1,  $O_2$  - центр  
окружности 2

$$O_1 B O_2 A \text{ - ромб (т.к. } O_1 B = O_2 B = O_2 A = O_1 A \text{)}$$

$$\Rightarrow AB \perp O_1 O_2 \text{ т.к. } \angle BDA = \angle CBA \text{ как}$$

вписанные опирающиеся на хорду AB в окружности  
равной радиуса



Получается, что  $\angle ACP = \angle CDA = 50^\circ - \angle ACD = 45^\circ$   
 $\Rightarrow AC = AD$ .

$BF = BD$  в прямоугольном  $\triangle BFD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle FPA = \angle BDF + \angle BDA = 90^\circ$$

$\angle BO_1 A$  - центральный, опирается на AB,  $\angle ACP$  - вписанный,



опирается на  $AB \Rightarrow \angle BO_1A = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow O_1BO_2A$  - ромб с прямыми углами  $\Rightarrow$  квадрат

$\Rightarrow AB = O_1O_2$  (диагональ квадр. ромба),  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$

~~Докажем, что  $FD \perp AD$ ,  $CA \perp AD \Rightarrow CA \parallel FD$~~

~~$\angle ABD$  - вписанный, опирается на  $AD$  - хорду.~~

~~$\angle CBA$  - вписанный, опирается на  $AC$  - хорду~~

~~$\angle C = \angle D$  (см выше)  $\Rightarrow \angle ABD = \angle CBA = 180^\circ - \angle ABD = 90^\circ$~~

~~тогда  $CA, AD$  - диаметры (по Т. о впис. угле)~~

~~$\Rightarrow CA = AD = 2R = 20$ ,  $AB$  - высота  $\text{пр. } \triangle ACD$ ,~~

~~$\Rightarrow B$  - середина  $CD$~~

~~$CP = \sqrt{2} \cdot AC$  (т. теорема в  $\text{пр. } \triangle ACP) = 20\sqrt{2}$~~

~~$\Rightarrow CB = 10\sqrt{2} = BD = BF$ . Докажем, что  $BF$  - медиана,~~

~~высота  $\Rightarrow \triangle BFP$  -  $\text{пр. } \triangle \Rightarrow CF = FD$ .~~

~~$FD = \sqrt{2} \cdot BD$  (по т. теорема в  $\text{пр. } \triangle BFD) = \sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 20$~~

~~$\Rightarrow CF = 20$~~

~~ответ:  $CF = 20$ .~~

из  $\triangle O_1BO_2$  ( $\angle B = 90^\circ$ )  $O_1O_2 = \sqrt{2} O_1B = 10\sqrt{2} = AB$  (см выше)

$\angle ABC = \alpha$ ,  $BP = x$ ,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $AD = AC = x$ .

тогда  $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle CBA = 90^\circ - \alpha$ .

$\angle BO_2P = 2\alpha$  (центральный)

по т. кос из  $\triangle BAP$ :

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AP \cdot AD} = \sqrt{200 + x^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot 10\sqrt{2} \cdot x}$$

$$= \sqrt{200 + x^2 - 20\sqrt{2} x \cos 2\alpha}$$

из  $\triangle BO_2P$ :

$$BP = \sqrt{200 - 200 \cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow 200 - 200 \cos 2\alpha = 200 + x^2 - 20\sqrt{2} x \cos 2\alpha$$
$$x^2 + 200 \cos 2\alpha - 20\sqrt{2} x \cos 2\alpha = 0$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} x \ln x^{-2} + \ln(4-x)^{-4} &= (4-x) \ln \frac{(4-x)}{x^2} \\ x \ln \frac{4}{x^2(4-x)^4} &= (4-x) \ln \frac{(4-x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$x^2 + 400 \cos^2 \alpha - 200 - 20\sqrt{2} x \cos \alpha = 0.$$

$$x^2 - 20\sqrt{2} x \cos \alpha + 200(2 \cos^2 \alpha - 1) = 0.$$

$$\begin{aligned} D &= 200 - 200 \cos^2 \alpha = 200(1 - \cos^2 \alpha) = 200(1 - 2 \cos^2 \alpha) \\ &= 200(1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)) = 400 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$x = 200 \sin \alpha \pm 10\sqrt{2} \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \angle BPD &= \beta \\ AD &= 5. \end{aligned}$$

по т. Пифагора  $\Delta FPA (\angle P = 90^\circ)$

$$FA^2 = \cancel{b^2} + \overbrace{(\sqrt{2}b)^2}^{FD^2} + y^2 = 2b^2 + y^2$$

$$\angle FBA = \beta:$$

$\Delta FBA$ :

$$FA^2 = FB^2 + AB^2 - 2 \cos \beta \cdot FB \cdot BA.$$

$$FA^2 = b^2 + 200 - 2 \cos \beta \cdot b \cdot 10\sqrt{2} = 200 + b^2 - 20\sqrt{2} b \cos \beta.$$

$$\beta = 90^\circ + \angle CBA$$

$$\Rightarrow \cos \beta = -\sin \angle CBA.$$

$$\sin \angle CBA = \sin \angle ABD$$

$$\frac{\sin \angle ABD}{AD} = \frac{\sin 45^\circ}{BA}$$

$$\sin \angle ABD = \frac{AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{BA} = \frac{5}{20} \Rightarrow \cos \beta = -\frac{5}{20}$$



$$FA^2 = 200 + b^2 + \frac{20\sqrt{2}b \cdot y}{20} = 200 + b^2 + \sqrt{2}by.$$

$$2b^2 + y^2 = 200 + b^2 + \sqrt{2}by$$

$$b^2 + y^2 - \sqrt{2}by - 200 = 0$$

$$D = 2y^2 + 200 - y^2 = 800 - 2y^2 = 2(400 - y^2)$$

$$b = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2} \sqrt{400 - y^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{400 - y^2}}{\sqrt{2}}$$