

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

✓
$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

✓
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 26 \\ 18 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 0 \\ 9 \\ 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \\ \hline 63 \\ 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

Коммутируем две набора чисел

$$1) 777 \cdot 33311$$

$$2) 77793111$$

Получим наборов равных произведений (разных чисел)

$$9261$$

$$1) C_7^3 \cdot C_5^3$$

$$2) C_7^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$$

$$\text{Ответ: } C_7^3 \cdot C_5^3 (1 + C_2^1) = 3 \cdot C_7^3 \cdot C_5^3$$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & 1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = \alpha & 2) \end{cases}$$

1) - это ур-ние квадрата с центром в точке $(0; -5)$ и стороной равной 10

Вершины в точках $(-5; 0); (5; 0); (-5; -10); (5; -10)$.

2) - это ур-ние ч-ки окр. с $\text{rad} = \sqrt{\alpha}$

или центры $(12; 5); (-12; 5); (-12; -5); (12; -5)$

два решения будут, когда центры окр. (с центр в $(-12; -5); (12; -5)$) будут кас. боков.

ных граней квадрата.

$$\Rightarrow R_{\text{окр}} = 7 \Rightarrow \alpha = 49$$

Так же, когда вершины окр. касаются равных углов квадрата.

$$R^2 = 15^2 + 17^2 = 514$$

Ответ: 49, 514.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & x, y > 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) + 2x(4-x) = 0$$

$$~~y^2 - y(x+4) + 2x(4-x) = 0~~$$

$$x+4 = 2x+4-x$$

$$(y-2x)(y-(4-x)) = 0$$

1) $y = 2x$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$\frac{-4\ln x}{2} \cdot x = \frac{-6\ln x}{2} \cdot x = 2 \cdot x \cdot \ln \frac{2}{x^6}$$

$$1 = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot (16x^6)^{\ln x}$$

$$1 = \left(\frac{3}{x^6}\right)^{\ln 2x} \cdot 16x^6 \cdot 2$$

$$1 = 2^{\ln 2 + \ln x + 4\ln x} \cdot x^{6\ln x - 6\ln 2 - 6\ln x}$$

$$1 = 2^{5 \ln x + \ln 2} \cdot x^{-6 \ln 2} \Rightarrow x = 2; y = 4$$

$$2) y = 4 - x$$

$$\left(x^2 (4-x)^4 \right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)}$$

$$1 = \underbrace{(4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)} \left(x^2 (4-x)^4 \right)^{\ln x}}$$

функция на отрезке $x \in (0; 4)$ монотонно возрастает
 $\Rightarrow$ будем искать решение.

$$\text{Подбором } x = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$1 = 2^{\ln \frac{1}{2^2}} \cdot 2^{6 \ln 2} = 2^{-6 \ln 2} \cdot 2^{6 \ln 2} = 1 \text{ и.т.д.}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N₂

$$\cos \vartheta x - \cos \delta x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin \vartheta x + \sin \delta x = 0$$

$$\cos \vartheta x + \sin \vartheta x = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} \cos \vartheta x + \sin \frac{\pi}{4} \sin \vartheta x) = \sqrt{2} \cos (\vartheta x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin \delta x - \cos \delta x = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} \sin \delta x - \sin \frac{\pi}{4} \cos \delta x) = \sqrt{2} \sin (\delta x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos (\vartheta x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \sin (\delta x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos (\vartheta x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = -2 \sin \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\sin (\delta x - \frac{\pi}{4}) = 2 \sin \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\sin \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} \left(\cos \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$1) \sin \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2) \cos \frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$\sin \left(\frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\delta x - \frac{\pi}{4}}{2} - \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) \sin \left(\vartheta x - \frac{3\pi}{4} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) = 0 \\ \sin \left(\vartheta x - \frac{3\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \sin \left(\vartheta x - \frac{3\pi}{4} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x &= \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta x - \frac{3\pi}{4} &= \pi l, l \in \mathbb{Z} \\ \vartheta x &= \pi l + \frac{3\pi}{4} \\ x &= \frac{\pi l}{12} + \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

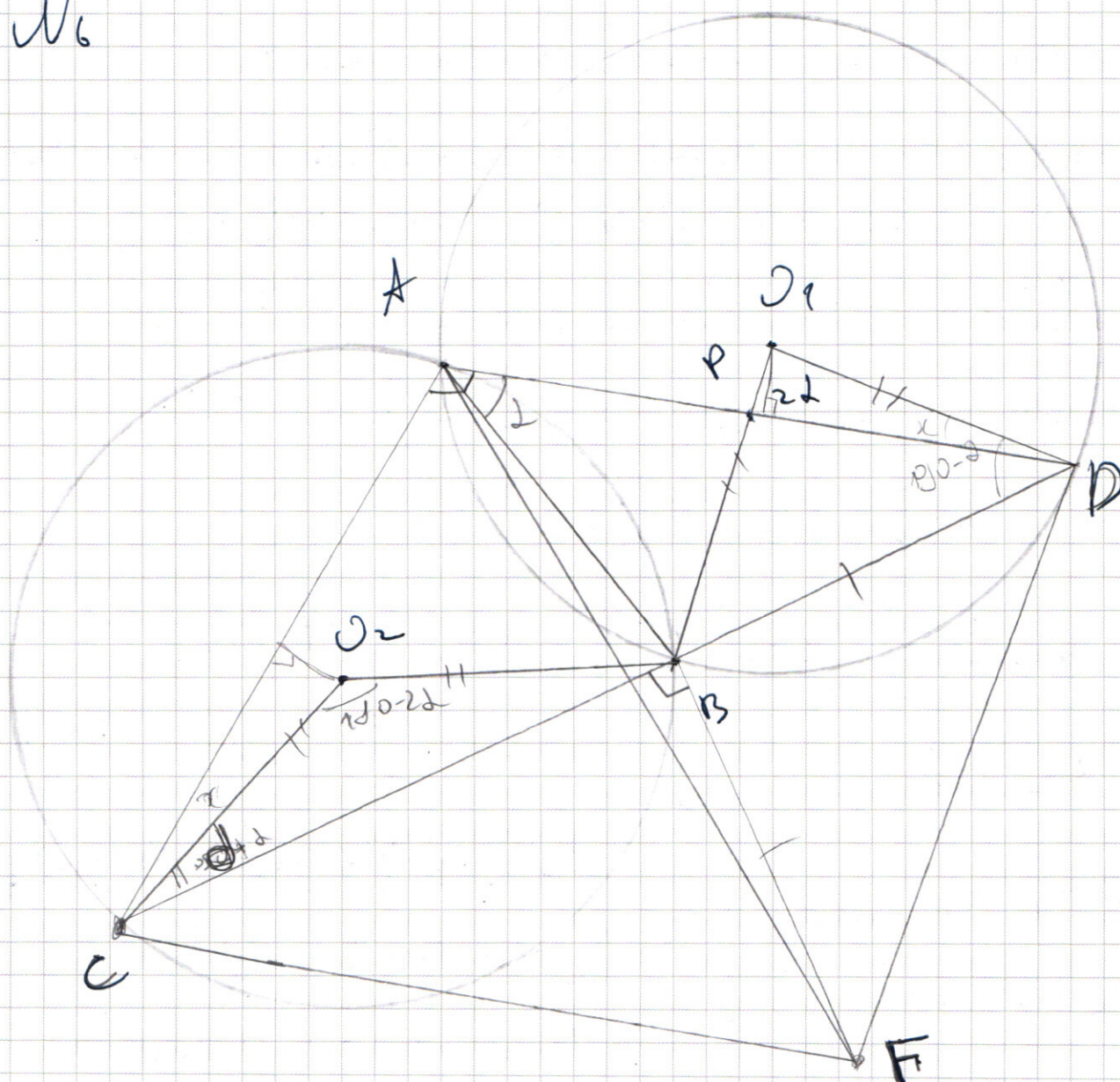
Дано:

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{4} \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi t}{9} \quad t \in \mathbb{Z}$$

№6



$$\angle D O_1 B = 2\alpha \Rightarrow \angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle CAB = 90 - \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle C O_2 B = 180 - 2\alpha$$

$$\text{По теореме косинусов для \triangle B O_1 D} \quad \text{По теореме косинусов для \triangle C O_2 B}$$

$$BD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha \quad CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\pi - 2\alpha) = \\ = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$BF = CF$$

$$BF^2 + CF^2 = CF^2$$

$$CF^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\alpha + 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha = 4R^2$$

$$CF = 2R = 20$$

$$BC = 12$$

$$\frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \sin \angle BCF$$

$$\frac{5R \sqrt{1 + \cos 2\alpha}}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$6 = 5 \sqrt{2 \sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$$

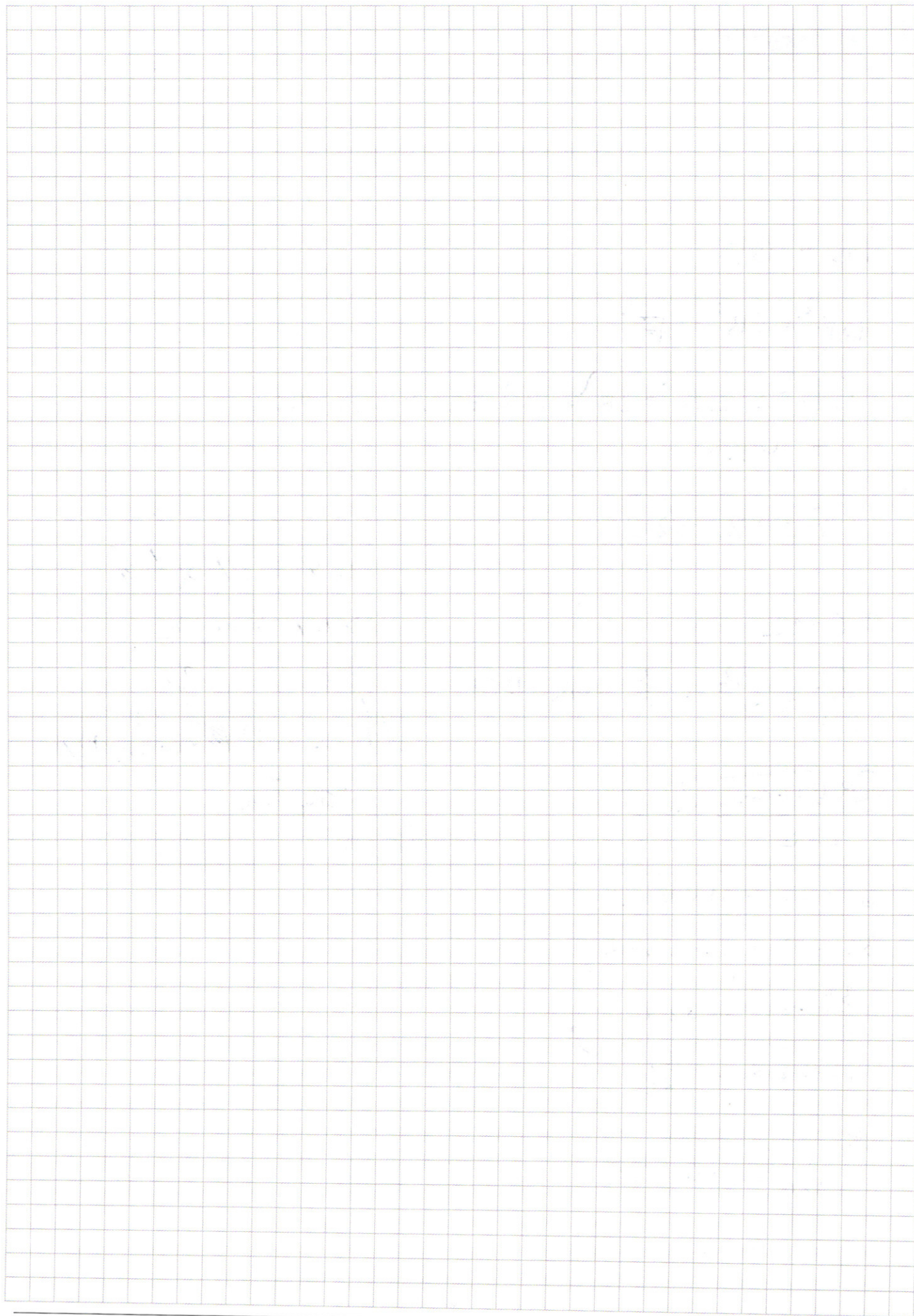
$$36 = 50 (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\frac{36}{50} - 1 = \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{14}{50}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{20}$$

$$\begin{aligned} \angle BCF &= \alpha \\ \Rightarrow \angle ACF &= 2\alpha \\ AD &= 0.5 \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 2R \cos \alpha \\ AC &= \end{aligned}$$



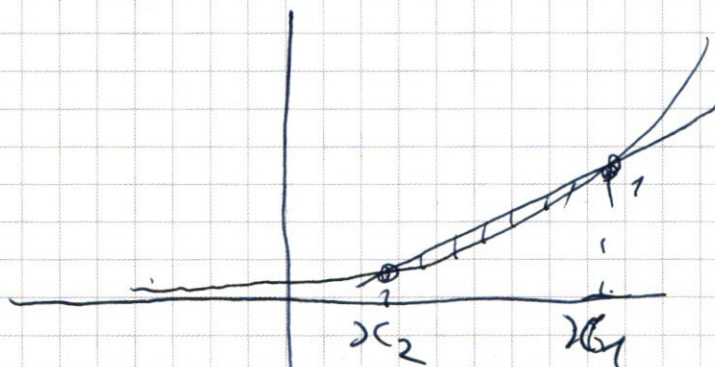
☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y < 76 + 2(2^{3x} - 1)x \end{cases}$$



Или пересекаться в точке
 $x = 6$

$$64 + 3 \cdot 2^{34} = 76 - 12 + 2^2 \cdot 2^{32} \cdot 3$$

Пусть $x_2 < 5,0$

$$\Rightarrow y \geq 32 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2^{34} \approx 32 \cdot \sqrt{2} + 12 \cdot 2^{32} = 32 \cdot \sqrt{2}$$

$$y < 65 + 4 \cdot 1 \cdot 2^{32} \quad 60 + 1 \cdot 1 \cdot 2^{32}$$

$$32 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x_2 > 6 \Rightarrow x_2 = 6$$

$$x_2 = 38$$

$$\sum_{x=6}^{x=38} [f(x)] - \sum_{x=6}^{x=38} [g(x)]$$

$$f(x) = 76 + 2(2^{3x} - 1)x$$

$$g(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$

или во точке по x_i по прямой
или во точке по x_i по прямой

$$46 \cdot (38 - 6 + 1) + 2(2^{32} - 1) \cdot (6 + 7 + \dots + 38) - \frac{2^6(2^{38-6+1} - 1)}{1} -$$

$$- 3 \cdot 2^{34} (38 - 6 + 1) =$$

$$\begin{aligned}
 & 126 \cdot 2 \cdot (2^{32} - 1) + 2508 - 2^6(2^{32} - 1) - 99 \cdot 2^{34} = \\
 & = 126 \cdot 2^{33} - 1452 + 2508 - 2^6 \cdot 2^{32} - 2^6 - 99 \cdot 2^{34} = \\
 & = \underbrace{(363 - 99)}_{264} \cdot 2^{34} - \underbrace{2^5}_{32} \cdot 2^{34} - 64 + 1056 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = 232 \cdot 2^{34} + 992 \text{ и это все - мен-но} \\
 & \text{на примере} \\
 & 232 \cdot 2^{34} + 992 - 38 = 232 \cdot 2^{34} + 954
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 =$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 3 \\ \underline{0} 26 \\ 18 \\ \underline{ 18} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 3 \\ \underline{12} 343 \end{array}$$

$$343$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 4} \\ 4 \\ \underline{63} 49 \\ 63 \\ \underline{ 63} 6 \end{array}$$

$$7^3 \cdot 3$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 1$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$$

$$2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2$$

$$\cos 9x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$\frac{2^6 \cdot -\ln 2}{2^6} = -\ln 2^6$$

$$1) 2y + 10 = 10$$

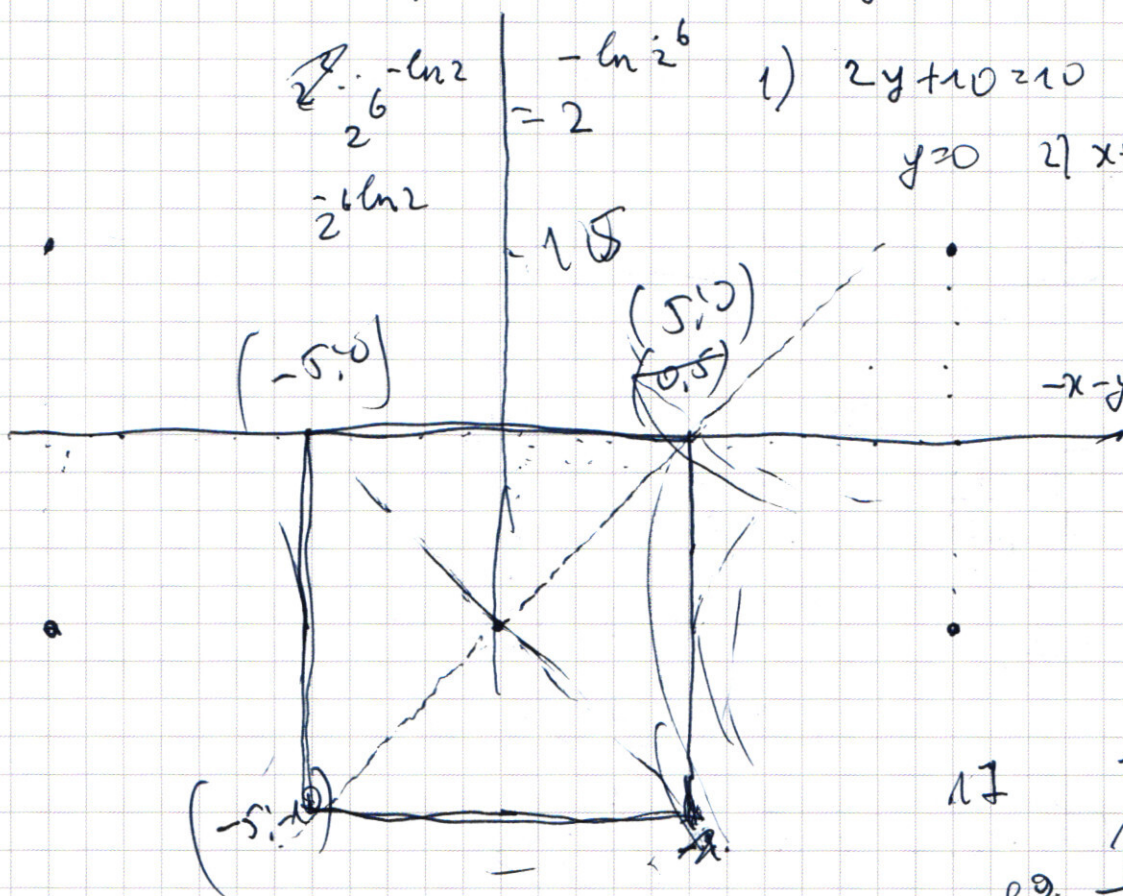
$$y = 0 \quad 2) x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \\ + 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \sqrt{514} \\ 289 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$y^2 - y(4+x) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$\frac{4+x+3x-4}{2} =$$

$$\frac{4+x-3x+4}{2} =$$

$$\frac{-3\ln x}{16x} = 2x \ln\left(\frac{2}{x^6}\right)$$

$$= 2x$$

$$\frac{8-2x}{2} = (4-x)$$

$$\frac{8x}{2} \cdot \frac{-3\ln x}{2} = x \ln\left(\frac{2}{x^6}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 4x \sin 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x \left(\sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + (\sin 4x + 1) (\sin 5x - \cos 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

~~2x~~

$$\sqrt{2} \cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x$$

$$-2 \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2x + 6.16x - \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$9x - \frac{3\pi}{4}$$

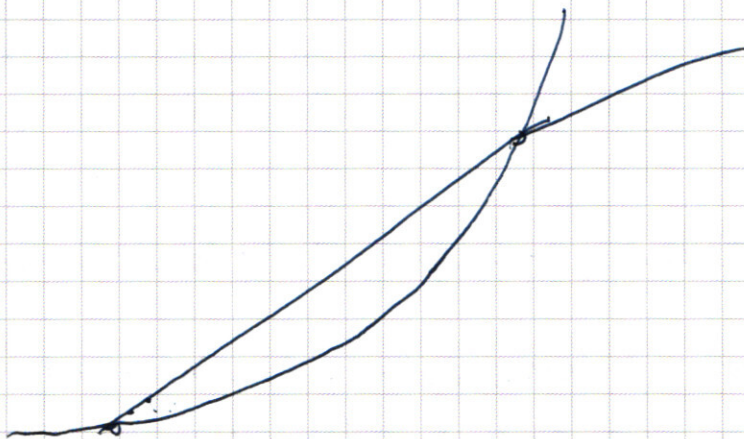
$$\frac{\pi}{2} - \frac{13x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{13x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 4x \right)$$





$$\frac{44}{(6+38) \cdot 33}$$

3.

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 33 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 726 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2698 \\ - 2452 \\ \hline 246 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 46 \\ \times 33 \\ \hline 228 \\ 228 \\ \hline 2508 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2056 \\ - 992 \\ \hline 1064 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 363 \\ - 99 \\ \hline 264 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos 9x + \sin 9x &= \sqrt{2} \left(\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad 2x \quad \ln \frac{2}{x^6} \\ \sin 5x - \cos 5x &= -\sqrt{2} \left(\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \left(\frac{2}{x^6} \right)^{\ln 2x} \\ \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x &= 0 \quad \ln x \quad \ln x \quad \ln x \\ -2 \sin 7x \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) &= \cos 4x \quad x^6 \quad \ln 5x \\ &\quad \ln x - \ln 2x \quad \ln x + \ln 2 \\ &\quad \left(\frac{-\ln 2}{x^6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) \\ \sqrt{2} \left(\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ 2 \sin 7x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) &= \cos 4x \\ -2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{cases} y = 2^{3x} + 3 \cdot 2^{34} \\ y = 16 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$



$$2^{3x} \ln 2 \quad 2 \cdot (2^{32} - 1)$$

$$1.5 \quad 2 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$16 + 3 \cdot 2^{32} - 3$$

$$5.2$$

$$x = 6$$

$$2^{3x} + 3 \cdot 2^{34} = 16 + 2 \cdot 2^{32} - 2x$$

$$16 + 2^{33} - 2x - 2x$$

$$3^2 \quad 14 \quad 5.2$$

$$CF^{-1}$$

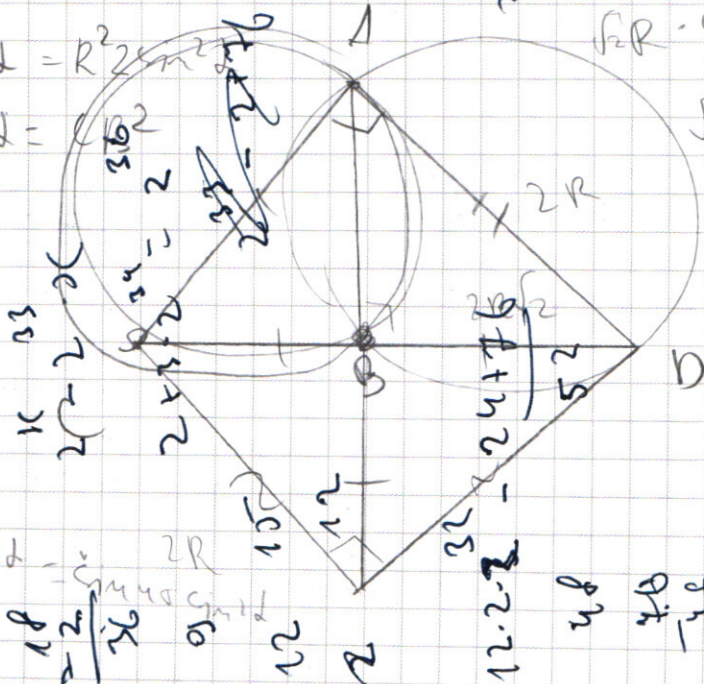
$$R = 10$$



$$\frac{\sqrt{2} R \sin 2\alpha}{2R}$$



$$2(3-2\alpha) + 2\alpha \cos \alpha =$$



[illegible]

$$\begin{array}{l} 3d \\ 2 + 3 \cdot 2 \\ 3d \\ 2(2 + 3) \end{array}$$