

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 1680

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} + 2^{35} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = 76 + (2 - 4 + 8 + \dots + 2^{32})x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

варианты цифр: $\overbrace{777}^3 \overbrace{333}^3 \overbrace{11}^2$ (1)

$$77793111(2)$$

(каждо ровно три семёрки и 3^3 , остальное — единицы)

Перестановки: (1): $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = A$

(2): $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = B$

$$A+B = \frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560 \cdot 3 =$$

$$= 1680$$

Ответ: 1680

Задача 2

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

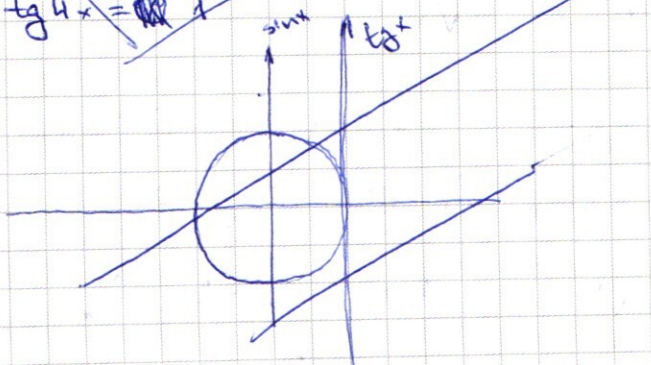
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} (-\sin 9x \cos \frac{3\pi}{4} + \cos 9x \sin \frac{3\pi}{4}) + \sqrt{2} (-\sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 5x \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin(9x + \frac{3\pi}{4}) + \sin(5x + \frac{3\pi}{4}) = \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 7x \cos(4x + \frac{\pi}{2}) = \cos 4x \Leftrightarrow -2 \sin 7x \sin 4x = \cos 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \sin 7x = 0 \end{cases}$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x = \cos 4x$$



Задача 2

$$\begin{aligned}
 & \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \left(\cos 9x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 9x \sin \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \left(\cos 5x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin 5x \sin \frac{3\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos 4x = -\cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(5x - \frac{3\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos 4x = 2 \cos \left(7x - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2 \sin 7x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos 4x = \sqrt{2} \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 2x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 7x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} & x = \frac{\pi}{8} + \pi k/2 \\ \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 7x + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi k}{5} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x + 2\pi k & x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases} \\
 & \text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi k}{5}, \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{9} \right\} \\
 & k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Задача 3

(1): $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(x^2/x^2)}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{y^{\ln x^4}} = y^{\ln 2} \cdot \frac{1}{y^{\ln x^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{\ln x^2}} = y^{\ln 2} \cdot \frac{1}{y^{\ln x^2}} \Leftrightarrow$$

$$[x > 0; y > 0]$$

$$\Leftrightarrow x^{\ln x^2} = y^{\ln \frac{x^2}{2}} \quad (v)$$

(2): $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + xy - 2xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y - 2x)(x + y) - 4(y - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 4 \end{cases}$$

в случае x : $(v) \Leftrightarrow x^{\ln x^2} = (2x)^{\ln(\frac{x^2}{2})} \Leftrightarrow (x^2)^{\ln x} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2\ln x} \Leftrightarrow$
 $f(x) = \ln x$ - инъекция $\Leftrightarrow x^2 = \frac{x^4}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \Rightarrow y = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) уравнение $x^{\ln x^2} = (4-x)^{\ln \frac{x^3}{4-x}}$ $\Leftrightarrow$

$$x^{\ln x^2} = y^{\ln y^3} \Leftrightarrow x^{\ln x^2} = y^{\ln x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{y^{\ln y}} \Leftrightarrow$$

$$(x^2)^{\ln x} = (y^3)^{\ln x} \cdot \frac{1}{y^{\ln y}} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{\ln x} \cdot y^{\ln y} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{(4-x)^3}\right)^{\ln x} = \frac{1}{(4-x)^{\ln(4-x)}}$$

$$x \in (0; 4)$$

или $x \in (0; 1)$

$$\frac{x^2}{(4-x)^3} < 1 \quad \left| \Rightarrow \text{левая часть} > 1 \right.$$

$$\ln x < 0$$

$$(4-x) > 1 \quad \left| \Rightarrow \frac{1}{(4-x)^{\ln(4-x)}} < 1 \right.$$

$$\ln(4-x) > 0$$

или $x \in (3; 4)$ правая часть > 1
левая часть < 1

~~или $x \in (1; 3)$~~

Ответ: $(2; 4)$

Задача 4.

дано:

$$u, l, w, s, o$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 16$$

$$\angle KSO = ?$$

$$S = ?$$

3 SO через сферу в точках X и T

α и β - ил-ты, кас. сферы и перп. SO $\rightarrow$

$$\Rightarrow \angle \beta \sim \angle \alpha$$

$\Rightarrow$ в плоскости подобия точки будут подоб. А

$$\alpha \cap SK = H$$

$$\beta \cap SK = P$$

$$\triangle SXP \sim \triangle STH (\angle STH = \angle SXP \wedge \angle THS = \angle XPS)$$

и так во всех 3-х

т.е. $\frac{S_2}{S_1} = 16 = k^2$, где k - кт подобия: одинаков и равен $XS^2 : TS^2 \Rightarrow PS : HS = 4$

3 TS = a , R - радиус сферы

$$\frac{a}{a+2R} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3a = 2R \Leftrightarrow R = 1,5a$$

в $\triangle SKO$ по т. Пиф $SK = \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR - R^2} = a\sqrt{1+3} = 2a$

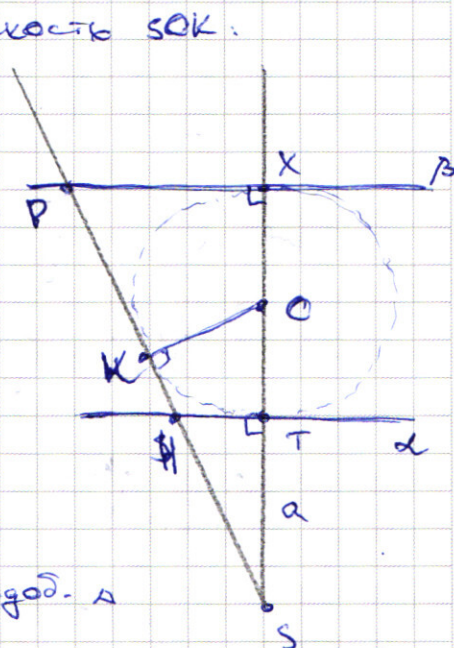
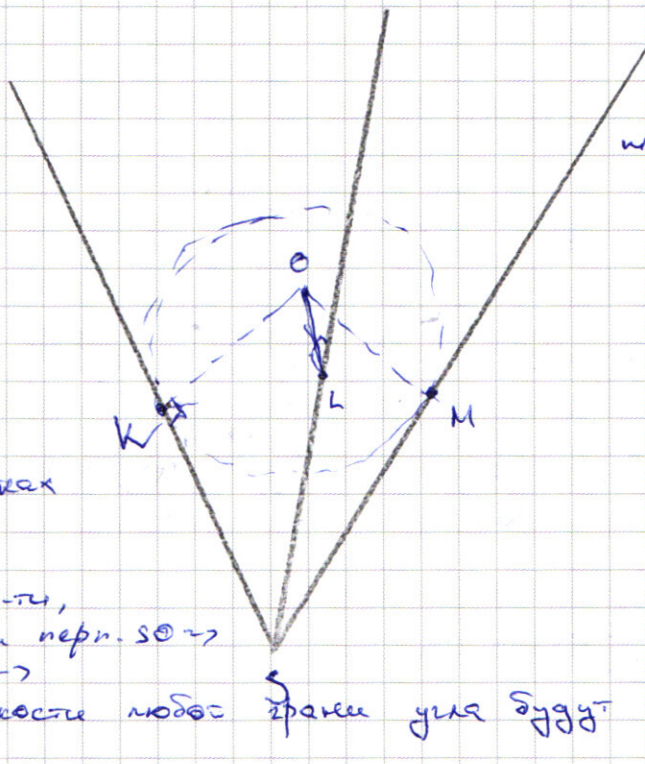
$$\text{tg} \angle KSO = \frac{OK}{KS} = \frac{R}{2a} = \frac{1,5a}{2a} = 0,75 \Rightarrow \angle KSO = \arctg \frac{3}{4}$$

2) $\triangle KSO = \triangle KLO = \triangle KMO$ (общая OS, $OK = OL = OM = R$, $\angle KOS = \angle LOS = \angle MOS = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{s}{S_2} = \left(\frac{SO}{SK} \right)^2 = \frac{a+R}{a+2R} = \frac{2,5a}{4a} \Leftrightarrow S = \frac{2,5 S_2}{4} = 10$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arctg \frac{3}{4}$$

$$S = 10$$

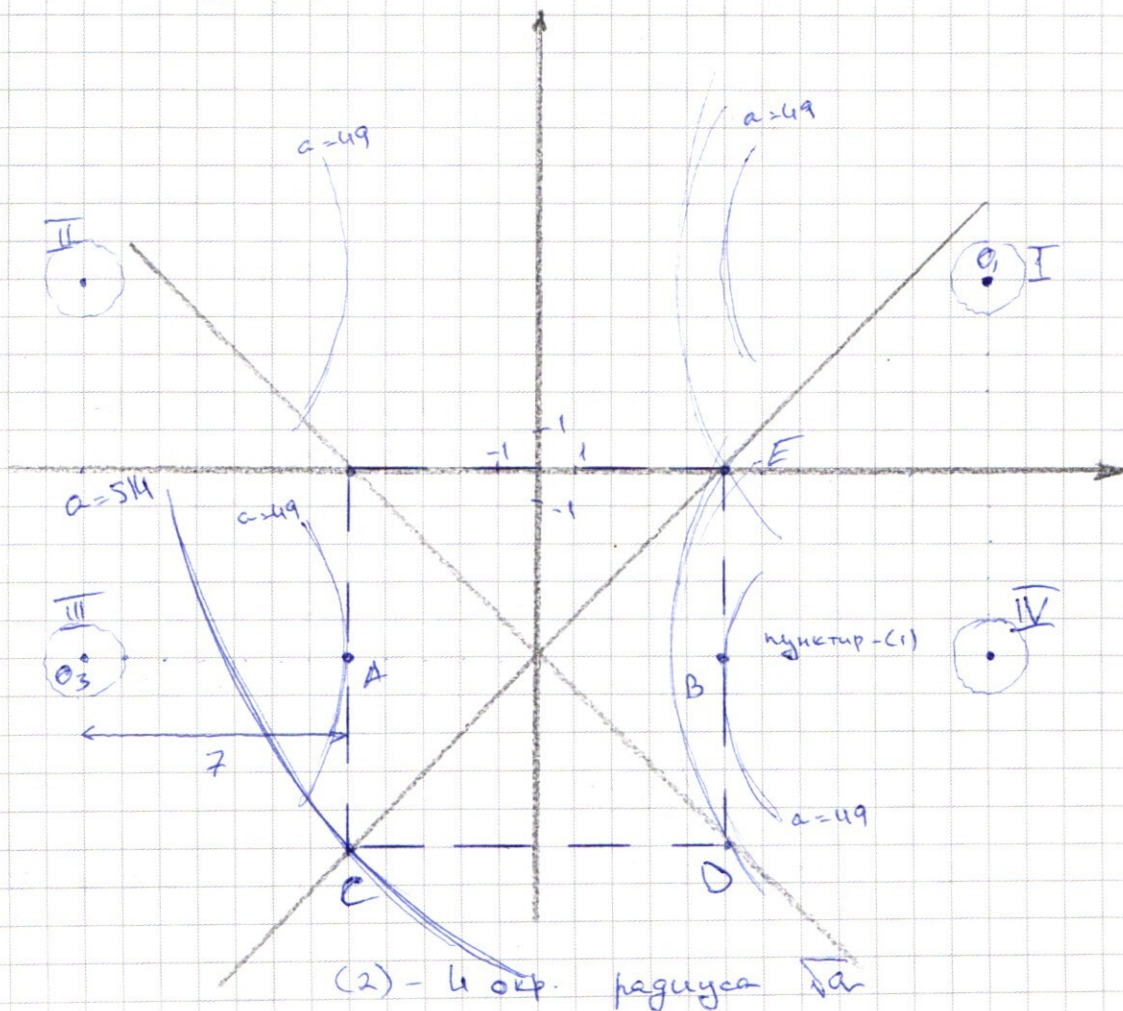


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Изобразим мн-во точек



1) $a < 49 \rightarrow$ решений нет.

$a = 49$ - 1 реш. (касается в т. A и B), т.к. $|O_3E|^2 > 49$
далее окружности будут пересекать квадрат более чем по 2-м

2) В какой-то момент $S_I \ni C, D \in S_{II} \rightarrow$ тоже 2 реш.,
т.к. Квадрат $\cap III \in \emptyset$ и Квадрат $\cap IV \in \emptyset$ при таком радиусе
 $|O_3E|^2 = 314$ (E - самая дальняя)

$$10, C / ^2 = 2^2 = 289 + 225 = 514$$

а также квадрат будет внутри всех

Отв: 49; 514

Задача 6.

данно:

$$S_1, S_2$$

$$R_1 = R_2 = 10$$

$$S_1 \cap S_2 = \{A; B\}$$

$$C \in S_1$$

$$D \in S_2$$

$$B \in [CD]$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$l \perp CD, B \in l$$

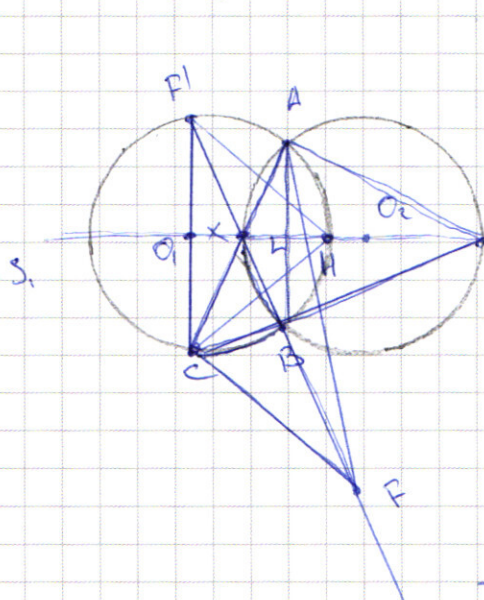
$$F \in l$$

$$BF = BD$$

$$AF \perp CD$$

$$a) |CF| = ?$$

$$b) S = ?$$



$$O_1 O_2 \cap S_2 = \{D; X\}$$

$$\angle XAD = 90^\circ \sim XO - \text{диаметр}$$

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow C \in AX$$

$$X \in l, \text{ т.е. } l \perp CD$$

$$\angle F'HC = \angle FBC \text{ (на 1 гл.)}$$

$$90^\circ \Rightarrow$$

$$\sim F'C - \text{диаметр}$$

$$|F'X| = |CX| \Rightarrow \angle F'CX = \angle EF'X$$

$$AB \perp O_1 O_2 \Rightarrow AB$$

из симметрии отн.

$$O_1, O_2 \quad F'C \perp O_1 O_2$$

$$\angle CBF' = 90^\circ \Rightarrow F'C - \text{диаметр}$$

$$B \rightarrow A \quad D \rightarrow D \quad / \Rightarrow C \rightarrow F' \Rightarrow CF' \perp O_1 O_2 \Rightarrow CF' \parallel AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle F'BA \Rightarrow CB = XB \Rightarrow CB = XB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CF'B \Rightarrow BXD \Rightarrow F'B = FB = BD \quad / \Rightarrow CB \perp FF'$$

$$\Rightarrow CF = CF' = 2R = 20$$

$$\text{т.е. } CB = XB, \angle CBX = 90^\circ \Rightarrow \angle BCX = 45^\circ \Rightarrow \angle FCA = 90^\circ$$

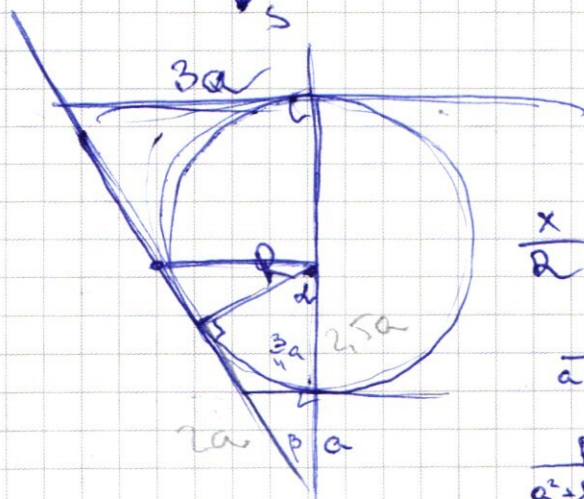
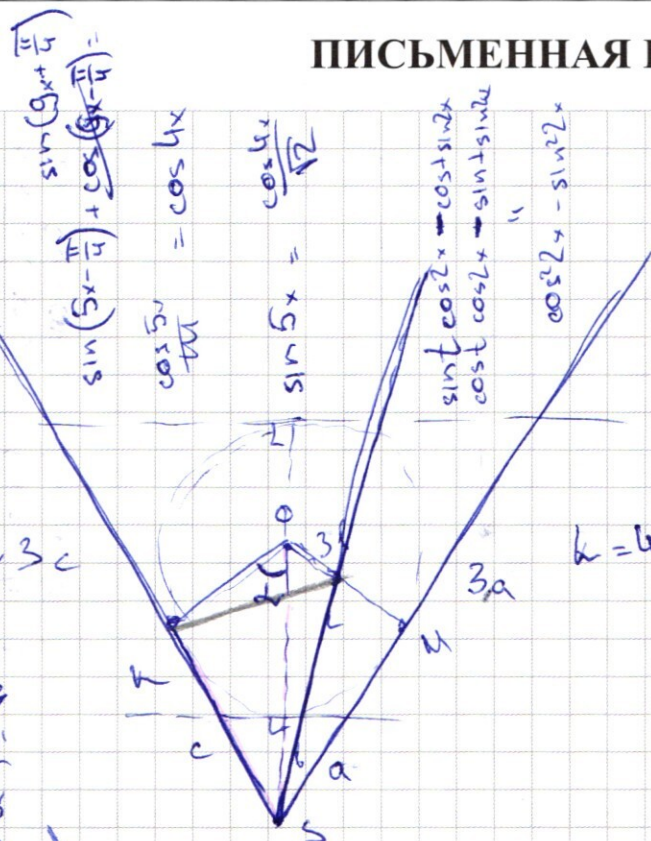
$$S = 10 \cdot AC$$

$$CB = 12 \Rightarrow F'B = AC = \sqrt{100 - 144} = 16$$

$$S = 160$$

Отв: $CF = 20$
 $S = 160$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{3V}{S}$$

$$k = 4$$

$$\tan \beta = \frac{x}{4a} \cdot \frac{x}{4a} = 0,25$$

$$\lg \beta = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = 1,52 \quad x = 32$$

$$\frac{x}{R} = \frac{a + 2R}{2}$$

$$\frac{x}{a+2d}$$

$$\frac{R}{a^2 \rightarrow \cancel{R^2} \rightarrow 2R - \cancel{R^2}}$$

$$\frac{4a}{x}$$

$$\frac{x}{a+22} = \frac{4a}{x}$$

$$x^2 = 4a^2 + 8aR$$

$$\frac{a+2R}{a} = \frac{L}{1}$$

$$4a = a + 22$$

$$Z_2 = 2R$$

$$P = 1,5a$$

$$x = t(a + 2R)$$

$$k = \frac{h\alpha}{t}$$

$$a^2t + 2Rt = R$$

$$a = \sqrt{\frac{R(1-2t)}{t}}$$

$$t^2 = \frac{4Q}{a+2D}$$

$$t^2 = \frac{R^2}{a^4 + 4R^2 + 4a^2R}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\sin(1 - \sin \theta) = \cos \theta (1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z+1)} = 1$$

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{\cos 4t}{1 - \sin 4t}$$

$$\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y$$

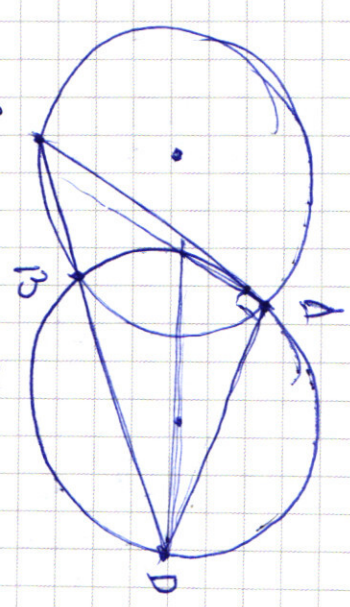
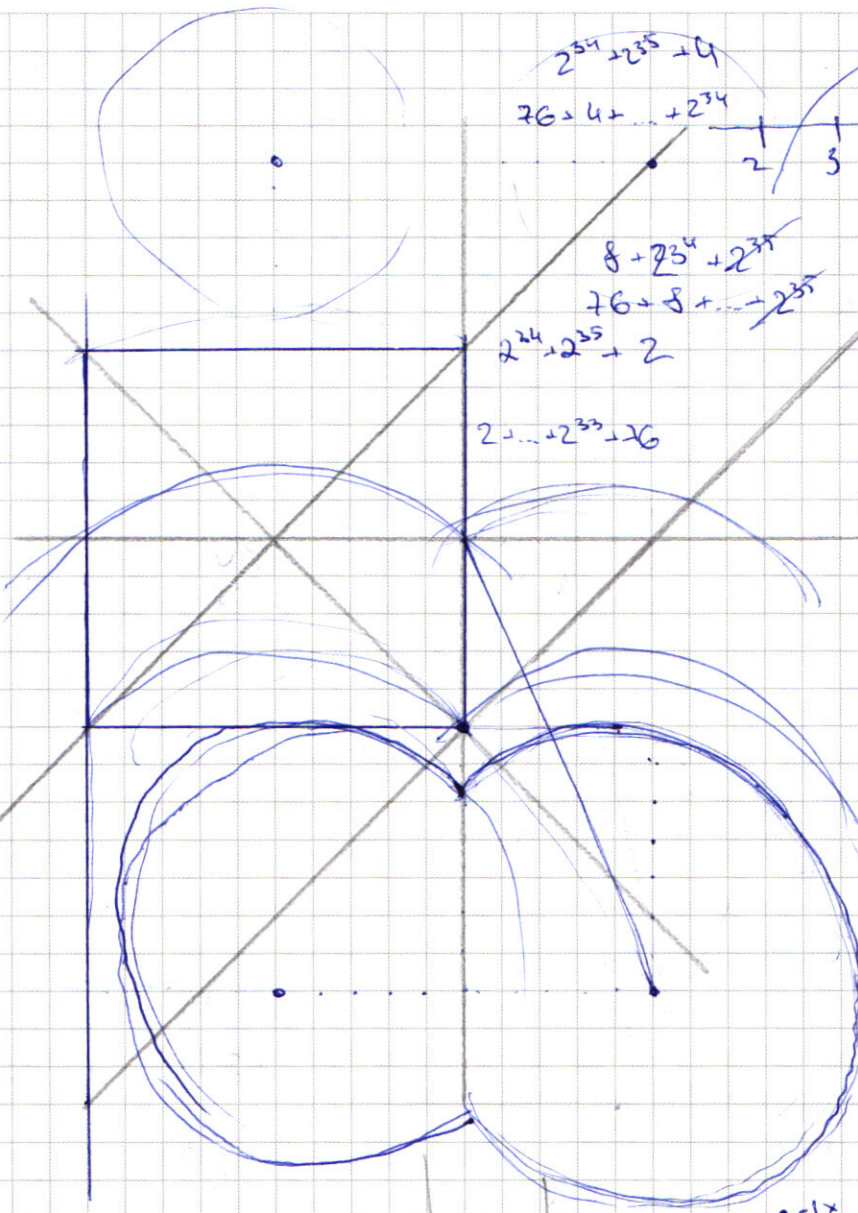
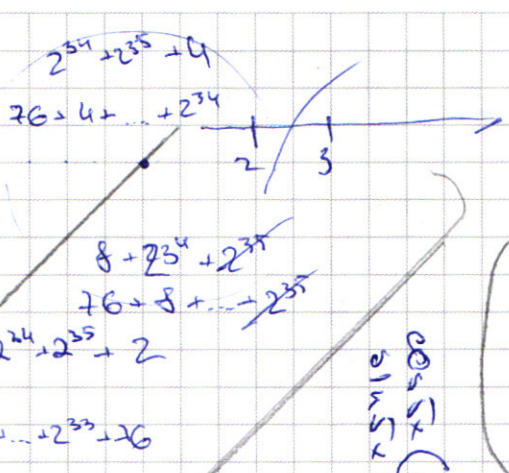
$$\cos^2 x (\cos^2 y - 1 + \sin^2 y) + \sin^2 x (\cos^2 y + 1 - \sin^2 y)$$

$$2 \sin^2 x \ln \frac{x^2}{y} = \ln x^{\ln 2}$$

$$\ln 2 \ln 4 = 4 \ln 2 \ln 4 = \ln 16$$

$$\frac{x^2}{y} = x^{\ln x^2} \quad y = x^{3 \ln x^2} \quad \ln u = 2$$

$$a = 49 \quad a = 169 \quad a \leq 24$$



$$\left(\frac{n}{15} \times 8 \right) \sin \left(\frac{n}{15} \times 5 \right) + \left(\frac{n}{15} \times 5 \right) \sin \left(\frac{n}{15} \times 8 \right) = n \cos - \cos$$

$$\cos \left(\frac{n}{15} \times 5 \right) + \cos \left(\frac{n}{15} \times 8 \right) = \cos \left(\frac{n}{15} \times 5 \right) + \sin \left(\frac{n}{15} \times 5 \right) + \sin \left(\frac{n}{15} \times 8 \right) + \cos \left(\frac{n}{15} \times 8 \right)$$

$$26 \perp \quad 2^{33} - 2 = 2^x \ln 2 \quad 2^{32} - 1 \quad 2^x = \frac{2(2^{32} - 1)}{\ln 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 9621 & 3 \\ 3207 & 3 \\ 1069 & 7 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7^3 \end{array}$$

$$\cancel{0} \ 1 \ \cancel{2} \ 3 \ \cancel{4} \ \cancel{5} \ \cancel{6} \ 7 \ \cancel{8} \ 9$$

$$3^3 \cdot 7^3$$

$$(77733311)$$

$$77793111$$

$$49 \rightarrow 28$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2} = 560$$

$$560 - 3(1680)$$

$$(x^2y)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^2} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = (y^2)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\ln x} = (8x^3)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\ln x} = 8x^{\ln x}$$

$$\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 2x = 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\int (x^2y)^{-\ln x} = y^{\ln(8/x^2)}$$

$$x = \frac{y}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{128} \quad 4^3 = 8^2$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y+x) - 2x(y+x) - 4(y-2x)$$

$$(y-2x)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$x = 2$$

$$y^{\ln y} = (8x)^{\ln x}$$

$$(2x)^{(\ln 2x)} = (8x)^{\ln x}$$

$$2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x} = 8^{\ln x} \cdot x^{\ln x}$$

$$\ln \frac{x^2}{2} = \ln x$$

$$y = 4 - x$$

$$\frac{1}{x^{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{y^{\ln x^4}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}}$$

$$(4^5)^{\ln \frac{1}{2}} = 4^{\ln \frac{1}{32}}$$

-2 sin

$$\frac{1}{x^{\ln x^2}} = \frac{y^{\ln(x^4 y)}}{y^{\ln(x^2)}} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\frac{1}{x^{\ln x^2}} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2})} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot \frac{1}{(4-x)^{\ln x^2}}$$

$$\frac{(4-x)^{\ln(4-x)^2}}{x^{\ln x^2}} = x^{\ln(\frac{(4-x)^2}{x^2})} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = \left(\frac{y}{x^2}\right)^{\ln y}$$

$$(x^2)^{\ln y} (x^2)^{-\ln x} = (y^4)^{\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$x^{2 \ln y} \cdot x^{-2 \ln x} = y^{4 \ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$x^{\ln \frac{y^2}{x^2}} = y^{\ln x^4 y}$$

$$x^{\ln 128 x^5} = 2x^{\ln x^5}$$

$$2 = x^{\ln 128}$$

$$(y^7)^{\ln x} \cdot \frac{1}{(x^2)^{\ln x}} = y^{\ln x^4} \cdot y^{\ln y}$$

$$y^{\ln(\frac{x^2}{y})} = (y^4 x^2)^{\ln x} = (y^2)^{\ln x} \cdot \frac{1}{y^{\ln y}}$$

$$y^{\ln y} = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\ln x} = x^{\ln \frac{y^2}{x^2}}$$

$$4^{\ln 4} = 16^{\ln 2}$$

$$(4-x)^{\ln(4-x)} = x^{\ln \frac{(4-x)^2}{x^2}} = 64$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y > -76 + 2(1 - 2^{32})x$$

$$2^{23} + 2^{32} + 2^{31} + \dots + 2$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24}$$

$$y < 76 + (2^{32} - 2)x$$

$$x^{\ln 128 x^5} = (2x)^{\ln 2 x^5}$$

$$2^{\ln 128 \cdot 32} = 4^{\ln 64 \cdot 64}$$

$$\frac{1}{\sqrt{15}} \left| \frac{1}{\sqrt{11}} \right|$$

$$\frac{2 \cos^2 x - 1}{1 - 2 \sin x \cos x}$$

$$\frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{\cos x}{1 - \sin x}}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{1}{15} \left| \frac{1}{11} \right|$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$