

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

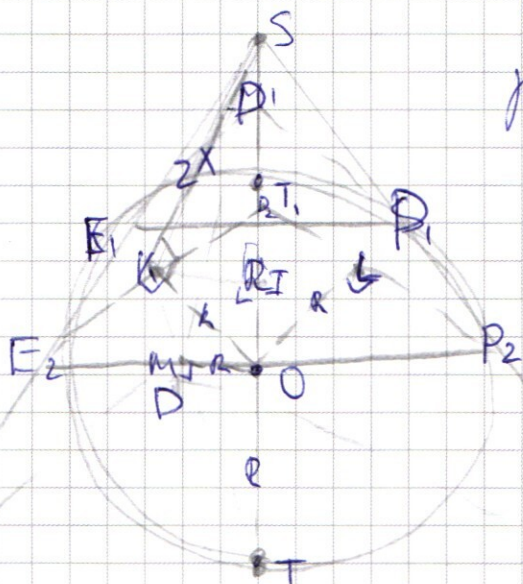
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Постр. рисунков:



N 4

Есть в 3-х зр. $\angle$ висс.
сфера, соединим S и O, проложим
радиус; заметим, во сколько 1

I SO и кас. сфер, //
(чер. ~~EPD~~ и ~~EPD~~, кас. в т. T_1);

$\text{Mortgage } \frac{\text{Mortgage}}{\text{EPD}} = 10; \frac{\text{Mortgage}}{\text{EPD}_1} = 1; \Rightarrow$
 $= \text{SEDP} - \text{нормальная SEDP}$
 (нм from $\frac{\text{Mortgage}}{\text{EPD}_1}$ и $\frac{\text{Mortgage}}{\text{EPD}}$ нормальн
 вк норма || в зак ор. 1 год.

§ Δ ~~EPD~~ - не ув. равноб. при

2) Очевидно, что если $\frac{S_{EPP}}{S_{EDP}} = 16 = k = 4$ (погобча) $\Rightarrow$ (R-пог. сфер)

$$\Rightarrow \frac{\sum T_i}{\sum T} = 4 \Rightarrow \text{поэтому } \sum T_i = x; \sum T = 4x \Rightarrow T_1 T - \text{грам} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{4x - x^2}{2} = \frac{3x}{2}; \text{ посем. } \text{сечение с } \text{депр. } \Delta KST:$$

no d. kae. u erk.: $KS^2 = ST_1 \circ ST = 4x \cdot x \Rightarrow KS = 2x$

• KSO - теория ($K \perp ES$) / no gen. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos(\angle K_5 O) = \frac{2x}{a+x} = \frac{KS}{SO} = \frac{2x}{x+\frac{3}{2}x} = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$$

3) Набегим: $T_1 I: (K I \perp SO) T_1 I = SK \cdot \cos(\angle KSO) - ST_1 =$
 $= 2x \cdot \frac{4}{5} - x = \frac{3}{5}x$; $KI \perp IM$ в окружности, $IM \perp KM$. Кот.

II EDP $\Rightarrow$ nprob. $\Delta E_2 D_2 P_2$ (uer. coer.), gme kot. okh. npr.
 upey KLM abn. bme. $\Rightarrow \Delta \frac{E_2 P_2 D_2}{E_1 P_1 D_1} : k = \frac{S_{II}}{S_{II}} = \frac{\frac{8}{5}x}{x} =$
 $= \frac{8}{5} \Rightarrow S_{E_2 D_2 P_2} = S_{E_1 P_1 D_1} \cdot k^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{OT bet: } \angle KSO = \arccos \frac{4}{5}; S = 2,56$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} & (I) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (II) \end{cases}$$

Заметим, что $x > 0$
 $y > 0$

(I) Логарифмируем: $\ln x^2 y^4 \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot \ln y/x^2$
Внесем скобки: $-2 \cdot \ln x (\ln x + 2 \ln y) = \ln y \cdot (\ln y - 2 \ln x)$
 $-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \cdot \ln y$
 $\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$ (кварр. ур-е)
Решим отн. $\ln y$:

$$D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x = \ln^2 x;$$

$$I. \ln y = \frac{3 \ln x + \ln x}{2} = 2 \ln x \Rightarrow y = x^2$$

$$II. \ln y = \frac{3 \ln x - \ln x}{2} = \ln x \Rightarrow y = x$$

$$I \cup II: x^4 - x^2 \cdot x - 2x^2 + 8x - 4 \cdot x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0; \text{ тк } x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0; \text{ очевидно } x=2 - \text{вл. рещ.} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x-2 \\ \hline x^2 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \end{array}$$

$$(проб: 8 - 4 - 12 + 8 = 0)$$

$$\text{тк } \sqrt{17} > 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x^2 \\ \hline -x^2 - 6x \end{array}$$

$$D = 1 + 16 = 17 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{неисп.}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 6x \\ \hline x^2 - 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x + 8 \\ \hline -4x + 8 \end{array}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2; 4); \left(\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)\right); \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)^2$$

II u 2:

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \text{ тк } x > 0:$$

$$-2x^2 + 4x = 0; \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$(2; 2)$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); \left(\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)\right); \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot j \cdot i$, $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot j \cdot i^{\frac{1}{3}} = 9261$
Разобьем 9261 на простые множители:

$$\begin{array}{r} 9261 \div 3 = 3087 \\ 3087 \div 3 = 1029 \\ 1029 \div 3 = 343 \\ 343 \div 7 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array}$$

океважно, что
все множ. $\neq 0$!

$$343 = 7^3 \Rightarrow 9261 = 7^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Есть 2 способа

представить 9261 8 -ю степенью
числа ≤ 9 .

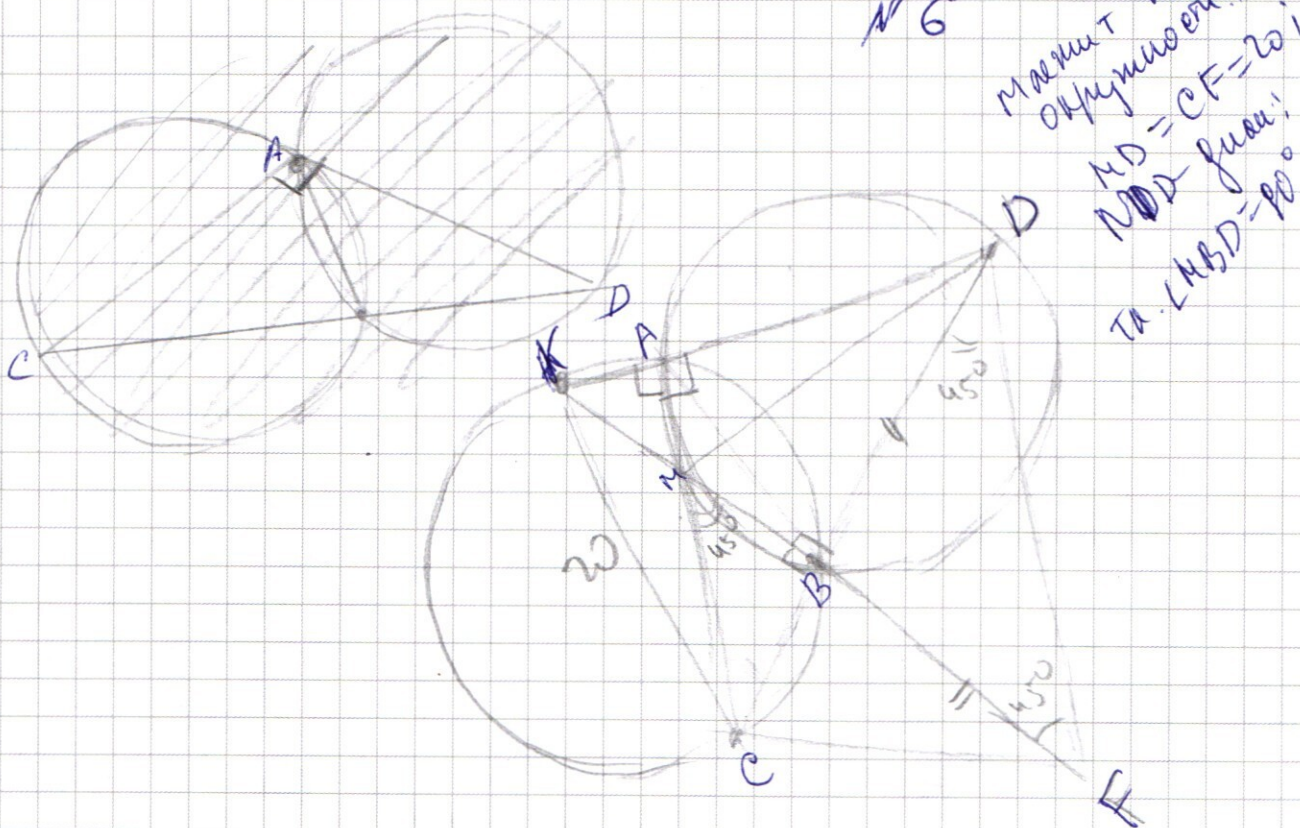
I: $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

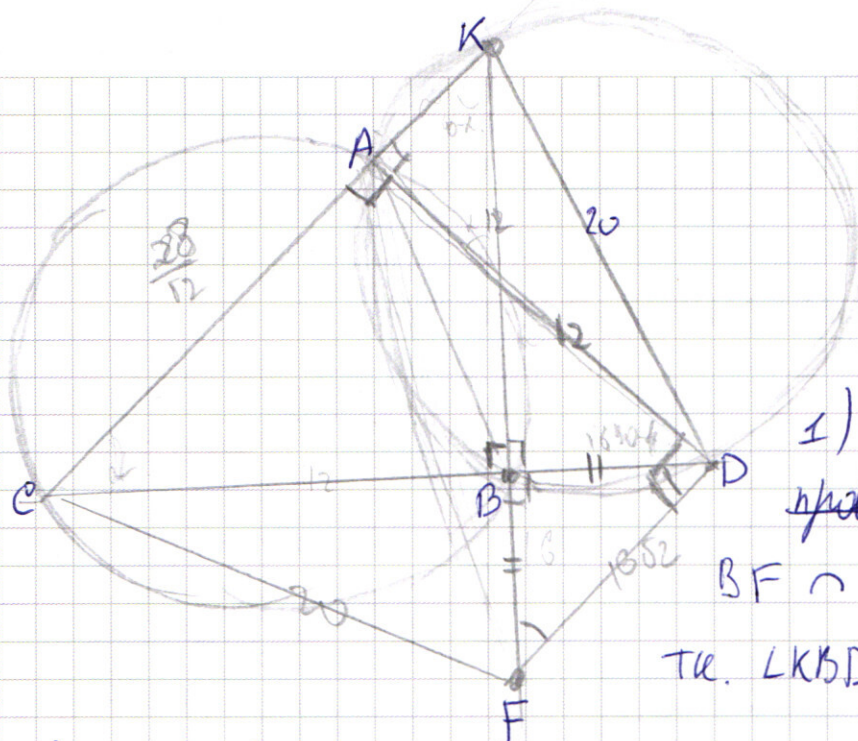
II: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$\Rightarrow$ ответ

$\Rightarrow$ Существует по 1-му выбору для каждого числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во вариантов $8! + 8! = 2 \cdot 8! \in \text{ответ. (30720)}$





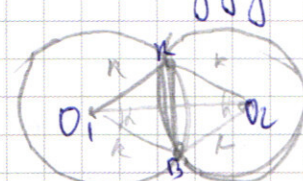
16, пр.

$\angle CAD = 90^\circ$
 $BF = BD$

1) рассм. рис.:
 провести хорду BF,
 $BF \cap \text{окр. в т. K}$ (см. рис.)
 тк. $\angle KBD = 180^\circ \Rightarrow KD$ -диам;
 $KD = 20$;

2) ~~провести~~ ~~КА~~: провед. АК: $\triangle KAD$ -прямоу., тк. $\triangle KBD$ -прямоу.
 $\triangle KBD$ омыр. на $KD \Rightarrow \angle CAK = 90^\circ + 10^\circ = 100^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow CAK$ - прямая:

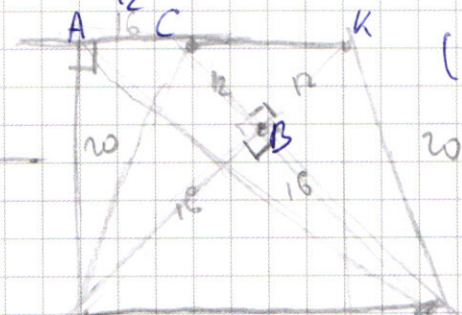
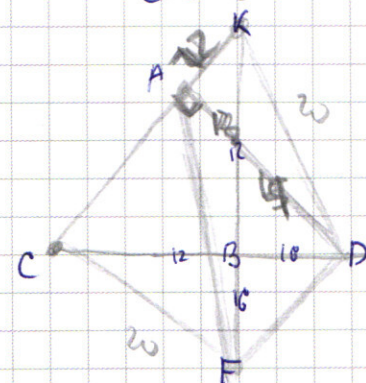
3) ~~$\triangle BDF \sim \triangle CBK$~~ AB-хорда, AB-е 2-м окружностям
 описанным. $\Rightarrow$ центр. углы в обеих окружностях, оп.
 на AB будут равны. (тк. $\triangle O_1AB = \triangle O_2AB$) (р.2) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle O_1AB = \angle O_2AB$ (внеш. в окр.) $\Rightarrow$ они равны.
 $\Rightarrow \angle KCB = \angle CKB \Rightarrow \triangle CKB$ -равноб $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle BFD \sim \triangle CBK \Rightarrow CB = CK \Rightarrow \triangle CBF = \triangle KBD \Rightarrow$



$\Rightarrow CF = 20 = KD$

II. Если $BC = 12 \Rightarrow BK = 12$; $BF = BD = \sqrt{400 - 144} = 16$

$AD = KB$ (тк. $\triangle KAD = \triangle KBD$ (прям. KD -общ./
 $\angle BKD = \angle DAK$)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

перерисовка рисунка в более ^{№6, ир.} удобную форму,
т.е. заменив, что МДСЕ - явл. Тростинка.

Прогор не не: $\begin{array}{r} 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$

$$AF = 4\sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 3^2} = 4\sqrt{32 + 9} = 4\sqrt{41}$$

$\Rightarrow \Delta A F C:$

стороны:

$$\frac{4541}{1482} = 20$$

квadrat: 16.91; 400; 2.198

$$\Rightarrow R_0 T \cos:$$

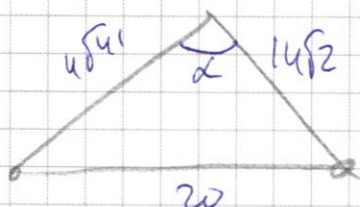
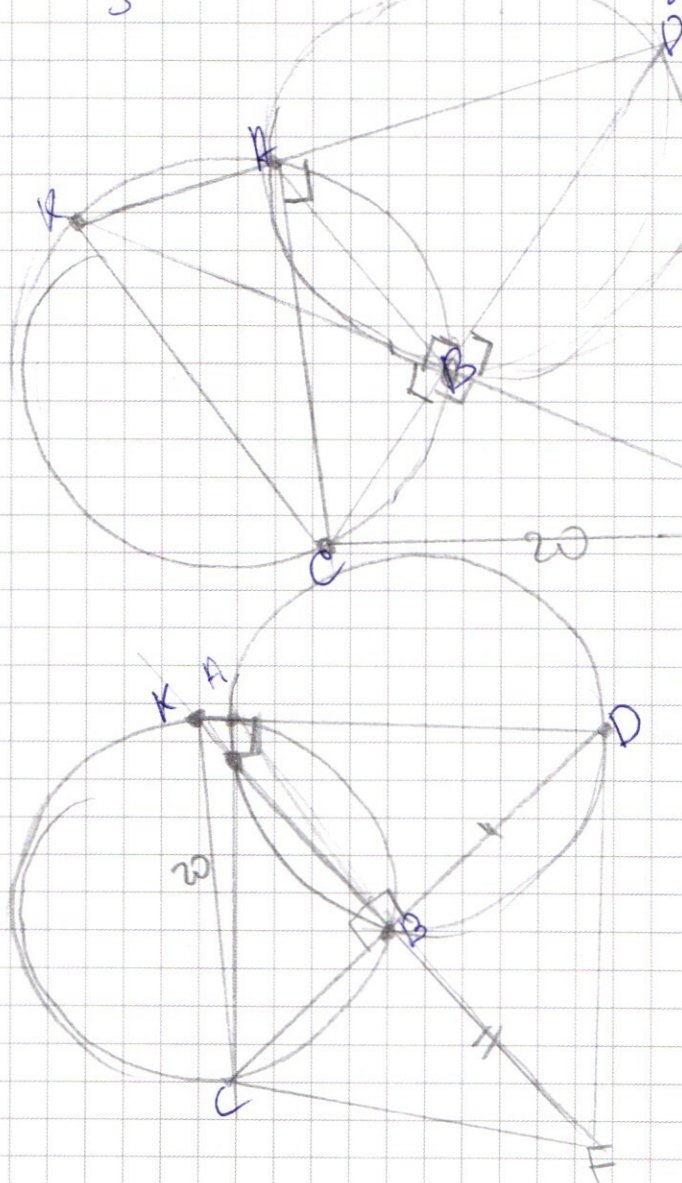
$$4100 = 656 + 392 - 8 \cdot 14 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 21$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow S = 4\sqrt{41} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

056.

Orbet: 20, 5



$$\cos 9x + \sin 9x - \sqrt{2} \cos 4x - (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 9x + \sin 9x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x - \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 5x - \sin 5x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 9x \right) - \cos 4x - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0;$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 9x \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$(I) \cdot 2 \sin \left(7x \right) \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0.$$

$$(II) \cdot 2 \sin(7x) \cdot \cos(4x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cos(7x) \cdot \sin(4x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$\cos(4x) (\sin 7x - 1) + \sqrt{2} \cos(7x) \sin 4x = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin \cos + \cos \sin$
 $\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \cos(5x + \frac{\pi}{4})$
 $\sin 9x + \sin 9x$
 $\sqrt{2} (\cos 9x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \sin 9x \cdot \cos \frac{\pi}{4})$
 $\sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4})$
 $\sin(\frac{\pi}{4} + 9x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 5x)$
 $2 \sin 7x \cos 4x + \frac{\pi}{4}$
 $\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4})$
 $\sin(7x) \cos(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos(4x)$
 $\cos d = \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

7) $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$
 $\frac{38}{2} \rightarrow \frac{19}{4} (2^{33} - 2)x$

$y - 3 \cdot 2^{34} \geq 2^x$
 $y - 76$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$
 $- \cos(4x)$
 $- 2 \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \sin(4x) - \cos(4x)$

$KS^2 = x \cdot \frac{4}{5}x$
 $R = \frac{3x}{2}$

$2x \cdot \frac{3}{5} = \frac{8x}{5}$
 $1 - \frac{8}{5}x = \frac{64}{25} \in \text{отв.}$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

хно yzw

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$-\ln x^2 y^4 \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x^2}$$

$$-2 \ln x y^2 \cdot \ln x = \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$y^2 - 4y - xy - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y(y-4) - xy - 2x^2 + 8x = 0; -2(\ln x + 2 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$II: x^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln y \ln x = \ln^2 y - 2 \ln x \ln y;$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$\ln^2 y - 3 \ln y \ln x + 2 \ln^2 x = 0;$$

$$x(x-2) = 0$$

$$D = 9 \ln^2 y - 8 \ln^2 x = \ln^2 x;$$

$$x=0; x=2$$

$$\Rightarrow y=0; y=2$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x \pm \ln x}{2};$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2;$$

$$\ln y = 2 \ln x; \ln y = \ln x$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0;$$

$$y = x^2; y = x$$

$$x=0; x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$1 - 1 - 6 + 8$$

$$-1 + 6 + 8$$

$$8 - 4 - 12 + 8$$

$$4 - 12 + 8 \Rightarrow x=2$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8$$

$$x-2$$

$$x^2 + x - 4$$

$$(x-2)(x^2+x-4)$$

$$x^3 + x^2 - 4x - 2x^2 - 2x + 8$$

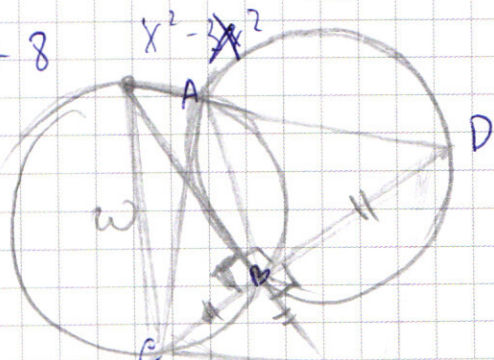
$$y_2 = \frac{(17-1)^2}{4}$$

$$x^2 - 6x$$

$$x^2 - 2x$$

$$-4x + 8$$

$$-4$$



250

400
+240

410
+240
+6

766

$12^2 + 16^2 \cdot \sqrt{2}$

400-8

392

400

$144 + 256 \cdot 2$

400

100

12

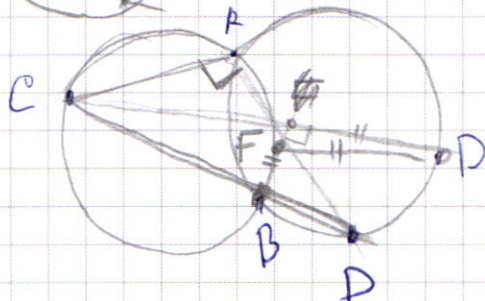
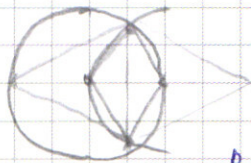
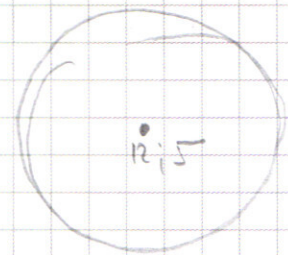
$$|y+1| + |y+9| = 10$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a, \leftarrow \text{радиус}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

↑ окружность
+ 25 - a^2



$$R=R_1=R_2=0$$

№6. Пусть $x+y > 5$

$y-x > 5$

$$\begin{cases} y > x-5 \\ y > x+5 \end{cases}$$

$$CF = ?$$

$$x+y+y-x=0$$

$$(2y=0) \Rightarrow$$

$$-x < 5$$

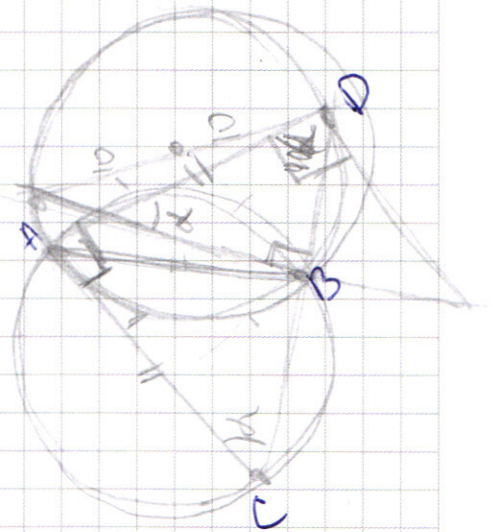
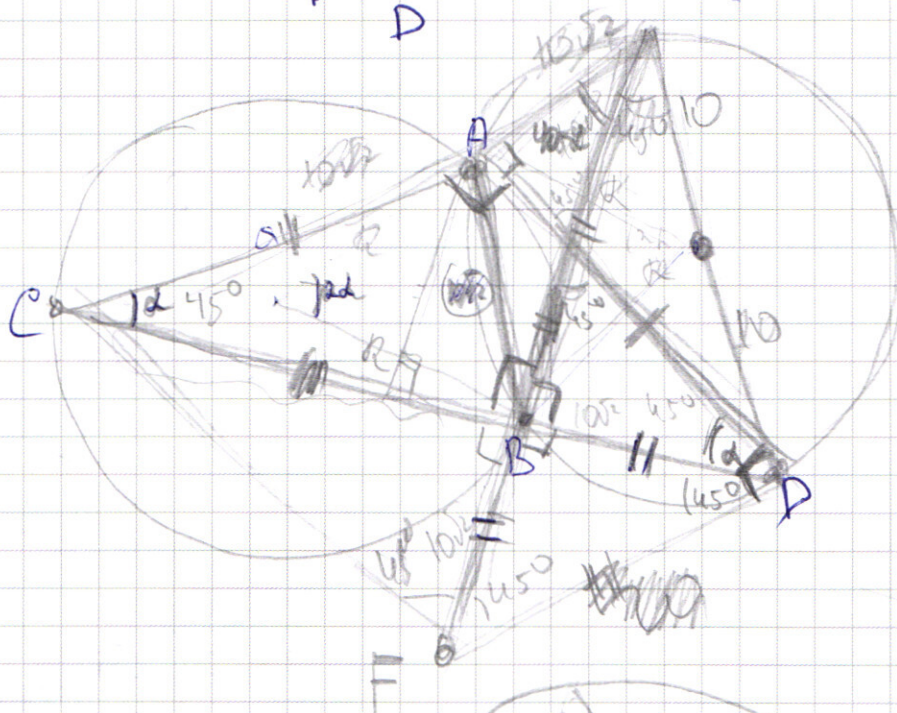
$$x < 5$$

$$x < 5$$

$$y=0$$

$$200 = x^2 + x^2 - 2x \cdot \sqrt{2}$$

$$2x^2 - 2x\sqrt{2} = 200$$



$$R^2 + R^2 - 2R \cos \alpha =$$

$$=$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2} (\cos 9x + \sin 9x) + \cos 5x + \sin 5x$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4})$ $\cos \cos \sin \sin$

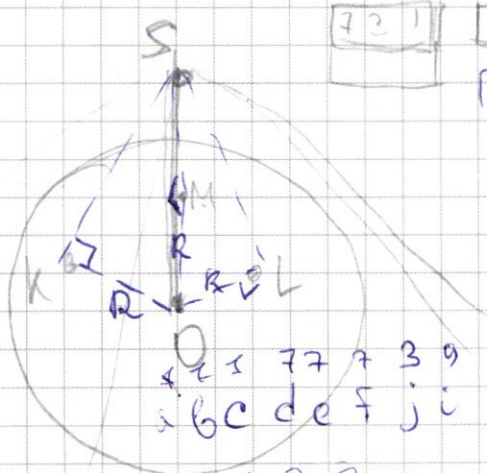
$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{1}{2} \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\sin x + \cos x = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

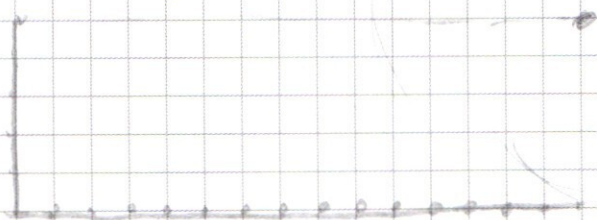
$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x + \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x$$
$$= 2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$



W-? $\overset{1}{a} \overset{1}{b} \overset{7}{c} \overset{7}{d} \overset{7}{e} \overset{3}{f} \overset{2}{g} \overset{3}{h} = 9261:$

Bar - m Kosten 3 men = 7 $(3^3 \cdot 7)$
~~g₁₀₀~~ g₈ - bis



$$\begin{array}{r} 8261 \overline{) 3} \\ 24 \overline{) 27} \quad 1029 \overline{) 3} \\ 21 \overline{) 1029} \quad 12 \overline{) 343} \end{array}$$



 $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

 $8!$

$$\begin{array}{l} x+y > -5 \\ y-x > -5 \\ \checkmark \quad x+y > y-x \\ x > -x \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations on a grid background:

Left side:

$$\begin{array}{r} 400 \\ 14^2 \cdot 2 \\ 800 \\ - 8 \end{array}$$

Top middle:

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 400 \\ 100 \\ 12 \end{array}$$

Top right:

$$\begin{array}{r} 410 \\ + 240 \\ 6 \end{array}$$

Below the above:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Below the above:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 24 \\ 120 \end{array}$$

Far right:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 32 \end{array}$$

Bottom right calculation:

$$\begin{array}{r} 600 + 120 = 720 \\ \times 7 \\ + 5040 \times 8 \\ 40320 \times 2 \\ 80640 \end{array}$$

