# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром $O$ вписана в трёхгранный угол с вершиной $S$ и касается его граней в точках $K$, $L$, $M$ (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол $KSO$ и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью $KLM$, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой $SO$, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF = BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

## Задача 1.

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Тогда для искомых восьмизначных чисел возможны два набора цифр: (1) 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1 (2) 7, 7, 7, 3, 9, 1, 1, 1 (пока что неупорядоченных). В каждом из двух случаев подсчёт кол-ва возможных чисел проведём следующим образом: кол-во упорядоченных расстановок 8! (одинаковые цифры "индивидуальны") разделим на произведение кол-в ~~расстановок~~ "перестановок" одинаковых цифр. Тогда $N_1 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$ ; $N_2 = \frac{8!}{3!3!} = \cancel{162}\,1120$. Итого: $N_1 + N_2 = 1680$ чисел.

Ответ: 1680.

## Задача 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 9x \cos 5x + \sin 9x \sin 5x) = 0$$

$$(\underbrace{\cos 9x - \cos 5x}_{a}) + (\underbrace{\sin 9x + \sin 5x}_{b}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (\cos 9x - \cos 5x)^2 + (\sin 9x + \sin 5x)^2 - 1\right) = 0$$

$$a + b - \frac{\sqrt{2}}{2}(b^2 - a^2) = 0 \quad \text{или} \quad (a+b)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right) = 0$$

Последнее ур-е равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} a+b=0 \quad (1) \\ a-b=-\sqrt{2} \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\cos 9x + \sin 9x - \cos 5x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 2x \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 7x = 0 \\ \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 7x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

(2) $(\sin 9x + \sin 5x) + (\cos 5x - \cos 9x) = \sqrt{2}$

$$\left(\sin(\pi - 9x) + \cos(\pi - 9x)\right) + (\sin 5x + \cos 5x) = \sqrt{2}. \quad (3)$$

Заметим, что максимальное значение $f(x) = \sin x + \cos x$ достигается при $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$, т. е. $\sin x = \cos x = \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

минимумы не подходят

Тогда рав-во (3) верно при $\begin{cases} \pi - 9x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, \ l \in \mathbb{Z} \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi r, \ r \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{9}, \ l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \ r \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Отсюда $\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{9} = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi r}{5}$

$15 + 40l = 9 + 72r$

$6 = 72r - 40l$

$\underset{\not\vdots 2}{3} = \underbrace{36r - 20l}_{\vdots 2}$ − противоречие.

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi k}{7}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

## Задача 3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$-2\ln x = (\ln y - 3\ln x)\log_x y$

$-2\ln x = (\ln y - 3\ln x) \cdot \frac{\ln y}{\ln x}$

$2\ln^2 x - 3\ln x \ln y + \ln^2 y = 0$

$y/x^7 > 0$; $x > 0$ поэтому $y > 0$ и $\ln y$ удовл-т ОДЗ.

логарифмируем по осн-ю $x > 0$

вариант $x = 1$ и соотв. $y = 1$ ~~будет рассмотрен также~~, подходит

$| : \ln^2 y \neq 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\ln x}{\ln y} = 1 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = y \ (3) \\ x^2 = y \ (4) \end{array}\right.$. Зн-е $y$ из (3) и (4) подставим в (2):

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{ll} x^2-x^2-2x^2+8x-4x=0 & (5) \\ x^4-x^3-2x^2+8x-4x^2=0 & (6) \end{array}\right.$$

(5) $x^2-4x+2=0$

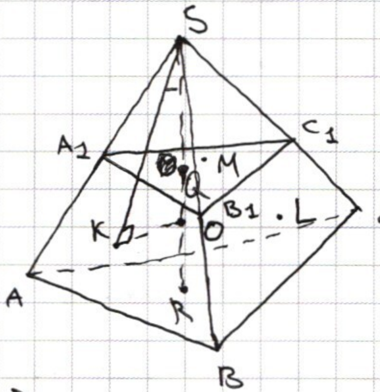
$$x=\frac{4\pm2\sqrt2}{2}=\left[\begin{array}{l}2+\sqrt2\\2-\sqrt2\end{array}\right. \qquad y=\left[\begin{array}{l}2+\sqrt2\\2-\sqrt2\end{array}\right.$$

(6) $x^3-x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x^2+x-4)=0$. Тогда $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\\x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2}<0\end{array}\right.$ – не подх. по ОДЗ. $\left[\begin{array}{l}y=4\\y=\frac{18-2\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$

<u>Ответ:</u> $(1;1)$; $(2+\sqrt2;2+\sqrt2)$; $(2-\sqrt2;2-\sqrt2)$; $(2;4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

## Задача 4.



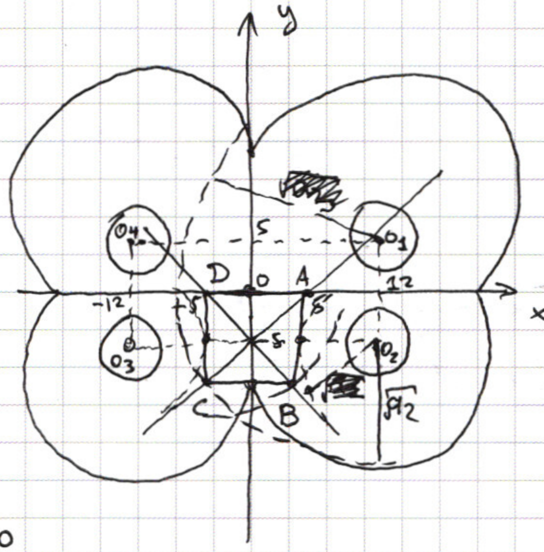

Рассм. фигуру, получившуюся между плоскостями, перп-ными $SO$: это усечённая пирамида (допустим $ABCA_1B_1C_1$), в которую вписана сфера радиуса $r$. (на рисунке сфера не показана для удобства).

Пусть $SO\cap(A_1B_1C_1)=Q$; $SO\cap(ABC)=R$. Тогда $QO=RO=r$ по условию. Для подобных пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ верно $\frac{SR}{SQ}=\frac{h+2r}{h}=\sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}}=4$. Тогда $\frac{2r}{h}=3$; $h=\frac{2}{3}r$.

Отсюда в $\Delta KSO$: $\angle SKO=90^\circ$ ($SK$ – кас-ная к сфере) и $\angle KSO=$ $=\arcsin\frac{KO}{SO}=\arcsin\frac{r}{h+r}=\arcsin\frac{3}{5}$. Сечение ~~угл~~ трехгранного угла плоскостью $KLM$ – треугольник, радиус впис. окр-ти которого

$R = KH = \frac{KS \cdot Ko}{OS} = \frac{4}{5}r$

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5}$.




Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (1) \\ (|x|-12)^2+(|y|-\cancel{7}5)^2=a & (2) \end{cases}$$

(1) при $y \geq -x-5$ и $y \geq x-5$ $y=0$

при $y \geq -x-5$ и $y < x-5$ $x=5$

при $y < -x-5$ и $y \geq x-5$ $x=-5$

при $y < -x-5$ и $y < x-5$ $y=-10$

получившаяся фигура – квадратик со стороной 10 и центром в $(0;-5)$ (см рис.).

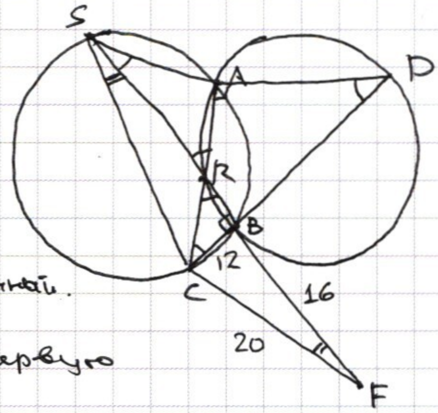
(2) при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ $(x-12)^2+(y-5)^2=a$ – окр-ть с ц. $(12;5)$ и рад. $\sqrt{a}$. Теперь симметрично отразим ~~эту окр-ть~~ этот участок от-но оси $Oy$, затем от-но оси $Ox$. Очевидно

Будем увеличивать радиус $\sqrt{a}$. При некотором $a_1$ окр-ти с ц. $O_2$ и $O_3$ коснутся квадрата (две общие точки), пока окр-ти с ц. $O_1$ и $O_4$ не будут иметь с ним общих точек (~~это не~~ т.к. $O_1A = \sqrt{49+25} > \rho(O_2; AB) = 7$).

Это зн-е $a_1 = \cancel{12-5=7}$ $r^2=(12-5)^2=49$. При дальнейшем увеличении $r$ до зн-я $\sqrt{a_2} = OO_2 = \sqrt{25+144}$ не включительно окр-ти с ц. $O_2$ и $O_3$ будут иметь с квадратом в сумме не менее 3 точек. ~~При дальнейшем увеличении a. Далее при $a > a_2$ окр-ти с ц. $O_2$ и $O_3$~~ При $a = a_2$ окр-ти с ц. $O_2$ и $O_3$ имеют общую точку с квадратом $(0;-10)$, но

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

## Задача 6.




а) Пусть $AC$ пересекает вторую окр-ть в т. $R$. ~~$\triangle CBR \sim \triangle CAD$ по двум углам, отсюда~~ $\angle CBR = \angle CAD = 90^\circ$, т. к. $RADB$ - вписанный. Отсюда $F \in BR$. Пусть $BR$ пересекает первую окр-ть вторично в т. $S$. Тогда $SC$ - диаметр, поскольку $SC$ опирается на $\angle CBS = 90^\circ$. Тогда $\angle SAC = 90^\circ$ и т. $S, A, D$ лежат на одной прямой. Окружности равны, поэтому равны дуги, отсекающиеся их общей хордой. Тогда $\angle ASB = \angle ADB$, как опир. на равные дуги. Отсюда $BD = BS$. Тогда по т. Пифагора $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{BC^2 + BS^2} = SC = 2R = 20$.

б) Заметим, что равнобедр. $\triangle SBD$ - прямоуг., значит $\angle ASB = \angle SDB = 45^\circ = \angle BRC = \angle RCB$; $AC = RC + AR = BC\sqrt{2} + \frac{(BS - BR)}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} + \frac{\sqrt{400-144} - 12}{\sqrt{2}} =$

$= 2\sqrt{2}$; $\sin\angle ACF = \sin(\angle ACB + \angle BCF) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\angle BCF + \sin\angle BCF \cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{12}{20} + \frac{16}{20}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$. Тогда $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin\angle ACF =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 28$.

Ответ: а) 20

б) 28.

все окружности имеют также один с ним точку (0; 0) – итого: 2 решения.

При дальнейшем увеличении $a$ ни одна из окружностей не будет иметь с квадратом общих точек (эти возможные точки пер-ния лежат с центром окр-ти в разных четвертях пл-ти). Искомые зн-я $a$: $a_1 = 49$ и $a_2 = 169$.

Ответ: 49; 169.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}(\cos 9x \cos 5x + \sin 9x \sin 5x) + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\left(\cancel{(\cos 9x - \cos 5x)^2}\right.$
$\left.(\cos 9x - \cos 5x)^2 + (\sin 9x + \sin 5x)^2 - 1\right) + \sin 5x + \sin 9x = 0$

$a^2 - b^2$

$a + \sqrt{2}(b^2 - a^2) + b = 0$

$\cancel{a + a^2\sqrt{2} + b}$
$\cancel{(a+b)}\ (a+b)(a-b) + 1 = 0$

$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10$

$x + y + 5 \geq 0 \qquad y - x + 5 \geq 0$

$y \geq -x - 5 \qquad y \geq x - 5$

$\cancel{x} + y + 5 + y \cancel{-x} + 5 = 10$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \\ \hline x^2 - 6x + 8 & \\ -\ x^2 - 2x & \\ \hline -4x + 8 & \end{array}$$

$y = 0$

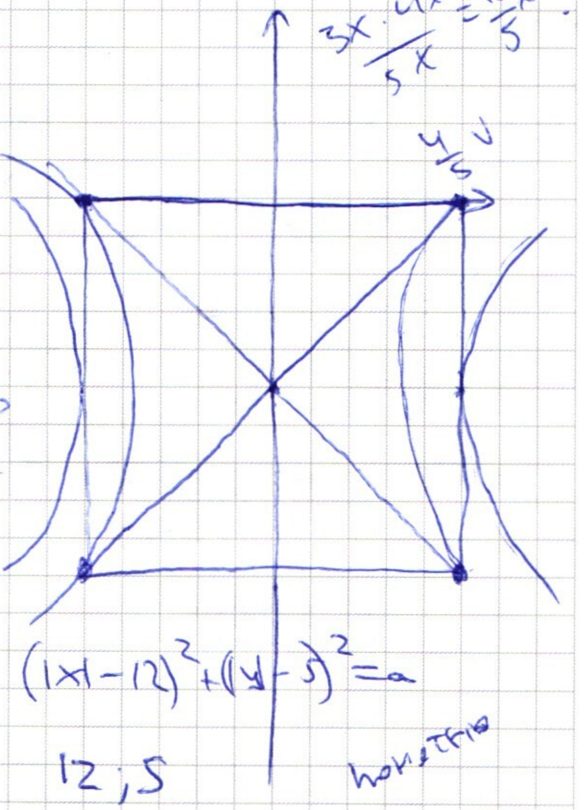
$\cancel{y} + x + 5 + x \cancel{- y} - 5 = 10$

$x = 5$

$1 + 16$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\frac{3x \cdot 4x}{5x} = \frac{12x}{5}$




$(|x| - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$

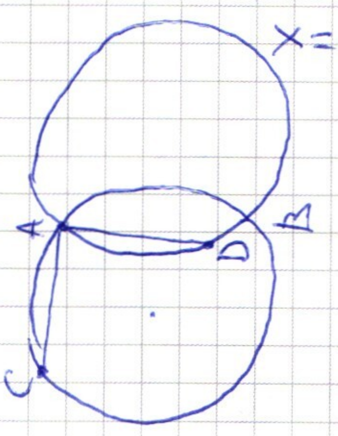
$12; 5$

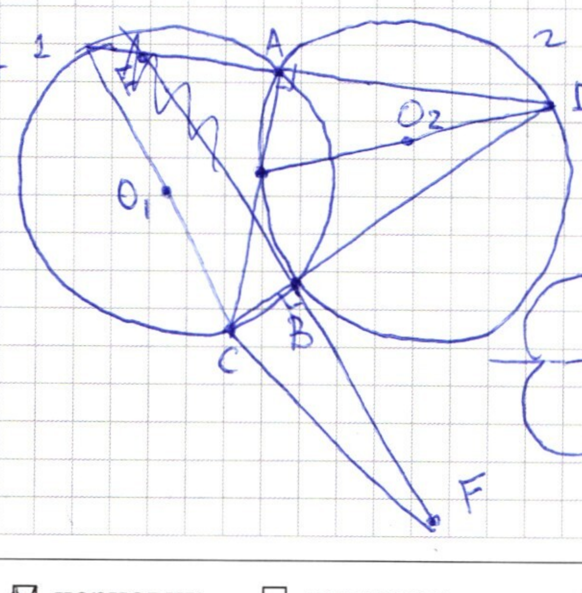
[illegible]

$r = 10$

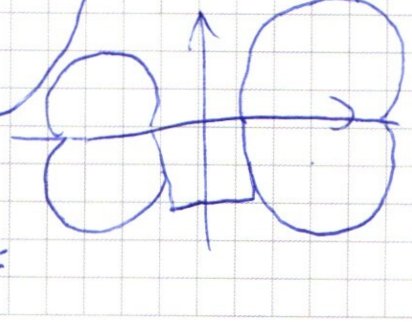
$BF = BD$

$CF = ?$



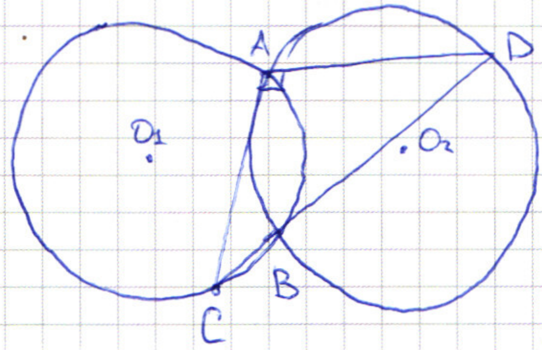



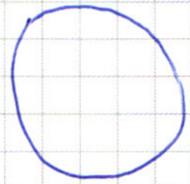

$\sqrt{BC^2 + BD^2}$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$36 \cdot 5$

$15+40k=9+72n$

$6=72n-40k$

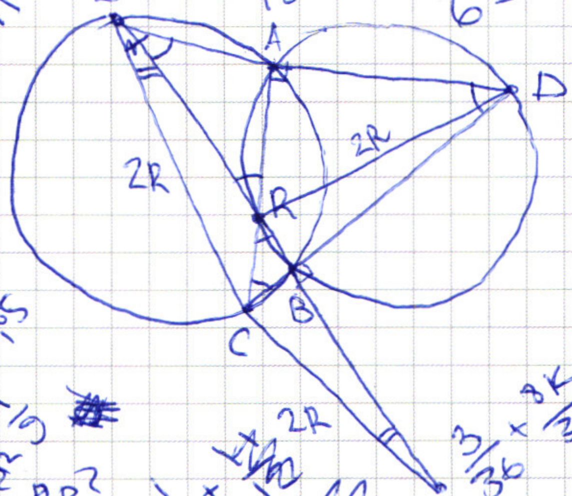
$3=36n-20k$

$BF=BD$

а) $CF=?$

б) если $BC=12$, то $S_{ACF}$

$\frac{1}{12}+\frac{2}{9}k=\frac{1}{20}+\frac{2}{5}n$




$k=9$

$BC^2+BD^2$

$RC^2-BR^2+RD^2-BR^2$

$= RC^2-BR^2+BD^2$

$\frac{1}{12}+\frac{k}{12}$

$\frac{3}{36}+\frac{8k}{36}$

$BC^2+BD^2$

$RC^2-BR^2$

$BS=BD$

$\sqrt{BC^2+BD^2}=\sqrt{BC^2+BS^2}=2R=10$

$AC=?\quad BC\sqrt{2}+BS$

$\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$

$\cos 2x-\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=0$

$2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-4x}{2}$

$\frac{\frac{\pi}{2}-4x}{2}=\frac{\pi}{4}-2x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}-2x=\pi n$

$x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}$

$\cos 9x-\cos 5x-\sin 9x-\sin 5x=-\sqrt{2}$

$\sin 9x+\sin 5x+\cos 5x-\cos 9x=\sqrt{2}$

$2\sin 7x\cos 2x+2\sin 2x\sin 7x=\sqrt{2}$

$2\sin\frac{\pi}{4}$

$2\sin 7x(\cos 2x+\sin 2x)=\sin\frac{\pi}{4}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

комбинат.

$7\ 7\ 7\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1$

9261   9   $3^3 \cdot 7^3$    $7\ 7\ 7\ 3\ 9\ 1\ 1\ 1$

1029

343   3    $\frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{3!3!}$ ясно.

1   $7^3$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 2x \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{2\sin 7x(\cos 2x - \sin 7x) = \sqrt{2}\cos 4x}$

$2\ln x = \ln y$    $2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$\log_y x \quad \log_x y = 2$    $\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x$

$x^2$    $\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) = \cos 4x$

$\sqrt{2}\sin(8x - x) = \sqrt{2}(\sin 8x\cos x - \sin x\cos 8x)$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 560$

$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$x = \frac{3\pm 1}{4}$    $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)\cdot \sin 7x = \cos 4x$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$    $2\sin(\frac{\pi}{4} - 8x)\cdot \sin 7x = \cos 4x$

$D = 9 - 8 = 1$

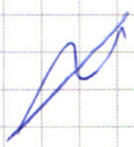
$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

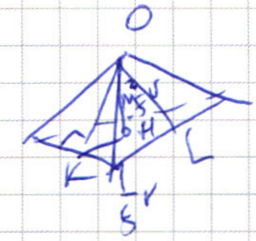
$\longrightarrow x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-7\ln x}$

$y(y-4) - 2x(x-4) - xy = 0$

$-2\ln x = \frac{\ln y}{\ln x}(\ln y - 3\ln x)$   $-2\ln x = (\ln y - 3\ln x)\log_x y$   $x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

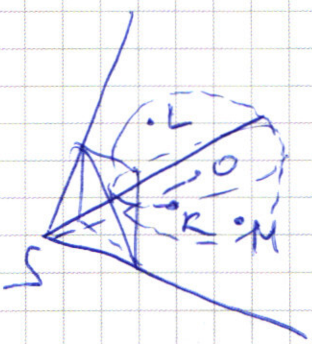


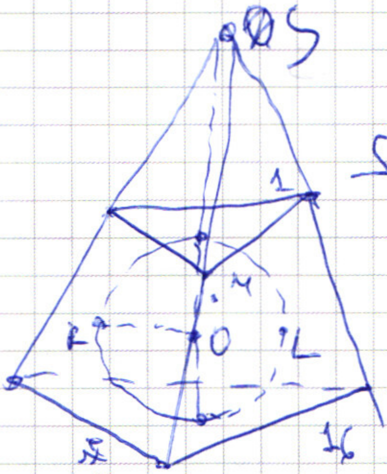


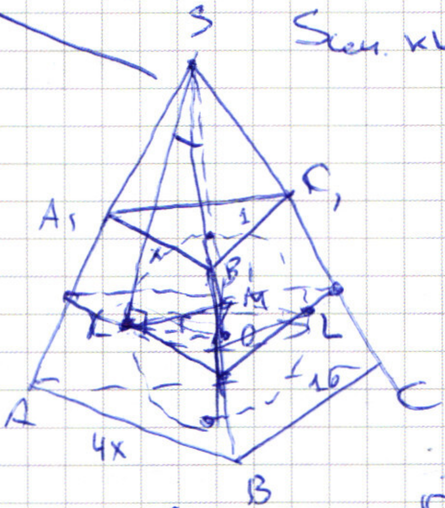
плоскос

$\angle KSO$

$S_{сеч.\ KLM}$ P








$$\frac{h+2r}{h}=4$$

$$1+\frac{2r}{h}=4$$

$$\frac{2r}{h}=3$$

$$h=\frac{2}{3}r$$

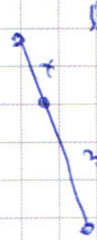
$$\frac{r}{h+r}=\frac{r}{\frac{5}{3}r}=\frac{3}{5}$$

$-2\sin 2x\sin 7x+2\sin 7x\cos 2x$

$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 3x+\cos 5x$


x 3

$S=$




$$3x=\frac{a\sqrt3}{2}\quad \frac{2}{3\sqrt3}$$

$a=3\sqrt3\,x$

$$S=\frac{a^2\sqrt3}{4}=\frac{x^2\cdot27\sqrt3}{4}=\frac{r^2\cdot3\sqrt3}{4}$$

$\cos 9x-\cos 5x-\sqrt2\cos 4x+\sin 9x+\sin 5x=0$

$-2\sin 2x\sin 7x+2\sin 7x\cos 2x-\sqrt2\cos 4x=0$

$\cancel{\sqrt2\sin 7x(\cos 2x-\sin 2x)=\sqrt2\cos 4x}$ $\cos 9x(1+\cos 5x)+\sin 9x$

$-\sin 2x\sin 7x+\sin 7x\cos 2x-\sin\frac{\pi}{4}\cos 4x=0$

$\frac{1}{2}(\cancel{\cos\ \sin(4x+\frac{\pi}{4})+\sin(4x-\frac{\pi}{4})})$ $(a+b)(1+\frac{\sqrt2}{2}(a-b)$

$\cos 4x \ne \cos(9x-5x)=\cos 9x\cos 5x+\sin 9x\sin 5x$

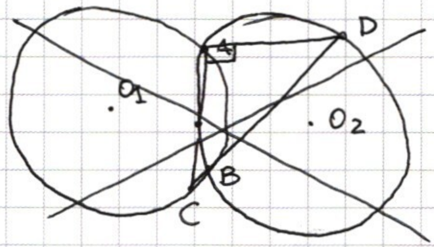
$\cancel{a-b+c+d-\sqrt2(ab+cd)=0}$ $\cos 9x$ $a-b+$

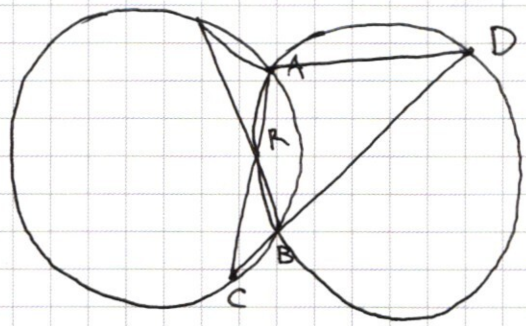
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.




$\sqrt{256} = 16$

$\frac{4}{\sqrt{2}}$ $\frac{4\sqrt{2}}{2}$