

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

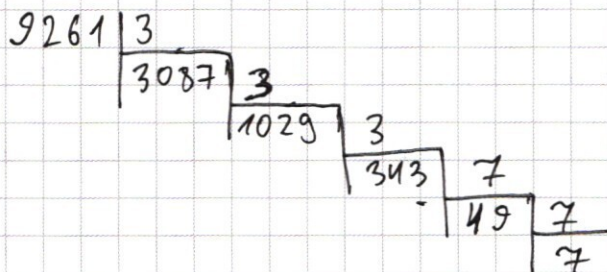
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1



$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Два случая есть, т.к. две ирайки могут объединяться в 9. Нулев быть не может, т.к. иначе произведение обратится в 0.

1 аугран) $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 9261$

$$N_1 = C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$N_1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 = 560$$

2 арифмет.) $\frac{1}{2}$ 9.3.7.7.7.11.1 = 9261

$$N_2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20$$

$$N_2 = 1120$$

$$N_{\text{oxy}} = N_1 + N_2 = 560 + 1120$$

Ans: $N_{\text{day}} = 1680$.

$\sqrt{2}$.

$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 4\pi + \sin 9\pi + \sin 5\pi = 0$$

$$\cancel{-2 \sin 7\pi \sin 4\pi} - \sqrt{2} (\cancel{\cos^2 2\pi} - \cancel{\sin^2 2\pi}) + 2 \sin 7\pi \cos 4\pi = 0$$

$$-2 \sin 7\pi \sin 2\pi - \sqrt{2} (\cos^2 2\pi - \sin^2 2\pi) + 2 \sin 7\pi \cos 2\pi = 0$$

$$2 \sin 7\pi (\cos 2\pi - \sin 2\pi) - \sqrt{2} (\cos 2\pi - \sin 2\pi) (\cos 2\pi + \sin 2\pi) = 0$$

$$(\cos 2\pi - \sin 2\pi) (2 \sin 7\pi - \sqrt{2} \cos 2\pi - \sqrt{2} \sin 2\pi) = 0$$

$$\cos 2\pi - \sin 2\pi = 0$$

или

$$\sqrt{2} \sin 7\pi = \cos 2\pi + \sin 2\pi$$

$$\cos 2\pi = \sin 2\pi$$

$$\cancel{\sqrt{2} \sin 7\pi} = \sqrt{2} \sin(2\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\sin 7\pi = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$n = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi n}{2}$$

$$7\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$7\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \pi = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi m \\ \pi = \frac{8\pi}{4 \cdot 20} + \frac{2}{9} \pi m \end{cases}$$

Ответ: $\pi = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi n}{2}$; $\pi = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi m$;
 $\pi = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m$ при $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y_1 = \frac{x+4 - (3x-4)}{2} = 4-x$$

$$y_2 = \frac{x+4 + (3x-4)}{2} = 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $y = (4-x)$:

$$(x^2 (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)}$$

$$-\ln x (\ln x^2 + \ln (4-x)^4) = (\ln(4-x) - \ln x^2) \cdot \ln(4-x)$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 2\ln x \cdot \ln(4-x)$$

$$\ln^2(4-x) - 3\ln x \cdot \ln(4-x) + 2\ln^2 x = 0$$

$$\begin{aligned} \ln x &= a \\ \ln(4-x) &= b \end{aligned}$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$b = \frac{3a - a}{2} = a$$

$$b = \frac{3a + a}{2} = 2a$$

$$\ln x = \ln(4-x)$$

$$x = 4-x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$\ln(4-x) = 2\ln x$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не угод. значение}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; y = \frac{4 - \sqrt{17}}{2}$$

$$② \quad y=2x: \\ (16x^2 \cdot x^4) - \ln x = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$- \ln x \cdot \ln(16x^6) = (\ln(2x) - \ln x^2) \ln 2x$$

$$- \ln x \cdot 4 \ln 2 - 6 \ln^2 x = (\ln 2 + \ln x - 2 \ln x) (\ln 2 + \ln x)$$

$$- 6 \ln^2 x - 4 \ln 2 \ln x = (\ln 2 - \ln x) (\ln 2 + \ln x)$$

$$\ln x = a \quad \ln 2 = b$$

$$- 6a^2 - 4ab = b^2 - 2ab - 6a^2$$

$$b^2 - ab = 0$$

$$b(b-a) = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$\ln x = \ln 2$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$y = 4$$

Ответ:

$$x = 1 \quad y = 2$$

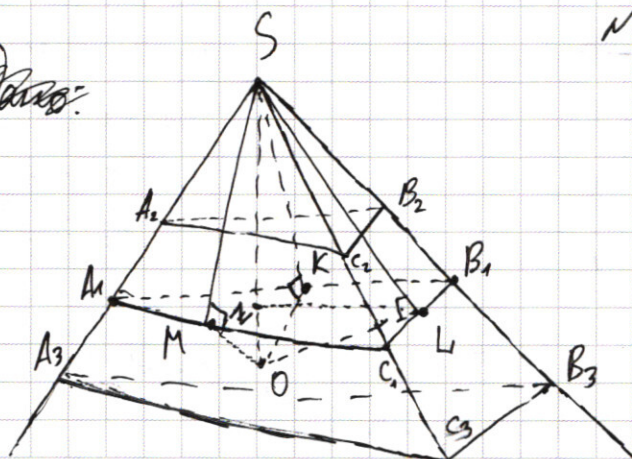
$$x = 2 \quad y = 4$$

$$x = 2 \quad y = 2$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad y = \frac{2-\sqrt{17}}{2}$$

✓ 4.

Реш:



$$R_{\text{вн. сферы}} = \frac{3V}{S_{\text{поверх}}}$$

$$V_{A_2B_2C_2A_3B_3C_3} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_2B_2C_2} \cdot H \\ = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1B_1C_1} \cdot (H-2R) \\ V_{A_3B_3C_3S} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle A_3 B_3 C_3 \text{ (м.к. м.к. м.к. по II-му)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по II-му } B_2 C_2 \parallel B_3 C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle S C_2 B_2 \sim \triangle S C_3 B_3 \text{ (по двум углам)}$$

$$\text{Аналогично для } \triangle S A_2 B_2 \sim \triangle S A_3 B_3 \quad \left| \Rightarrow \right.$$

$$\triangle S A_2 C_2 \sim \triangle S A_3 C_3$$

$$\Rightarrow \text{по трём пропорц. сторонам.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_2 C_2}{A_3 C_3} = \sqrt{\frac{S_{A_2 B_2 C_2}}{S_{A_3 B_3 C_3}}} = \frac{1}{4} = k \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{4} H$$

h - высота $A_2 B_2 C_2$

H - высота $A_3 B_3 C_3$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} H = 2R \quad \text{I.4}$$

$$3H = 8R$$

$$H = \frac{8}{3} R.$$

~~$$V_{\text{выс. пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{8}{3} R \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(\frac{8}{3} R - 2R \right) =$$~~

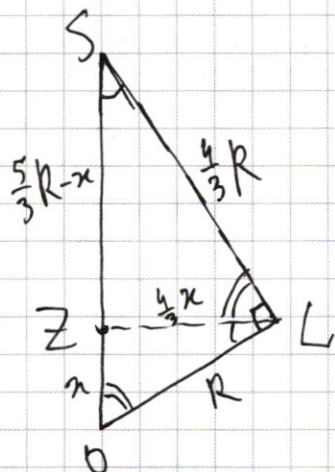
~~$$= \frac{128}{9} R$$~~

$$V_{\text{выс.}} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{8}{3} R = \frac{128}{9} R$$

$$SO = \frac{8}{3}R - R = \frac{5}{3}R \quad \left| \Rightarrow \right. \sin \angle KSO = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

$$OK = R$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$



$$SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = \sqrt{\frac{25}{9}R^2 - R^2} = \frac{4}{3}R$$

$$\frac{\frac{4}{3}R}{R} = \frac{ZL}{OZ} = \frac{SZ}{LZ}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{ZL}{OZ} = \frac{SZ}{ZL}$$

$$\frac{25}{9}R^2 - \frac{10}{3}Rn + n^2 + \frac{16}{9}n^2 = \frac{16}{9}R^2 \quad ZL = \frac{4}{3}n$$

$$\frac{25}{9}R^2 - 30Rn + 9n^2 + 16n^2 = 16R^2$$

$$25n^2 - 30Rn + 9R^2 = 0$$

$$(5n - 3R)^2 = 0$$

$$n = \frac{3R}{5}$$

$$SZ = \frac{5}{3}R - \frac{3}{5}R = \frac{25-9}{15}R = \frac{16}{15}R$$

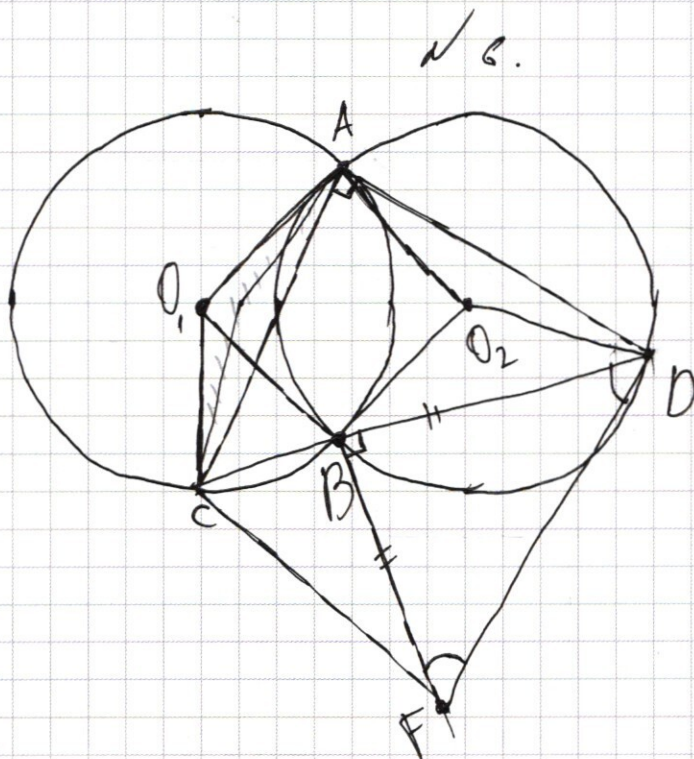
$$h = \frac{2}{3}R$$

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle A_1 B_1 C_1 \quad k = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{16}{15}R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = 16 \cdot 1 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $S_{A_1B_1C_1} = \frac{64}{25}$; $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$.

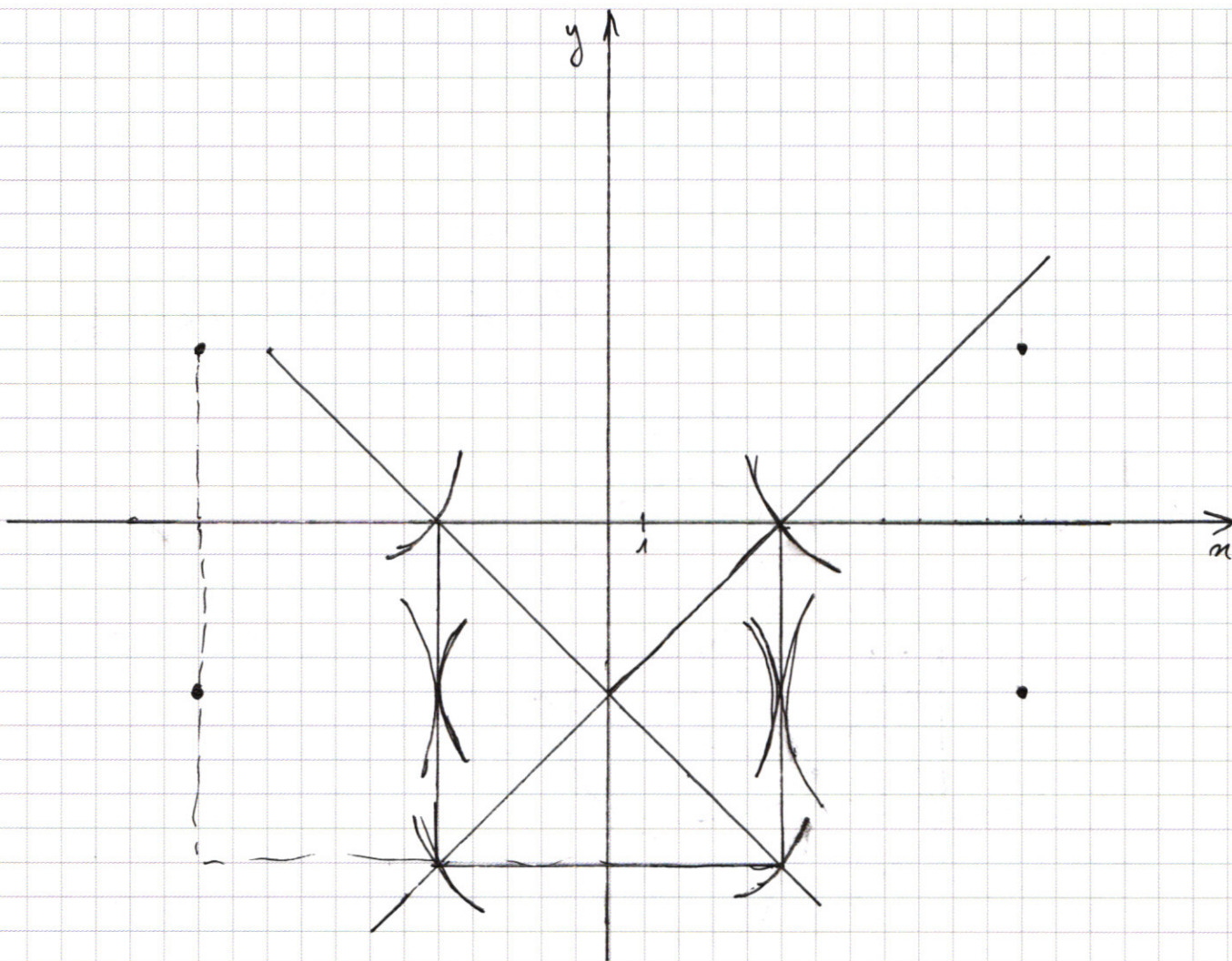


$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

4) $x+y+5 < 0$ $y-x+5 < 0$ 1) $x+y+5 > 0$ $y-x+5 > 0$
 $-x-y-5+y-x-5=0$ $x+y+5+y-x+5=10$
 $y=0$

3) $x+y+5 < 0$ $y-x+5 > 0$ 2) $x+y+5 > 0$ $y-x+5 < 0$
 $-x-y-5+y-x+5=10$ $x+y+5-y-x+5=10$
 $x=-5$ $x=5$



Подумать только случаи единичного касания.

$$a = 49$$

$$a = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$$

$$a = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{225 + 289} = \sqrt{514}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \quad 289 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

Ответ: $a = 49$; $a = \sqrt{74}$; $a = \sqrt{514}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.3.2

$2^x + 3 \cdot 2^{3x} < 19 \cdot 2^2 + 2^{(2^2-1)x}$
 $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{3x} < 19 \cdot 2 + 2^{2 \cdot x - x}$
 $(0; +\infty)$

$8 \ln^2 x - 7 \ln x + \ln y = 0$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$(x^2 y) - \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right)$

$-2.4 \ln x \ln |x| \cdot \ln y = \ln y \cdot (\ln y - \ln x^2)$

$-8 \ln^2 x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y$

$-8 \ln^2 x$

$\angle BFD = 45^\circ$

$(b - 6a)(b + a)$

$b^2 - 6ab + ab - 6a^2$

$4 - \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right) =$

$= \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2}$

$\ln_2 2 = 1$

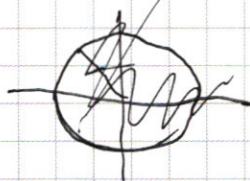
$\ln_2 4 = 2$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 4x = 0$$

~~$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) \sin 7x - \cos 4x = 0$$~~



~~$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$~~

$$\sqrt{2} \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$$

~~$$\cos 2x (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x) - \sin 2x (\sqrt{2} \sin 7x - \sin 2x) = 0$$~~

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

$$\begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m \\ \text{или } 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m$$

$$x = \frac{3\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi m$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д/1.

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ -9 & \\ \hline 026 & 3087 \\ -24 & \\ \hline 2 & 1029 \\ -5 & \\ \hline 008 & 3 \\ -6 & \\ \hline 27 & 343 \\ -12 & 28 \\ -12 & 49 \\ \hline 08 & 7 \end{array}$$

(3 3 3) (7 7 7) (1 1)

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 99 \\ \hline 126 \\ + 208 \\ \hline 334 \\ + 132 \\ \hline 466 \\ + 7 \\ \hline 473 \end{array}$$



$$\frac{3\sqrt{1}}{n} - \frac{\pi}{n} = \frac{3\sqrt{1}}{n}$$

333

C

$$\cos 2n = \sin 2n$$

$$\log n = -1$$

$$\arctg -1 = ? \quad n = \frac{3\sqrt{1}}{24}$$

1 случай:

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$\cdot 2$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

2 случай:

$$9 \quad 3 \quad 777 \quad 111$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$\cdot C_2^1$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 = 1120$$

$$N_{\text{общ}} = 1120 + 560 = 1680$$

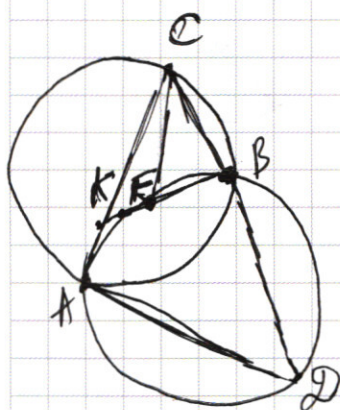
$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{3x} \leq 76 + 2 \cdot 2^{32} x$$



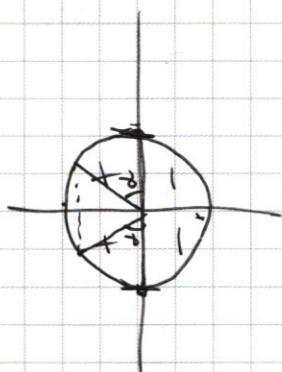
$$2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$



$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^7 + 4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^3}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x + 4y = 0$$

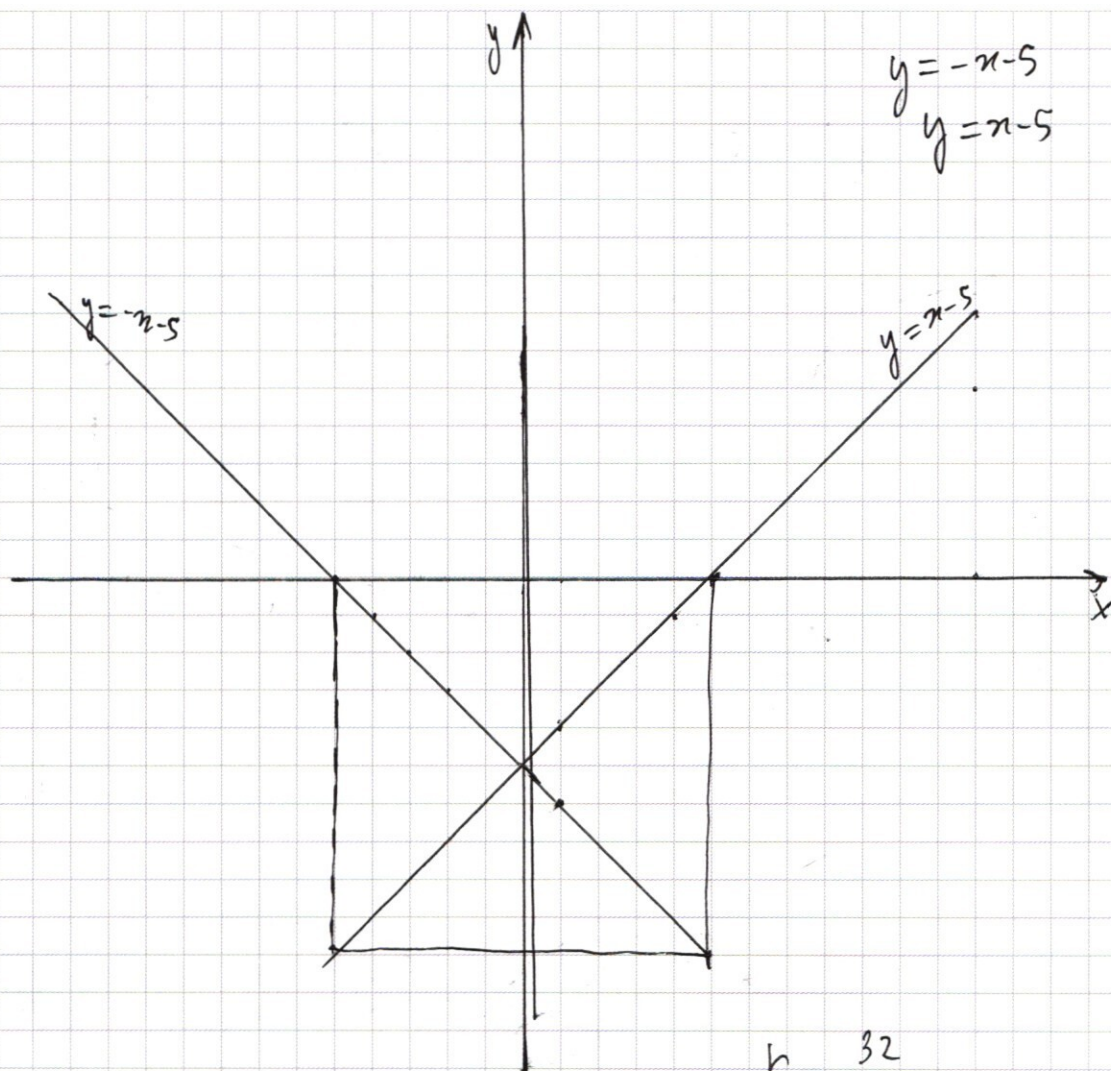
$$x = \ln$$

$$|x+y| + |y-x| = 0$$

$$\begin{aligned} x+y+y-x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-y+x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$r = \frac{32}{a+b+c}$$

$$25 + 49 = 74$$

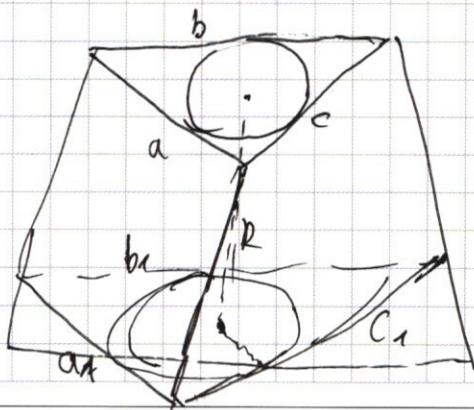
$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

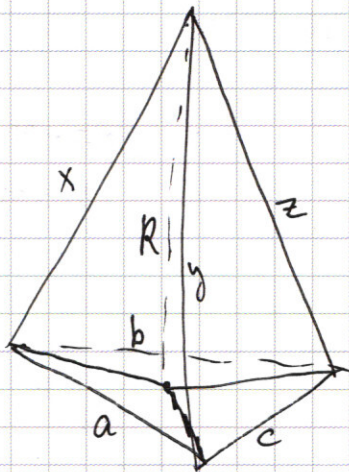
$$\frac{1}{3} (S_8 - S_m) h_8$$

$$\frac{1}{3} S_8 h_8 - S_m h_m$$

$$\frac{1}{3} S_8 \cdot h_8 - S_m \cdot \frac{1}{4} h_8$$

$$\frac{1}{3} h_8 (16)$$





$$n^2 - R^2$$

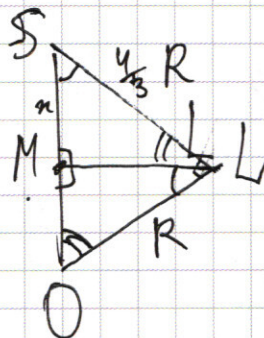
$$r = \frac{2S}{p}$$

$$r = \frac{2 \cdot 16}{a+b+c}$$

$$\sqrt{R^2 + \frac{32^2}{(a+b+c)^2}}$$

$$SO =$$

$$\sqrt{SO^2 - OL^2} = \sqrt{\frac{25}{9}R^2 - R^2} = \frac{4}{3}R$$



$$\frac{4}{3}R$$

$$\frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$$