

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\ln(x)} &= y^{\ln(\frac{y}{x^3})} \quad N3. \\ y^2 - xy - 2x^2 + 6x - 4y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

$$x > 0; y > 0.$$

$$(1) \ln(x^2 y^4)^{-\ln(x)} = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^3})})$$

$$-\ln(x) \ln(x^2 y^4) = \ln(y) \cdot \ln(\frac{y}{x^3})$$

$$-\ln(x) (2\ln(x) + 4\ln(y)) = \ln(y) (\ln(y) - 3\ln(x))$$

$$-2\ln^2(x) - 4\ln(y) \cdot \ln(x) = \ln^2(y) - 3\ln(x) \cdot \ln(y)$$

$$\ln^2(y) + 2\ln^2(x) - 3\ln(x) \cdot \ln(y) = 0$$

$$\text{Замена: } \ln(y) = a; \ln(x) = b;$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 4 \cdot 2b = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b+b}{2} = 2b; \quad \ln(y) = 2\ln(x); \quad y = x^2$$

$$a_2 = \frac{3b-b}{2} = b; \quad \ln(y) = \ln(x); \quad y = x$$

$$(II) y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 6x = 0$$

$$D = x^2 + 6x + 16 - 4(-2x^2 + 6x) = x^2 + 6x + 16 + 8x^2 - 24x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_1 = \frac{x+4-3x+4}{2} = 2x$$

$$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = 4-x$$

$$1.1) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$2x = x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 - \text{не подходит}$$

$$x_1 = 2$$

$$y_1 = 4$$

$$1.2) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{не подходит}$$

$$2.1) \begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$x = 2x$$

$$x = 0 - \text{не подходит}$$

$$2.2) \begin{cases} y = x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$x = 4-x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2; y = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2, y_1 = 4; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}; x_3 = 2, y_3 = 2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

3261

$$3261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

n_1 - кол-во в I случае

n_2 - кол-во во II случае.

Существует 2 варианта набора чисел:

1) 3, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 1

$$n_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{40320}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{40320}{72} = 560$$

$$= \frac{10 \cdot 8 \cdot 8}{1} = 560$$

2) 3, 3, 1, 4, 4, 4, 1, 1

$$n_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{40320}{6 \cdot 6} = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$n = n_1 + n_2 = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: $n = 1680$.

$$\begin{array}{r} 3261 \overline{) 9} \\ 1029 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 18 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 343 \end{array}$$

N5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-8)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

1) Иссл.:
 $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} -5 \leq x \leq 5 \\ y=0 \end{matrix}}$$

2) Иссл.: $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$x=5 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 10 \\ y < 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} -10 \leq y < 0 \\ x=5 \end{matrix}}$$

3) Иссл.: $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

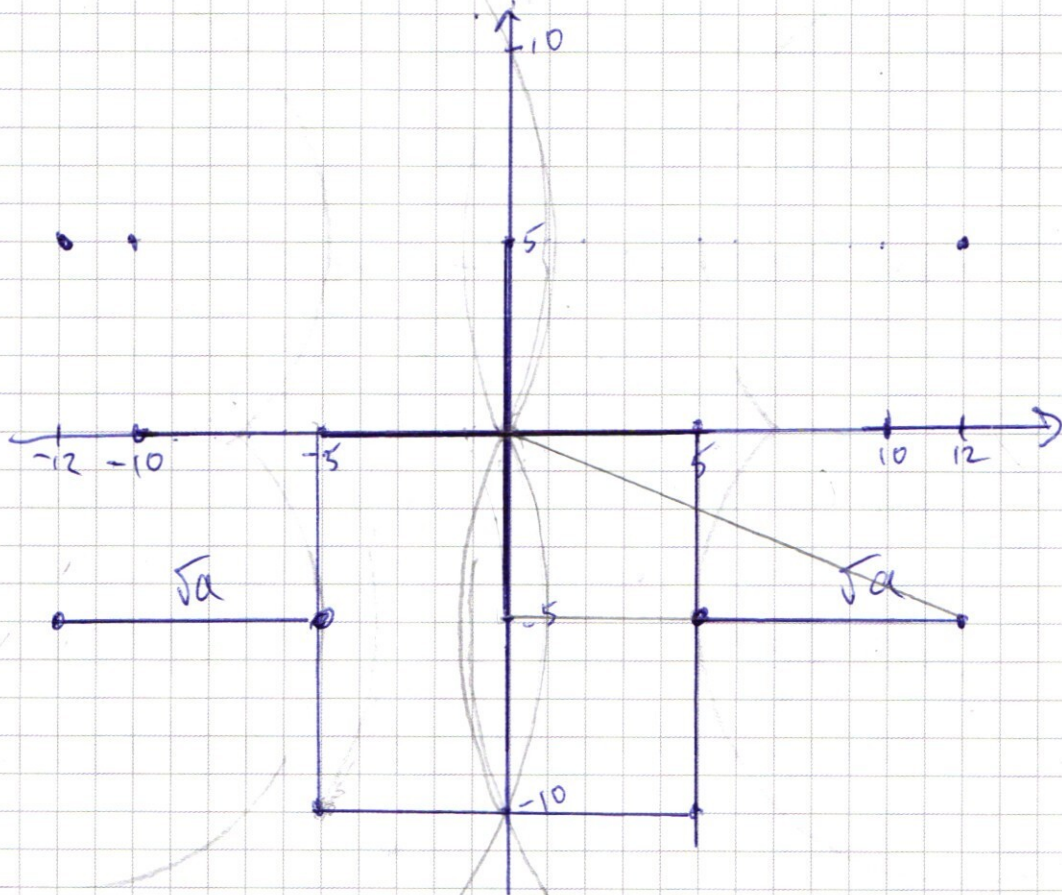
$$\begin{matrix} -2x=10 \\ x=-5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y < 0 \\ y \geq -10 \end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -10 \leq y < 0 \\ x=-5 \end{matrix}}$$

4) Иссл.: $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$

$$x+y+5+y-x+5=-10$$

$$\begin{matrix} 2y=-20 \\ y=-10 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -5 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} -5 < x < 5 \\ y=-10 \end{matrix}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) $G_a = 49$

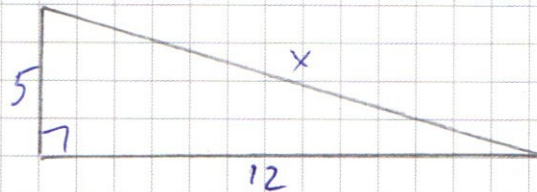
$a = 49$

окружности касаются квадрата в точках $(-5; -5)$ и $(5; -5)$

2) окружности касаются квадрата в точках $(0; 0)$ и $(0; -10)$

$G_a = r = 13$

$a = 169$



$x = 13 = r$

Ответ: $a = 49$; $a = 169$.

N2.

$$\cos(3x) - \cos(5x) - \sqrt{2} \cos(4x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) - \cos(5x) &= -2 \sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right) \sin\left(\frac{3x-5x}{2}\right) = \\ &= -2 \sin(4x) \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\sin(3x) + \sin(5x) = 2 \sin(4x) \cos(2x)$$

$$-2 \sin(4x) (\cos(2x) - \sin(2x)) - \sqrt{2} \cos(4x) = 0$$

$$2 \sin(4x) (\cos(2x) - \sin(2x)) - \sqrt{2} (\cos(2x) - \sin^2(2x)) = 0$$

$$(\cos(2x) - \sin(2x)) (2 \sin(4x) - \sqrt{2} \cos(2x) - \sqrt{2} \sin(2x)) = 0$$

$$1) \cos(2x) = \sin(2x)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n - \text{целое}$$

$$2) \sqrt{2} \cos(2x) + \sqrt{2} \sin(2x) = 2 \sin(4x)$$

$$\sqrt{2} (\cos(2x) + \sin(2x)) = 2 \sin(4x)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \right) = 2 \sin(4x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x) = \sin(4x)$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(4x)$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(4x) = 0$$

$$+ 2 \sin\left(\frac{-5x + \frac{\pi}{8}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{-5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{-5x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$-5x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; k - \text{целое}$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi m$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9}$$

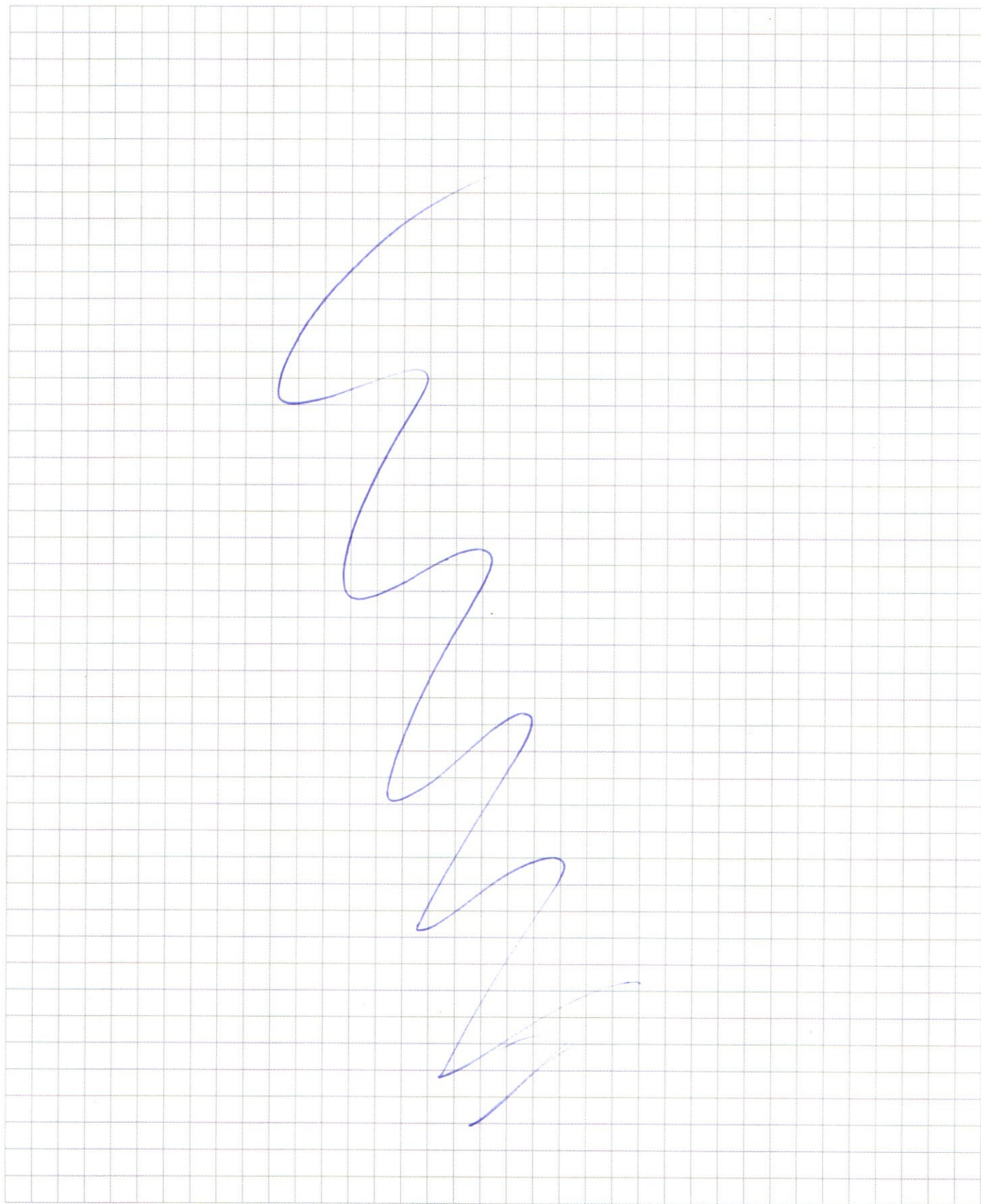
Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n, k, m - \text{целые}$
 $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$
 $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☒ черновик

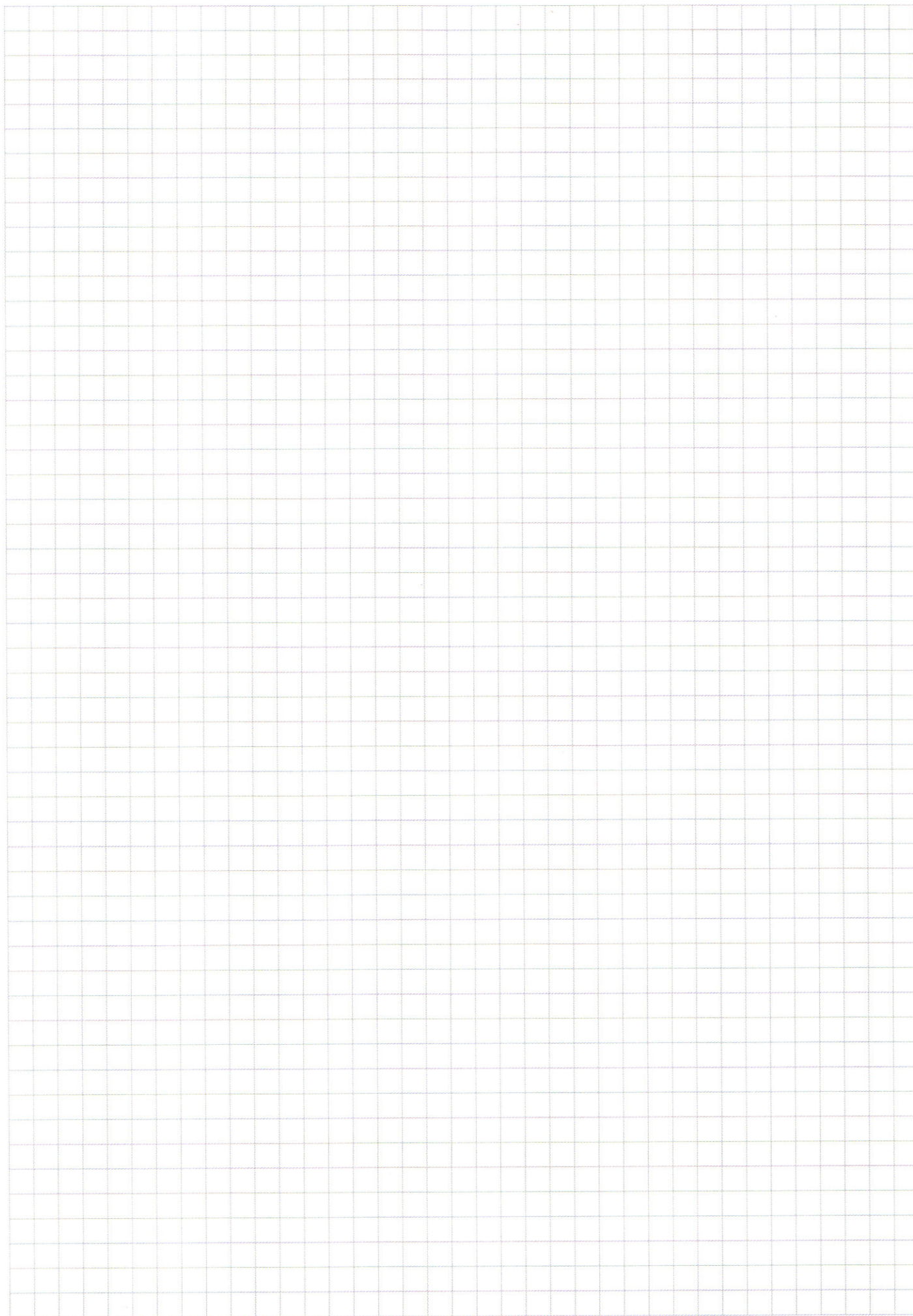


☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(3x) - \cos(5x) - \sqrt{2} \cos(4x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$$

$$\sin(3x) + \cos(3x) + \sin(5x) - \cos(5x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(5x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(5x) \right) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) \right) + \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(5x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(5x) \right) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(4x)$$

$$2 \cos(4x) \cos$$

$$\begin{aligned} \cos(2) + \cos(3) &= \\ 2 \cos\left(\frac{2+3}{2}\right) \cos\left(\frac{2-3}{2}\right) &= \\ \cos(2) + \cos(3) &= \\ -2 \sin\left(\frac{2+3}{2}\right) \sin\left(\frac{2-3}{2}\right) &= \end{aligned}$$

$$\cos(3x) - \cos(5x) - \sqrt{2} \cos(4x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$$

$$\cos(3x) + \sin(3x) + \sin(5x) - \cos(5x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x) \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(5x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(5x) \right) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(5x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(5x) = \cos(4x)$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(4x)$$

$$-2 \sin\left(\frac{14x}{2}\right) \sin\left(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(4x)$$

$$+ 2 \sin(4x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4x}{2}\right) = \cos(4x)$$

$$2 \sin(4x) \cos(2x) = \cos(4x)$$

$$\begin{aligned} 2 \sin(4x) \cos(2x) &= 2 \cos^2(2x) - 1 \\ 2 \cos(2x) \sin(4x) &= \cos(2x) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2+B) &= \sin(2) \cos(B) + \cos(2) \sin(B) \\ \sin(2-B) &= \sin(2) \cos(B) - \cos(2) \sin(B) \end{aligned}$$

$$\sin(2+B) + \sin(2-B) = 2 \sin(2) \cos(B)$$

$$\sin(3x) + \sin(5x) = \cos(4x)$$

$$\sin(2) \cos(B) = \frac{1}{2} (\sin(2+B) + \sin(2-B))$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln(x)} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$4 \pm \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} = 8$$

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln(x)} = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^2})})$$

$$-\ln(x) \ln(x^2 y^4) = \ln(y) \ln(\frac{y}{x^2})$$

$$-\ln(x) \cdot \ln(x^2) - \ln(x) \ln(y^4) = \ln(y) \cdot \ln(y) - \ln(y) \cdot \ln(x^2)$$

$$-2 \ln^2(x) - 4 \ln(x) \ln(y) = \ln^2(y) - 2 \ln(y) \ln(x)$$

$$\ln^2(y) + 2 \ln^2(x) - 3 \ln(y) \ln(x) = 0$$

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln(x)} = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^2})})$$

$$-\ln(x) \ln(x^2 y^4) = \ln(y) \cdot \ln(\frac{y}{x^2})$$

$$-\ln(x) (2 \ln(x) + 4 \ln(y)) = \ln(y) (\ln(y) - 2 \ln(x))$$

$$-2 \ln^2(x) + 4 \ln(y) \cdot \ln(x) = \ln^2(y) - 2 \ln(x) \cdot \ln(y)$$

$$\ln^2(y) + 2 \ln^2(x) - 3 \ln(x) \cdot \ln(y) = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 4(-2x^2 + 8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 =$$

$$9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y_1 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$$

$$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = 4-x$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ 124 \\ \hline 86 \\ 86 \\ \hline 88 \\ 88 \\ \hline 546 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} a=2b & \quad \ln(y) = 2\ln(x) \\ a=b & \quad \ln(y) = \ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x \\ y_2 = 4-x \end{cases}$$

1.1) ~~$a \neq 2b$~~ ; $\begin{cases} \ln(y) = 2\ln(x) \\ y_1 = 2x \end{cases}$

1.2) $\begin{cases} \ln(y) = 2\ln(x) \\ y_2 = 4-x \end{cases}$

$$\ln(2x) = \ln(x^2)$$

$$\ln(4-x) = \ln(x^2)$$

$$2x = x^2$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + \cancel{4} = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = 0 - \text{не доп.}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y = 4 + \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{не доп.}$$

2.1) $\begin{cases} \ln(y) = \ln(x) \\ y = 2x \end{cases}$

2.2) $\begin{cases} \ln(y) = \ln(x) \\ y = \cancel{4-x} \\ y = \cancel{2x} \end{cases}$

$$y = x$$

$$4 = 2x$$

$$y = 2x$$

$$x = 2$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \quad \text{— не доп.}$$

$$y = 2$$

9261

$$S = 9 + 2 + 6 + 1 = 18$$

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{cases} \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{1} & \underline{1} \\ 9 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{cases}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 20$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-1)^4}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-1)^4}$$

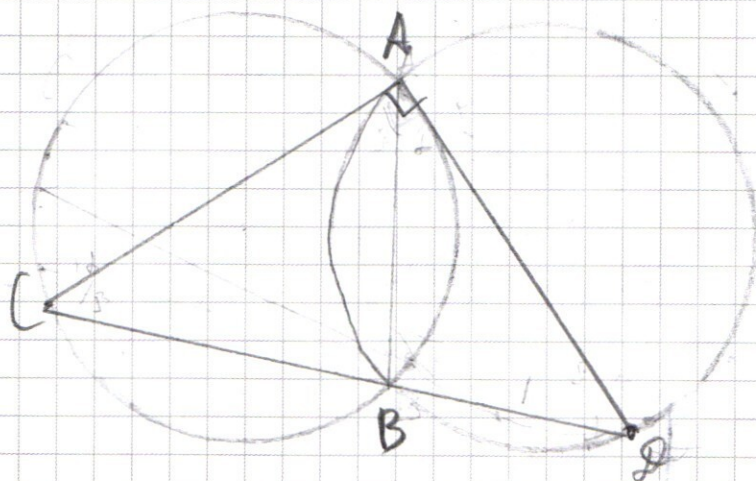
$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 026 \\ 18 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 09 \\ 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 8} \\ 28 \\ \hline 63 \\ 63 \\ \hline 03 \\ 32 \\ \hline 03 \\ 32 \\ \hline 01 \\ 08 \\ \hline 09261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



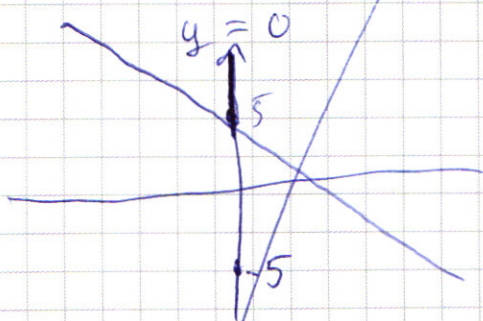
~~№ 15~~

~~$$\begin{cases} y \geq 2x + 3 \\ y \leq 6 + 2x \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x-12|)^2 + (|y-5|)^2 = 0 \end{cases}$$

1) ~~$x+y+5 \geq 0$~~ ; тогда: ~~$x+y+5 \geq 0$~~ $\left| \begin{array}{l} y \geq -x-5 \\ y \geq -x+5 \end{array} \right.$

~~$x+y+5 + y-x+5 = 10$~~



12

$$169 + 25 = 194$$

2) $x+y+5 \geq 0$
 $y-x+5 \leq 0$