

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

✗ [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

✗ [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.

✗ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✗ [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 77 = 3^3 \cdot 7^3.$$

Представим число

9261 в виде произведения цифр (чисел, кото-  
рые не превосходят ~~10~~ 9).

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 77 \text{ или } 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

остальные варианты невозможны

$3 \cdot 3 \cdot 3 > 9$   $3 \cdot 7 > 9$   $7 \cdot 7 > 9$ , теперь нам надо  
найти восьмизначные числа в которых.

1) 3 тройки, 3 семерки и 2 ед.

$$\frac{C_8^6 \cdot 6!}{2 \cdot 3!} = \frac{C_8^2 \cdot 6!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1680.$$

2) 3 семерки, 1 девятка, 1 тройка и 3 ед.

$$\frac{C_8^5 \cdot 5!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 \cdot 5! = 120 \cdot 8 \cdot 7 = 6720$$

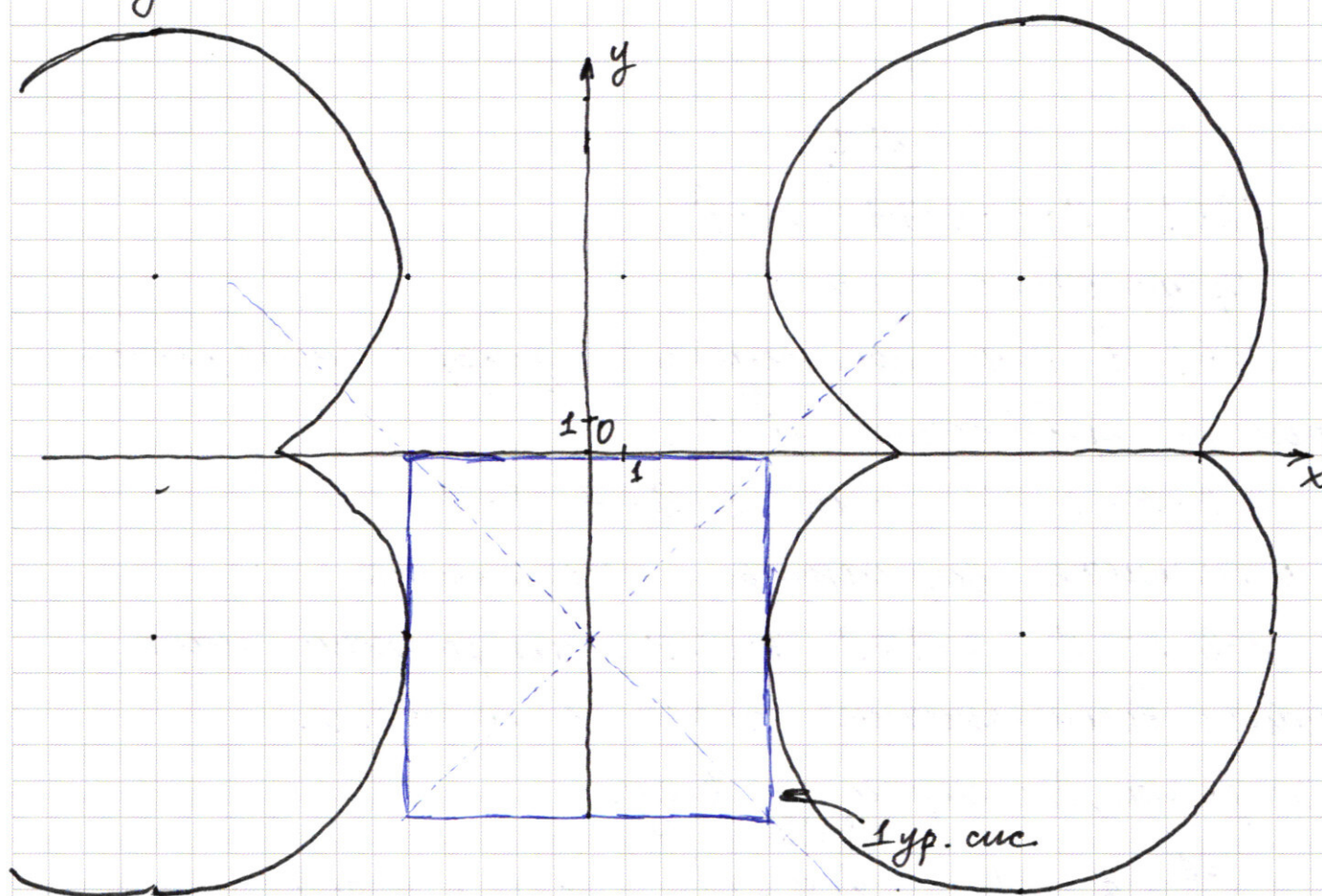
$$\text{Всего чисел } 1680 + 6720 = 8400.$$

№2

Для начала, построим график ~~в~~ первой  
функции этой системы

Изобразим отрезки прямых  $y = x - 5$  и  $y = -x - 5$ ,  
они разбивают плоскость на 4 области в

каждой из которых модуль раскрывается по-разному.



После раскрытия модулей получили график, изображенный на координатной плоскости

Из свойств графиков функций с модулем ясно, что это будут 4 окружности с центрами в точках  $(12; 5)$   $(12; -5)$   $(-12; 5)$   $(-12; -5)$ . радиусами  $\sqrt{a}$ , такие что для каждой окр. она будет существовать только в той координатной четверти, в которой находится ее центр. Отсюда понятно, когда могут быть два решения, первый случай изображен на графике.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Окружности с центрами  $(-12; -5)$  и  $(12; -5)$  касаются прямой  $x=5$  и  $x=-5$ , в этом случае радиус окружностей равен 7, а значит  $a=49$ .

Вр Если  $a < 49$  — точек общих нет в принципе.

Следующий раз, когда решений будет 2 наступит тогда, когда окр. с центрами  $(-12; -5)$  и  $(12; -5)$  станут пересекаться на ~~прямой~~  $y=0$  и  $y=10$ , а  $x=0$  в этом случае  $\Rightarrow a=169$ , если

$a \in [49; 169)$ , то решений будет  $> 2$ , т.е.

каждая окружность будет пересекаться ~~квадрат~~ в двух уникальных точках. При  $a > 169$  решений вновь не будет т.к. окр. станут пересекаться при  $y > 0$  или  $y < -10$ .

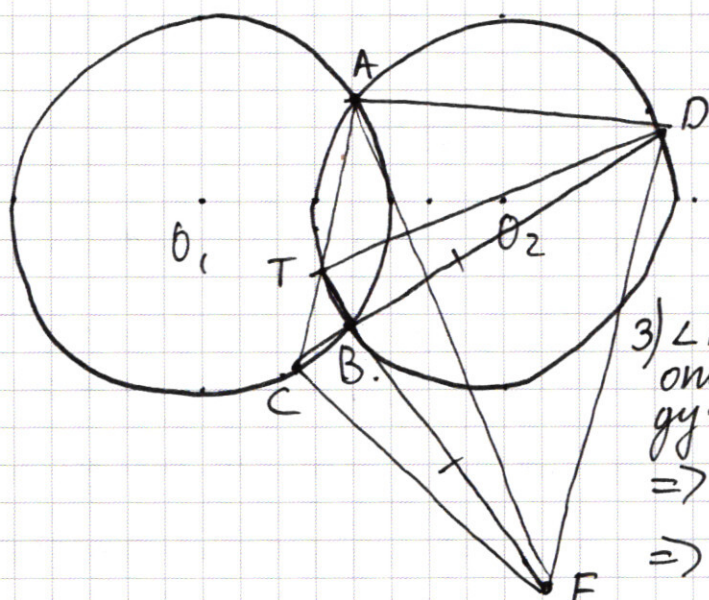
Ответ:  $a=49$  и  $a=169$ .

№ 6

Рисунок на другой стороне!  $\rightarrow$

а) Дуги, отсекаемые на равных окружностях равны между собой.

Пусть  $T$  — точка пересечения  $AC$  с окр. с центром в  $O_2$ ,  $\Rightarrow TD$  — диаметр  $\Rightarrow$  Если провести перпендикуляр к  $BD$ , то точка  $T$  е ему.



1)  $\angle APB = 180^\circ - \angle ATB$  т.к.

т.к.  $ATBD$  - впис

2)  $\angle \overset{BTC}{TBC} = 180^\circ - \angle ATB =$

$= \angle ADB$  т.к. смежные

3)  $\angle ACB = \angle ADB$  т.к. опираются на равные дуги в равных окр.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle BTC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle TBC - \text{р/б} (TB = BC)$

4)  $TB = BC, BP \neq BF, \angle TBD = \angle CBD$  (т.к. верт.)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  по первому пр.  $= \triangle TBD = \triangle BCF \Rightarrow$

$\Rightarrow TD = CF$ , но  $TD$  - диаметр  $\Rightarrow CF = 20$ .

д) Если  $BC = 12$ :

1)  $\angle CBF = 90^\circ$  т.к.  $\angle TBD$  опир. на угли, а  $\angle$ и верт.

$BF^2 = BF^2 + BC^2 \Rightarrow BF = \sqrt{BF^2 - BC^2} = 16$ .

2)  $CT^2 = BC^2 + TB^2 = 2BC^2 \Rightarrow CT = 12\sqrt{2}$ .

3)  $CB \cdot CD = CT \cdot AC$  - произведение секущих на внешние <sub>на части</sub>

$CD = CB + BD = 12 + 16 = 28$

$12 \cdot 28 = 12\sqrt{2} \cdot AC \quad AC = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$

4)  $AC \parallel DF$  т.к.  $\angle CTB = \angle BFD = \frac{180-90}{2} = 45^\circ$ .

5)  $AT = AC - TC = 2\sqrt{2} \quad AD^2 = TD^2 - AT^2 = 400 - 8 = 392$

$AD = 14\sqrt{2}$

6)  $DF = \sqrt{BD^2 + BF^2} = 16\sqrt{2}$

6.1)  $AD \perp DF$  т.к.  $AD \perp AC$   
 $AC \parallel DF$

7)  $S_{ACF} = S_{ACFD} - S_{AFD} = \frac{AC+FD}{2} \cdot AD - \frac{1}{2} AD \cdot DF =$   
 $= \frac{1}{2} AC \cdot AD + \frac{1}{2} FD \cdot AD - \frac{1}{2} AD \cdot FD = \frac{1}{2} AC \cdot AD = 196$

Ответ:  $CF = 20 \quad S_{ACF} = 196$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Nº 4

Рассмотрим  $\Delta KSO$ , найдем, что он прямоугольный ( $SO \perp KO \perp$  боковой стороне трехгранного угла  $\Rightarrow KO \perp KS, KS \in$  трети).

Обозначим за  $x$  расстояние от  $S$  до ~~много~~  
плоскости сечения, который имеет площадь  
1 за  $x$ , тогда расстояние до другой  
плоскости ( $S=16$ )  $x+22$

$$k^2 = \frac{1}{16} = \left( \frac{x}{x+2z} \right)^2 \Rightarrow \frac{x}{x+2z} = \frac{1}{4} \quad \begin{aligned} 4x &= x+2z \\ x &= \frac{2}{3}z \end{aligned}$$

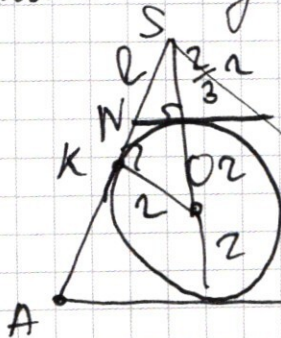
(две подобные транзисторы)

$$SO = x + 2 \quad \sin \angle KSO = \frac{KS}{SO} = \frac{2}{x+2} = \frac{32}{52} = \frac{3}{5}$$

$$80^\circ = \angle KSO \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

Отсюда ясно, что расстояние до каждой точки касания равно между собой.  $\Rightarrow$

⇒ ~~а~~ сечение (KLM) будет подобно обоим сечениям,  
а данными в условии, найдем его площадь.



Пусть расстояние от  $S$  до прямой, которая лев. следом сечение в этой плоскости равно  $l$ .

заметим, что  $\frac{l}{\frac{2}{3}l} = \frac{\frac{2}{3}l}{\frac{2}{3}l}$

$$KS = \sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{9} - \frac{9}{9}\right) 2^2} = \frac{4}{3} 2$$

$$l = \frac{5}{3} \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{24 \cdot 2} = \frac{5}{6} \pi$$

$$\frac{l^2}{KS^2} = k^2 = \frac{1}{S_{\text{cer.}}}$$

$$S_{\text{cer.}} = \frac{1}{k^2} = \frac{KS^2}{l^2} =$$

$$= \left( \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 3} \right)^2 = \left( \frac{8}{5} \right)^2 = \frac{64}{25} = \frac{256}{100} =$$

$$= 2,56$$

$$\text{Отвѣт: } S = 2,56.$$

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left( \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\cos 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left( \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$= \sqrt{2} \left( \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x \right) = -2\sqrt{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{9x + 4x - \frac{\pi}{4}}{2}.$$

$$\sqrt{2} \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{9x + 4x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} - 2\sqrt{2} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$= 0.$$

$$\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \left( \cos \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0.$$

$$\text{1 а.}$$

$$\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 сл.

$$\cos \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$\sin \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = \cos \frac{\frac{5\pi}{4} - 13x}{2}$$

$$t = \cos \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) + \cos \left( \frac{\frac{5\pi}{4} - 13x}{2} \right) = y$$

$$= 2 \sin \frac{t+y}{2} \sin \frac{t-y}{2} =$$

=

$$\frac{t+y}{2} = \frac{5x - \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} - 13x}{2} = -4x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{t-y}{2} = \frac{5x - \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} + 13x}{2} = 9x - \frac{3\pi}{4}$$

$$-2 \sin \left( -2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 4,5x - \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left( -2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{4} - \pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left( 4,5x - \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$4,5x - \frac{3\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi k + \frac{3\pi}{8}}{4,5}}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

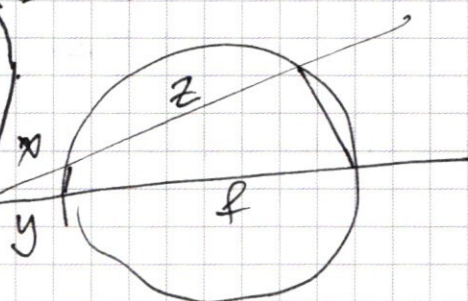
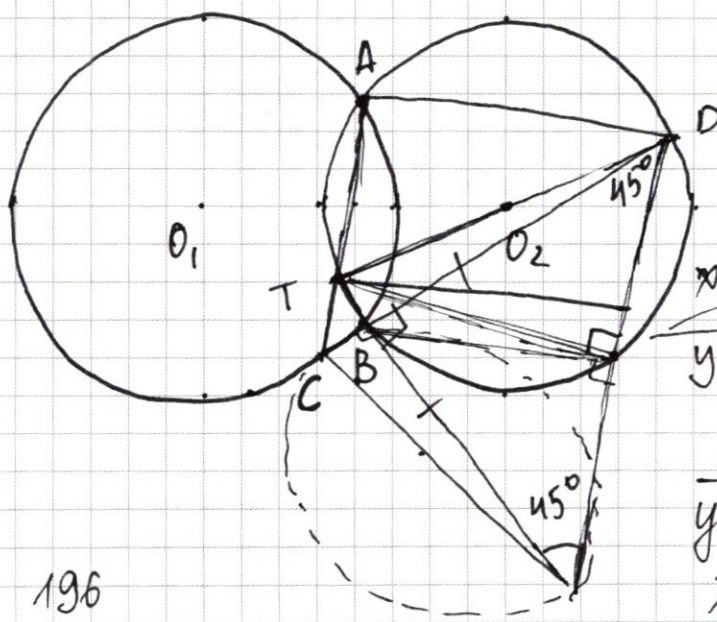
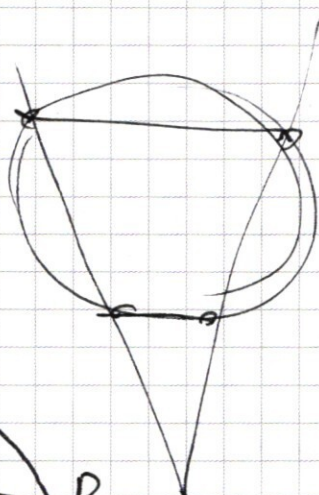
$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi l + \frac{3\pi}{8}}{4,5}, l \in \mathbb{Z}.$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4) - \ln x = y^4 \ln(y/x^7)$$

$$\frac{y^4 \ln y}{y^4 \ln x^7} = (xy^2)^{-2 \ln x}$$



$$\frac{x}{y+f} = \frac{y}{x+z}$$

$$\lambda \cdot (x+z)$$

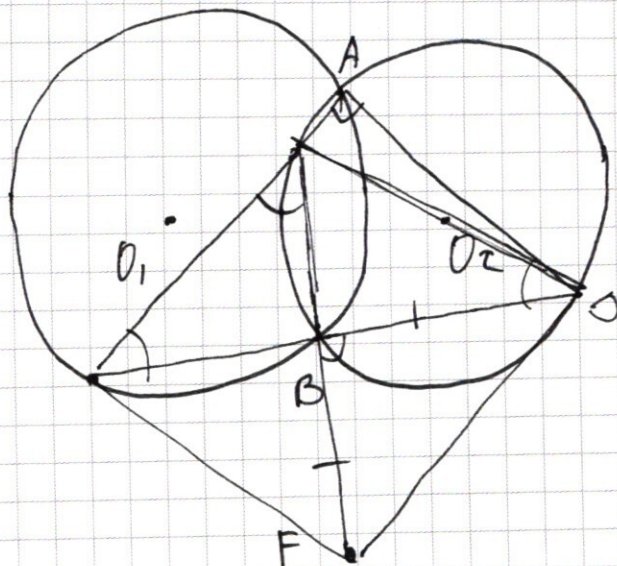
$$\begin{array}{r} 1452 \\ \times 1452 \\ \hline \end{array}$$

196

392

196

14<sup>2</sup>



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

36  
27

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9281 \end{array}$$

24

120

5600

1120

6720

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \sin \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left( \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sin \left( 9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x.$$

+ 5600  
2800

$$2 \sin 7x \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x.$$

+ 1120  
+ 1680  
2800

$$\cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x.$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \mid 9 \\ 9 \phantom{00} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 129 \mid 3 \\ 43 \phantom{00} \\ \hline \end{array}$$

0

N°2

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = x$$

~~18~~

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

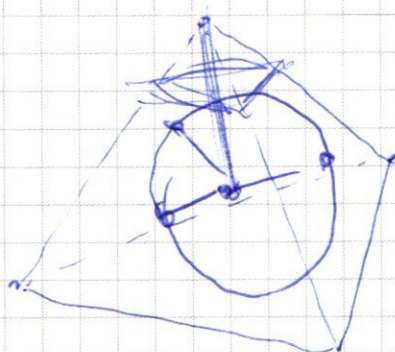
$$\alpha - \beta = y$$

$$2 \sin 7x \cos 2x$$

N°5

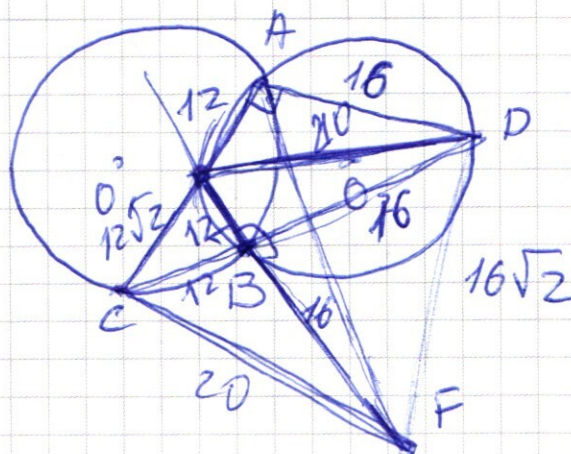
N°6

$$\begin{array}{l} 20^2 - 12^2 \\ = 256 \\ 16^2 \end{array}$$

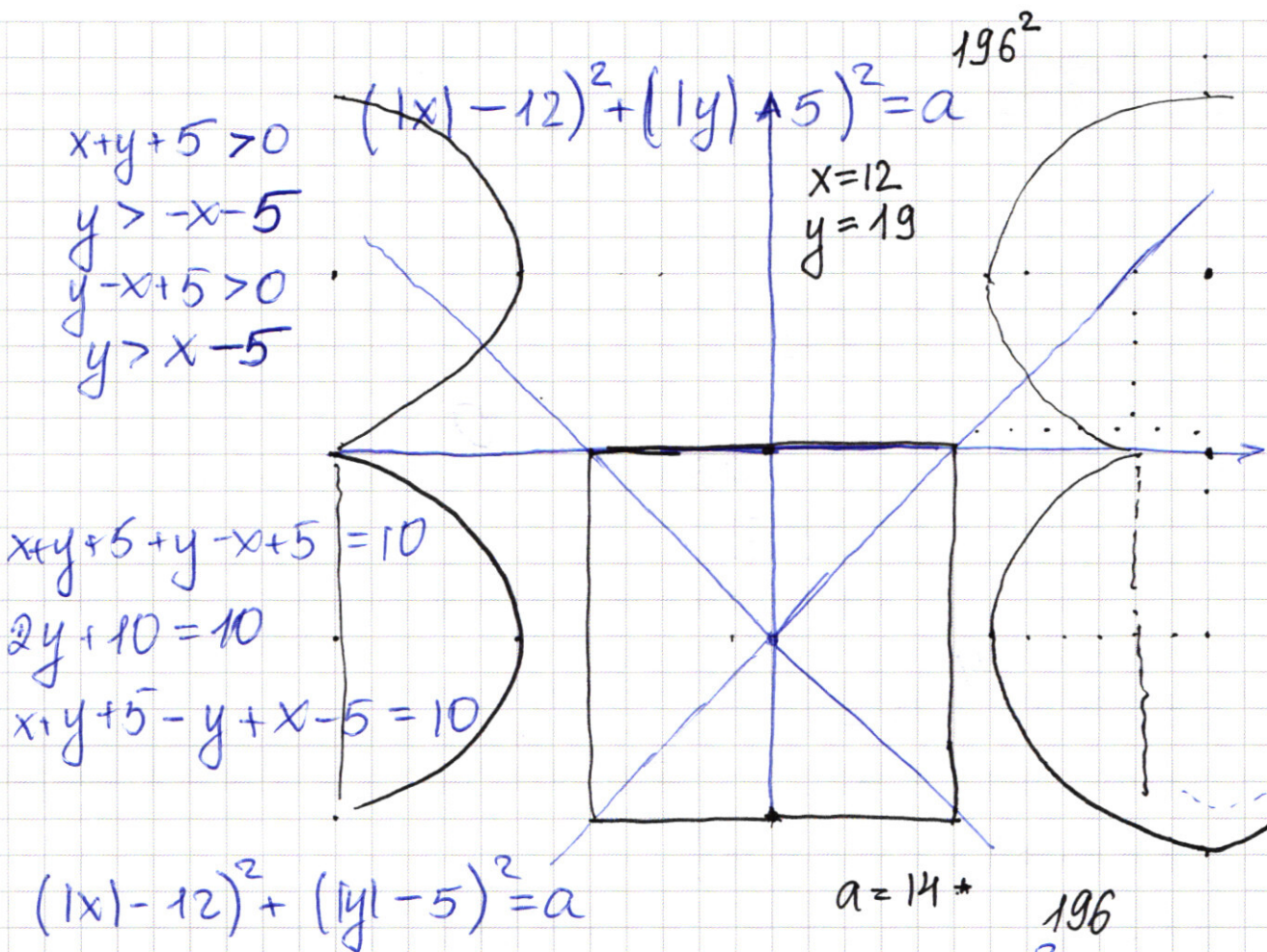


$$CF = 90.$$

$$256 + 256$$



$$28$$



$$(|x|-12)^2 = a$$

$$a = b^2$$

$$(|x|-12)^2 = b$$

$$|x|-12 = b$$

$$|x|-12 = -b$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 9x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 9x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sin 5x - \cos 5x = -(\cos 5x - \sin 5x) =$$

$$= -(\sqrt{2} \cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right)).$$

$$\sqrt{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \left( \cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \sqrt{2} (2 \cos$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta -$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \left( 5x + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left( -5x - \frac{\pi}{4} \right).$$

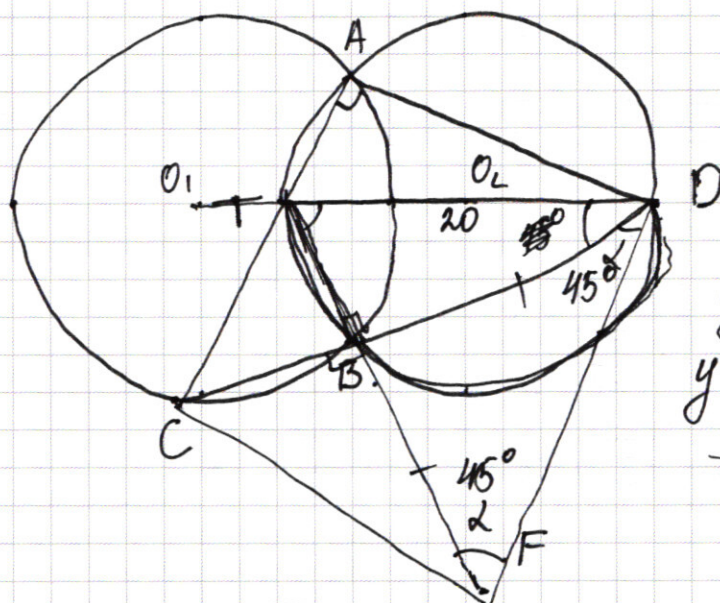
$$\sqrt{2} \left( \cos 5x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \left( \cos 4x \right).$$

$$\sqrt{2} \left( 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos 9x - \frac{\pi}{4}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x.$$

$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x > 2^x \cdot 3 \cdot 2^{34}.$$



$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y-x) - 2x^2 + 8x - 4y$$

$$\underline{4(2x-y)}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y} \cdot \frac{\ln(y/x^7)}{\ln x^7}$$

$$= \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}$$

$$y^{\ln y} = \left( \frac{y^7}{x^2 y^4} \right)^{\ln x} = \left( \frac{y^3}{x^2} \right)^{\ln x}.$$

$$\ln y = 3 \ln x + 2 \ln x (\log_y x).$$

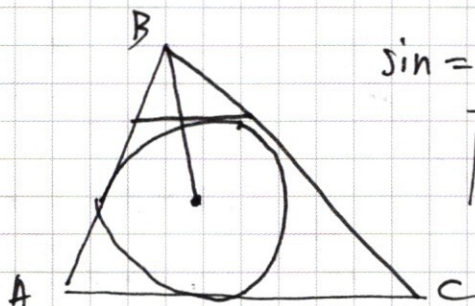
$$\ln y = \frac{1}{\log_y e}$$

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}.$$

$$\frac{3 \ln x + 2 \ln^2 x}{\ln y} = \ln y$$

$$2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln y = \ln^2 y^2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin = \frac{2}{x+2} = \frac{2.3}{5.2} = \frac{3}{5}$$

$$\arcsin \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{3}z$$

$$\frac{25}{9}z^2 - z^2 = \frac{16}{9}z^2$$

$$\frac{x}{x+22} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 2z$$

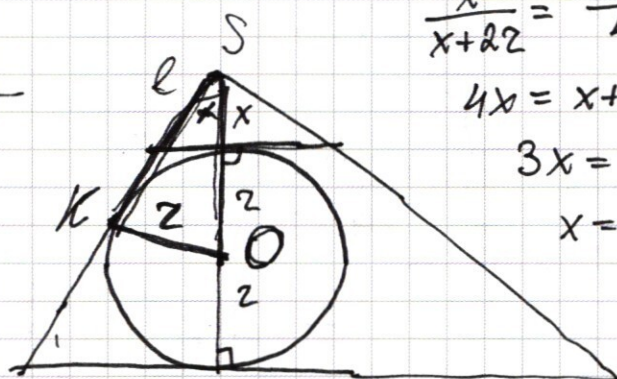
$$3x = 27$$

$$x = \frac{2}{3}z$$

$\frac{4}{3} \pi$

$$\frac{\frac{4}{3}z}{\frac{2}{3}z} = \frac{\frac{5}{3}z}{l}$$

$$t = 2 \frac{5}{6} \text{ z.}$$



$$\frac{\frac{5}{6} \cancel{2}}{\frac{4}{\cancel{2}}} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}} \cancel{2}}{\frac{1}{\cancel{6}}} = \frac{15}{24} \cancel{2}$$

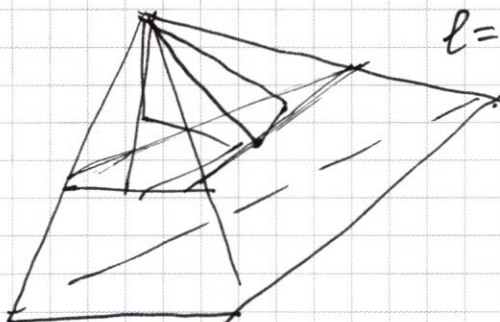
$$\frac{l}{5k} = \frac{\frac{5}{6}^2}{\frac{4}{3}^2} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = \frac{5}{12}$$

$$\cos d = \frac{4}{5}$$

$$l = x \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{x}{\cos 2} = \frac{2.5}{3.4} = \frac{10}{12} 2$$

$$\frac{5}{6} \times 2$$



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x. \end{cases}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 8 \cdot 2^{34} - 12 \geq 2^6 + 3 \cdot 2^{34}.$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta = 8x$$

$$\alpha = 8x + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 6.$$

$$76 + 2^{33}x - 2x = 2^x + 3 \cdot 2^{34}.$$

$$2^{33}x \geq 3 \cdot 2^{34}$$

20

120

240

$$7 \cdot 8 \cdot 2^{34} + 2^{33} + 76 - 14 \geq 128$$

$$(x-7) \cdot 2^{33} + 76 - 14 \geq 0$$

$$2^{33} \cdot 2^{33} = 2^{34} + 76 - 2$$

$$2^{66} - 2^{34}$$

$$\begin{array}{r} \times 240 \\ 7 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ 343 \end{array}$$

49

$$\begin{array}{r} \times 120 \\ 8 \\ \hline \times 960 \\ 7 \\ \hline 6720 \end{array}$$

$$2^x = 2^{33} \cdot x$$

$$2^8 = 2^{36}$$

$$2^{16} = 2^{38}$$

$$2^{32} = 2^{38}$$

$$2^{64} = 2^{39}$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

120

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$