

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

1) Упростите второе уравнение

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y + x - 4)(y - 2x)$$

2) Упростите первое уравнение.

$$\text{Сдз: } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{\frac{1}{\ln x}}} = y^{\ln y - 2 \ln x}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{\frac{1}{\ln x}}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2 \ln x}} \Rightarrow \frac{y^{2 \ln x}}{x^{2 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{2 \ln x} = y^{\ln \frac{y}{x}} \quad \text{н. к. } \frac{y}{x} > 0 \text{ и } y > 0 \text{ то}$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)^{2 \ln x} = \ln y^{\ln \frac{y}{x}} \Rightarrow 2 \ln x \cdot \ln \frac{y}{x} = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{x} (\ln x^2 - \ln y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 0 \\ \ln \frac{x^2}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

3) Перепишем систему

$$\begin{cases} y, x > 0 \\ y = x \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y, x > 0 \\ y = x \\ y = 2x \\ y + x = 4 \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y, x > 0 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ y = x^2 \\ y + x = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ам.} \\ \text{мед.} \\ \text{стр.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

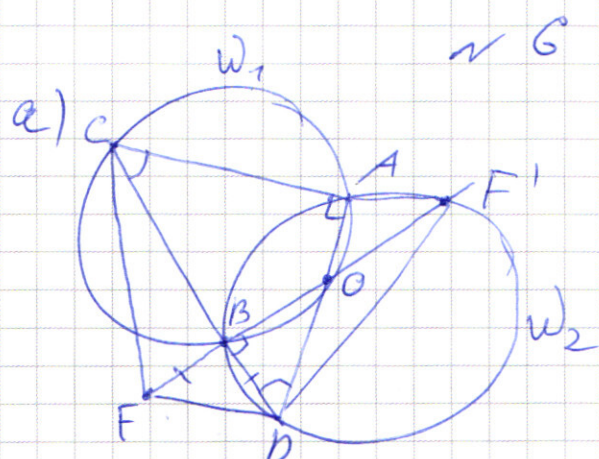
$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит, т.к. } < 0$$

$$\sqrt{17} < \sqrt{36} \Rightarrow 6$$

Ответ: $(2, 2), (2, 4), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$



Пусть $F' = w_2 \cap FB$
и $O = AD \cap FB$.

1) т.к. радиусы окр.
то w_1 и w_2 равны, ~~то~~ $\angle ACB$ и $\angle ADB$

опир. на AB и $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$, то

$$\angle ACD = \angle ADB = \frac{90^\circ}{2}$$

$$2) \angle AOF' = \angle BOD = 90^\circ - \angle ODO = 45^\circ$$

$$\angle AF'B = \angle BDA = 45^\circ \text{ т.к. } AF'BD \text{ впис.}$$

окр. $\Rightarrow \angle OAF' = 90^\circ \Rightarrow C, A, F'$ лежат
на одн. прямой.

$$3) \triangle FBD - \text{прямоуг. } FD \Rightarrow \angle BDF = 45^\circ$$

т.к. $\angle CF'F$ танг. $= 45^\circ$, то $CF'DF$ - впис. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle FCD = \angle FF'D \Rightarrow \angle CFP = \angle F'DB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CBF = \triangle F'BD \text{ по } (\text{т.к. } \angle CBF = \angle F'BD = 90^\circ)$$

см. $FB = BD$ по усл.) и 2 приг. углам. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CF = F'D$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\angle DBF' = 90^\circ \Rightarrow BF' - \text{гипот.} \Rightarrow BF' = 20 \Rightarrow CF = BF' = 20$

Ответ: $CF = 20$

1) т.к. $\angle CBF = 90^\circ$, $CF = 20$, $CB = 12$ то
 $FB = BF' = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$

2) т.к. $\triangle CAD$ прями. и пересекается CD , то
 $2CA^2 = 28 \Rightarrow CA = \sqrt{14}$

3) $\sin \angle FCA = \sin \frac{\pi}{4} \cos \angle FCB + \sin \angle FCB \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{7}{\sqrt{2} \cdot 5}$

4) $S_{\triangle FCA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot 20 \cdot \sin \angle FCA = 14\sqrt{2}$

Ответ: $14\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n_3, n_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + 2\pi \frac{n_1}{5}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n_2, x = \frac{\pi}{12} + 2\pi \frac{n_3}{9}$

~1

$$1) 9267 = 3^3 \cdot 7^3$$

1) Тогда число сост. из 1, 3, 9 или 7
Возм. 2 случая:

$$1) 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 \text{ тогда вар. } \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$2) 1, 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7 \text{ тогда вар. } \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$\text{Всего } \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1680$$

Ответ: 1680

~5

$$|(y+5)+x| + |(y+5)-x| = 10$$

$$\{(x-12)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{a})^2, \text{ т.к. при } a < 0 \text{ нет реш.}\}$$

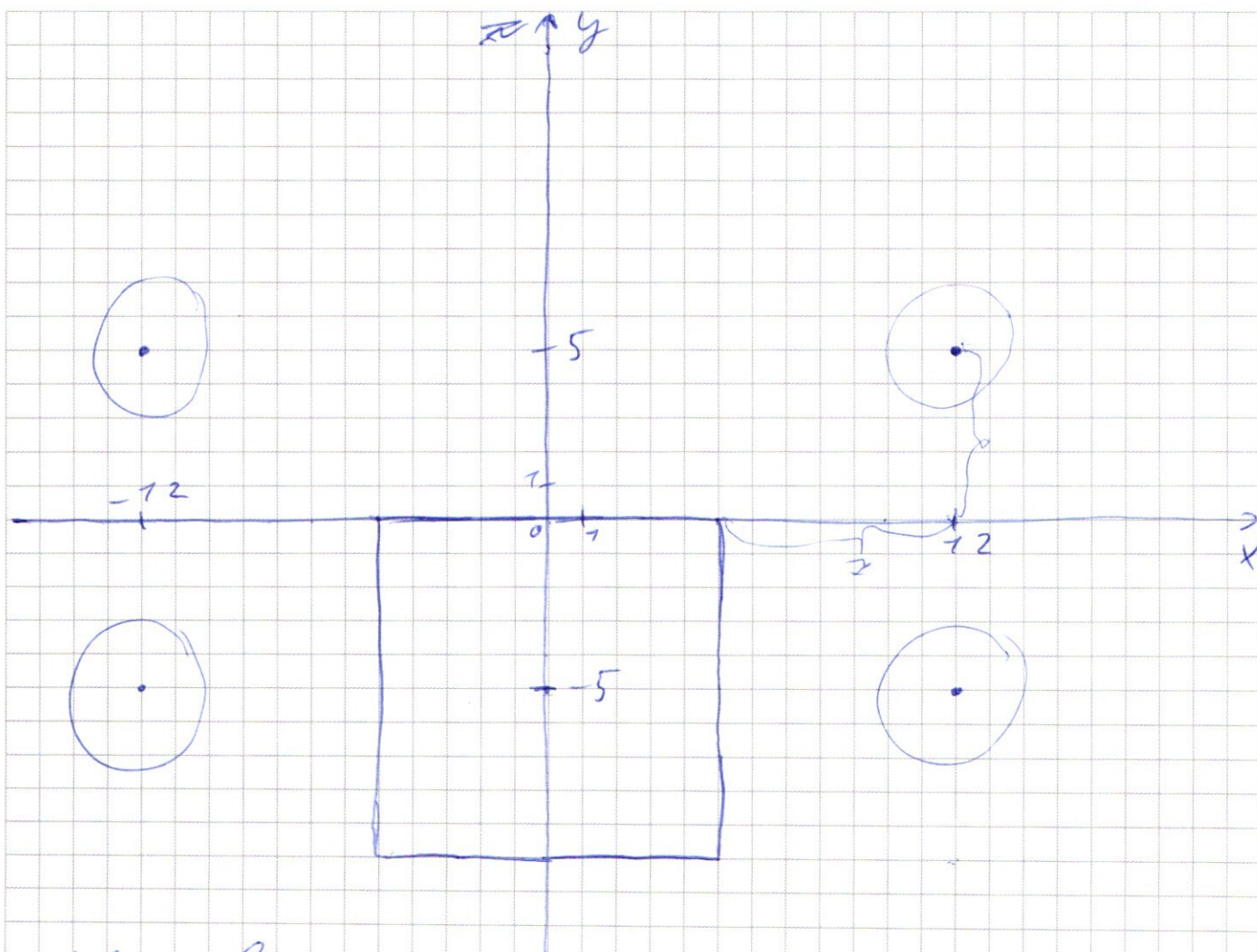
1 уравн. Это квадрат, со стор.

пар. осей коорд. и стор. = 10 с центром
в т. $x=0, y=-5$

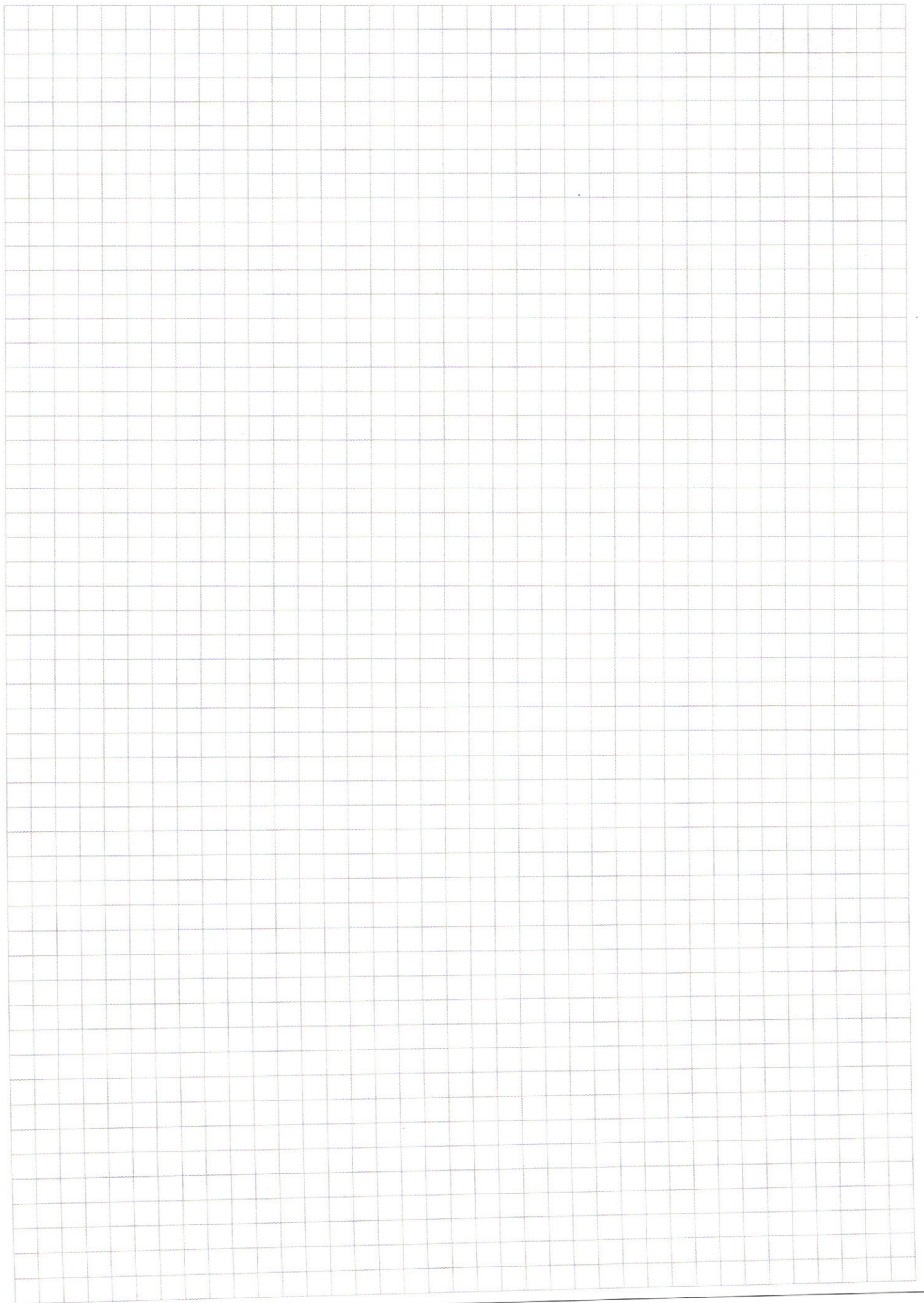
2 уравн. Это 4 окр. (или точка при $a=0$)
с центрами в т. $(12, 5), (-12, 5), (12, -5), (-12, -5)$
с рад. $\sqrt{a}$.

Начертим на графике (см. след. стр.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2 рен. возм. только когда касаясь ^{слиж.} сторон квадрата
(т.к. $7 < \sqrt{z^2 + 5^2}$) и когда ^{найдутся} вершин.
окр. пересек. квадрата по ^{найдутся} вершинам
1 случ: $a = z \Rightarrow a = 49$
2 случ: $\sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 17^2} \Rightarrow a = 15^2 + 17^2$
Касаясь, окр. не будут пер. квадратом т.к.
 $\sqrt{15^2 + 17^2} > \sqrt{5^2 + 17^2}$ Ответ: $a = 49, 15^2 + 17^2$
наиб. расст. от центра окр. до верш.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sqrt{12}-1}{2}, \frac{\sqrt{12}-1}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}}$$

$$x^2 + 8x + 16 - 4(-2x^2 + 8x) = 9x^2 - 4x^2 + 16 = (3x - 4)^2$$

1) $x > 0$
2) $y > 0$

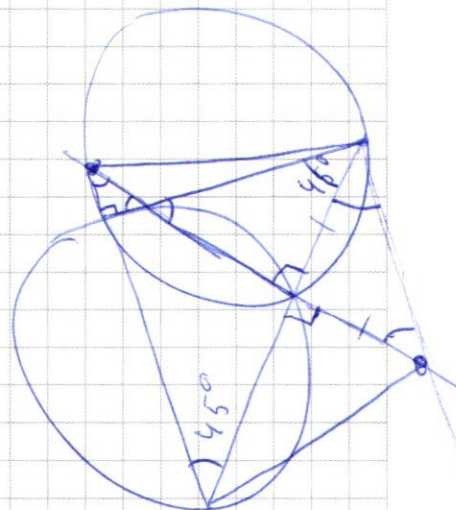
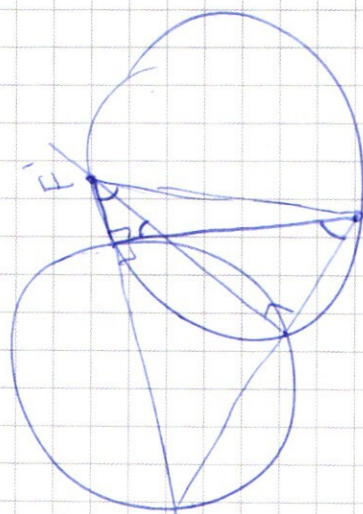
$$y = \frac{-x - 4 \pm (3x - 4)}{2} \quad F' \text{ (1) } f' 8 - 32$$

$$y_1 = \frac{2x - 8}{2} = x - 4$$

$$y_2 = \frac{-x - 4 - 3x + 4}{2} = -2x$$

$$(y - x + 4)(y + 2x)$$

$$(y + x - 4)(y - 2x) = 0$$



$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(x^2 y^2)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\begin{cases} y + x - 4 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = \ln y - 2 \ln x$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-2 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x} \quad ?$$

$$y^{\ln y}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha}$$



2x

$$\lg 2 \cdot 10 \sqrt{2}$$

R

$$\lg(90-2) \cdot 10 \sqrt{2}$$

$$\lg 10 \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\lg 2} \cdot 10 \sqrt{2}$$

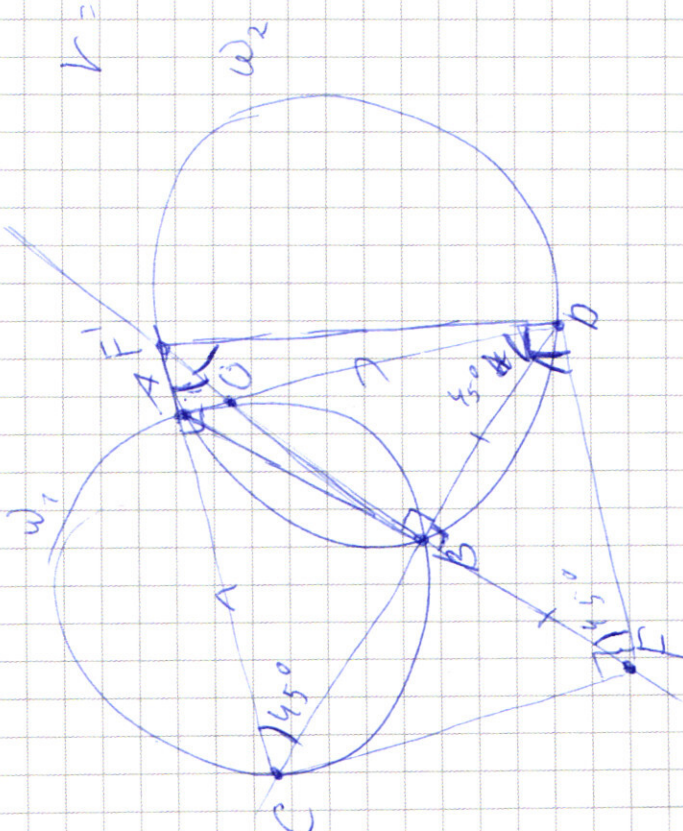


$$\sqrt{\lg^2 x + 1 + \frac{1}{\lg^2 x}}$$

$$2x^2 + a^2$$

$$(a^x)'(e^{\ln a x})' = \ln a \cdot e^{\ln a x} = \ln a \cdot a^x$$

$$= \ln a \cdot a^x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

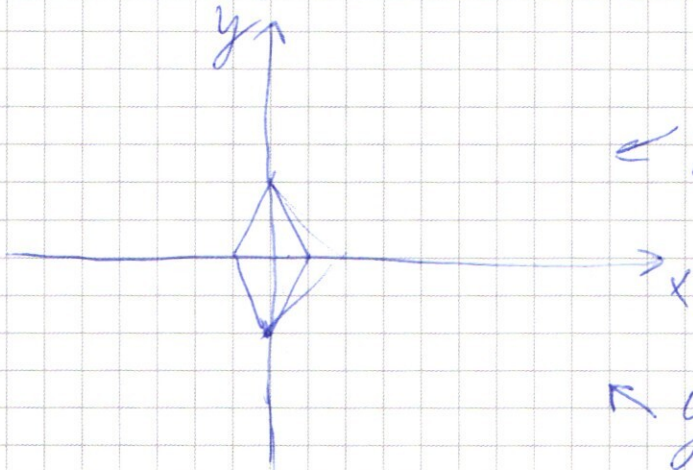
$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\
 \alpha = \frac{a+b}{2} \quad \beta = \frac{a-b}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\
 \frac{1}{2 \ln x} \cdot \frac{y}{y \ln x} &= \frac{y \ln y}{y^2 \ln x} = \frac{y \ln y}{y \ln x} \\
 \ln \left(\frac{y}{x} \right) &= \ln y - \ln x \\
 \ln \frac{y}{x} \cdot 2 \ln x &= \ln y \cdot \ln x^2 \\
 (\cos 2x - \sin 2x) &= 0 \\
 (2 \sin x \cos x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \\
 -2 \sin x \cos x - \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x + 2 \sin x \cos x &= 0 \\
 -2 \sin x \cos x - \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) &= 0 \\
 (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\
 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) &= 0 \quad 2 \sin x \cos x - 2(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x) = 0 \\
 \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) &= 0 \\
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x + (y + 5)| + |(y + 5) - x| = 7$$

1.

y



$$|y + x| + |y - x| = 7$$

$$\leftarrow y + x + |y - x| = 7$$

$$x = 7$$

$$y + |y - 7| = 0$$

$$y + \frac{7}{2} + |y - \frac{7}{2}| = 7$$

$$x = \frac{7}{2}, y = -\frac{7}{2}$$

y

$$x = 0$$

$$y + |y| = 7$$

$$y = \frac{7}{2}$$

$$y = 0, x + |-x| = 7$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2}, y = \frac{7}{2}}$$

$$\left| \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \right| + \left| \frac{7}{2} - \frac{7}{2} \right| = 7$$

$$\frac{7}{1} + \frac{0}{1} = 7$$

$$x = 5, x = 5$$

$$y = 0, y = -5$$

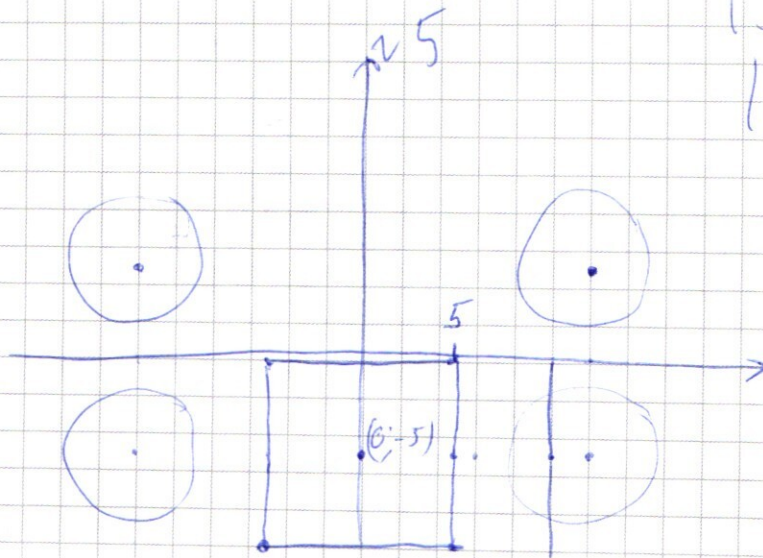
$$x = 5, y = -10$$

$$x = -5, y = 0$$

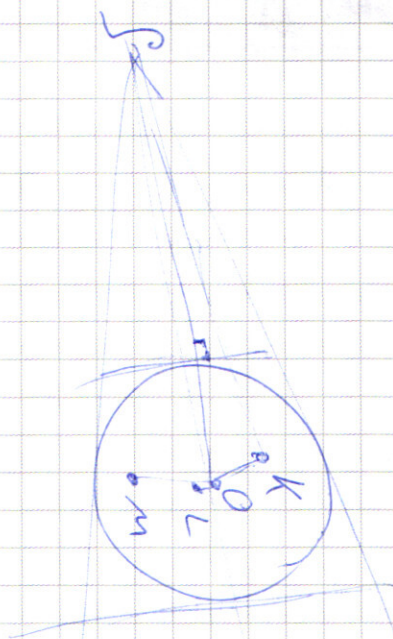
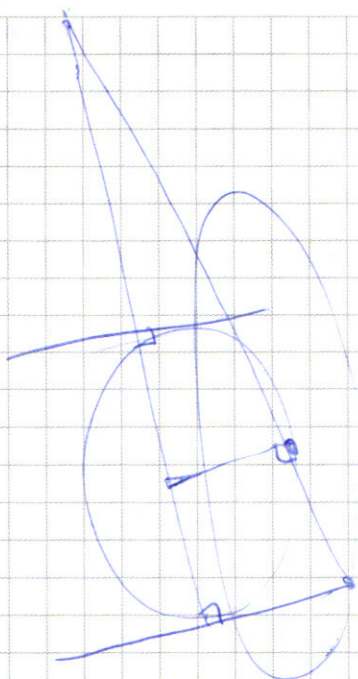
$$x = -5, y = -10$$

$$x = 0, y = -10$$

z 5



$$\begin{array}{r} 10 \\ 9267 \\ - 49 \\ \hline 436 \\ 392 \\ \hline 441 \\ 411 \end{array}$$



$$\begin{aligned} \Delta CBF &= \Delta BF'D \\ n.k. FB &= BD \\ g) F'D &\text{-quadrant} \Rightarrow \\ &\Rightarrow CF = F'D = 70 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle F'PF - \text{Länge}$$

$\angle CDF = 45^\circ$

$$2) \angle C F' F = \angle B F D = \alpha$$

3) $C F' / F D \leftarrow B F D =$

$$\angle AOF = 45^\circ \Rightarrow \angle$$

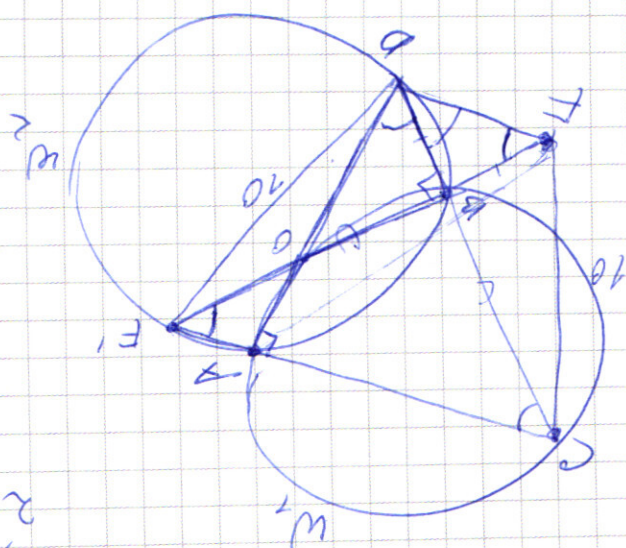
$$\angle AFB = 45^\circ$$

2) F' verhalten KSCA

$$7) F' = w_2 N_F B$$

$$b^2 = 12$$
$$b = \sqrt{12}$$
$$2x^2 = (72 + 2\sqrt{72})^2$$
$$x = \frac{\sqrt{72}}{(72 + 2\sqrt{72})}$$

5, 2, 1



7/4480 Δ b ACF