

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

у1

Разложим 3261 на множители: $3261 = 3^3 \cdot 7^3$

Тогда цифрами десятичного числа будут следующие
цифры: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1; либо: 3, 9, 7, 7, 7, 1, 1, 1

Найдем число комбинаций для первого случая:

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 560$$

Для второго случая:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

Всего комбинаций: $1120 + 560 = 1680$

у2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\text{При этом: } \cos 9x = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos 5x = \cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 5x = \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\text{Тогда } 2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x - (2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x) = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x) - \sin 2x (2 \sin 7x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & (1) \end{cases}$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

$$\sin 7x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\sin 7x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

у3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 4y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - 4y = 2x^2 - 8x + xy$$

$$y^2 - 4y + xy = 2x^2 - 8x + 2xy$$

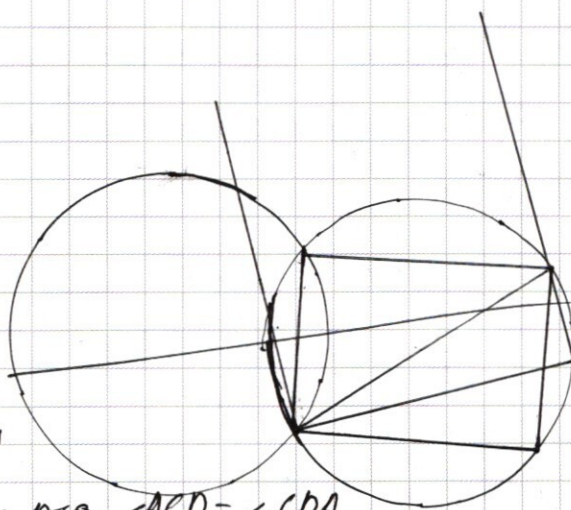
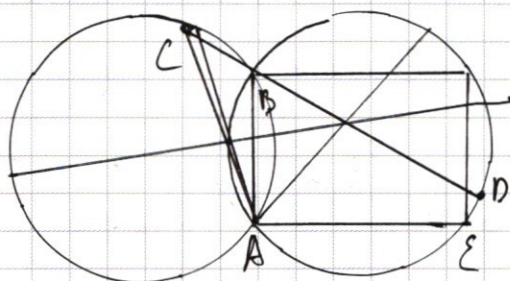
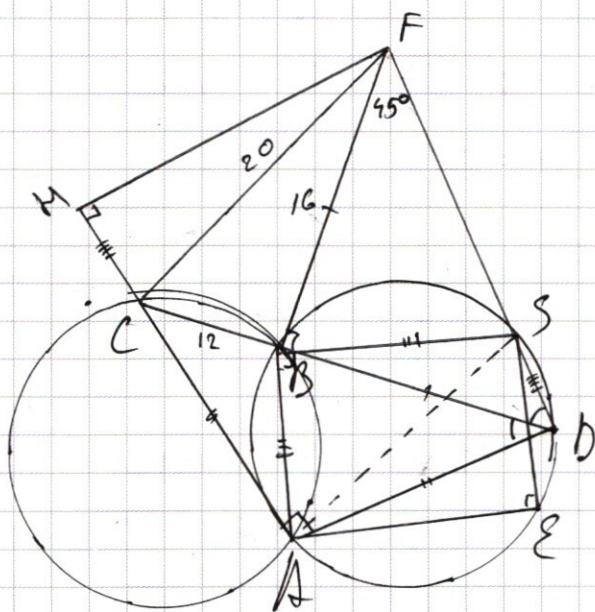
$$y(y - 4 + x) = 2x(x - 4 + y)$$

$$(y - 2x)(y - 4 + x) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

у6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a) $\angle ACD$ и $\angle CDA$ - вписанные

и опирающаяся на

дугу AB , т.н. окружности

с равными радиусами, то $\angle ACD = \angle CDA$

$$\angle ACD = \angle CDA = \frac{180 - \angle CAD}{2} = 45^\circ, \text{ и } \triangle CAD - \text{равнобедренный,}$$

no $AC = AD$

$\angle B$ и $\angle FBD$ — смежные, $\angle FBD = 90^\circ$, $FB = BD$, то $\triangle FBD$ — равнобедренный;

$$\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ ; \angle ADF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Пусть DF пересекает окружность в точке S , тогда

AS - диаметр, $\angle ABS = 90^\circ$

$$AC \perp AD, \quad FD \perp AD, \text{ maka } AC \parallel FD$$
$$\angle BDS = \angle BDA = 45^\circ \Rightarrow \angle BSS = \angle ABB \Rightarrow BS = AB \text{ дуги лежат}$$

6) по условию задачи)

В $\triangle ABD$ и $\triangle FBS$ $\angle FBS = \angle ABD$ (стороны угла перпендикулярны), $FB = BD$, $AB = BS$, то $\triangle ABD = \triangle FBS \Rightarrow AD = FS$

$$AC = AD = FS$$

В четырехугольнике $CFSA$ $FS \parallel AC$, $FS = AC$, то $CFSA$ - параллелограмм $\Rightarrow CF = AS$, то

$$AS - диаметр \Rightarrow CF = AS = 2r = 20$$

$$8) \sin \angle CFB = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$FB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16, \text{ то } FD = \sqrt{256 + 256} = 16\sqrt{2}$$

$$AC = FS = FD - SD$$

Проведем перпендикуляр FH к AC , тогда $HFDA$ - прямоугольник, $HC = SD$ ($FD = AH$, $FS = AC$), $HF = AD$

$$\sin \angle HFC = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \angle CFB \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \angle CFB - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \angle CFB =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = +\frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{HC}{FC}$$

$$HC = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot 20 = 2\sqrt{2}$$

$$FS = 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2} = AC$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} \sin(\angle FCB + 95^\circ) \cdot 20 \cdot 14\sqrt{2} =$$
$$= 140\sqrt{2} \left(\sin \angle FCB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \angle FCB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$
$$= 140\sqrt{2} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 140\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{10} =$$
$$= 14\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 88 \cdot 2 = 196$$

Ответ: а) 20; б) 196



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

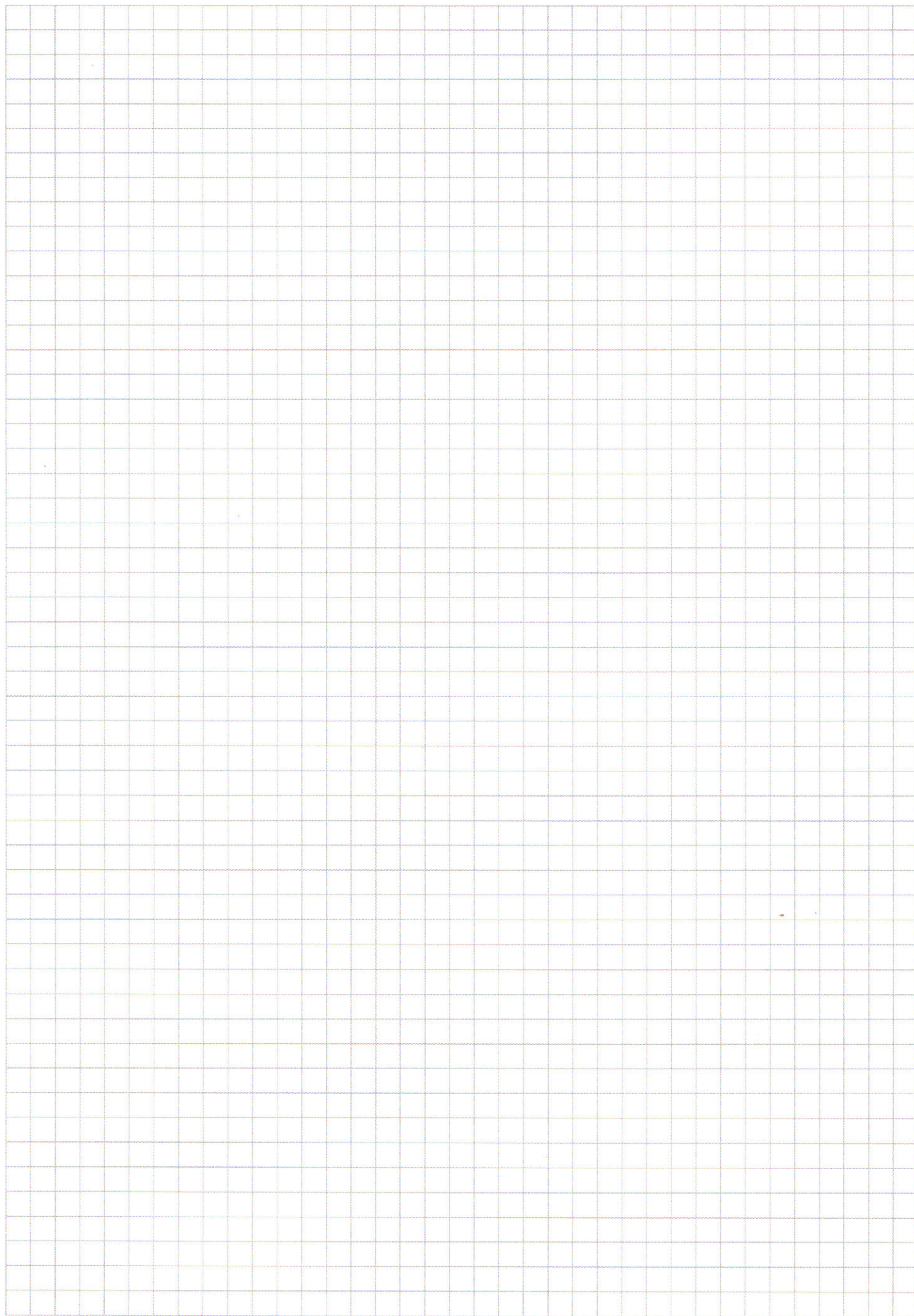


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

135

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = 4 - x, & x < 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \quad (2)$$

$$2) \left(\frac{1}{x^2 y^4} \right)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$x = \frac{y}{2}, \left(\frac{4}{y^6} \right)^{-\ln \frac{y}{2}} = y^{\ln \frac{2}{y^6}}$$

$$t = \frac{4}{y^6}, \text{ но } t$$

$$t = \frac{2}{y}, \text{ но } \left(\frac{t^6}{24} \right)^{-\ln \frac{1}{t}} = (2t^{-6})^{\ln 2t}$$

$$\cos 4x = \cos 2x - \sin 2x$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) + \sin 2x (2 \sin 2x - \sqrt{2} - 2 \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - \sqrt{2}) - \sin 2x (2 \sin 2x - \sqrt{2}) = 0$$

$$(2 \sin 2x - \sqrt{2})(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

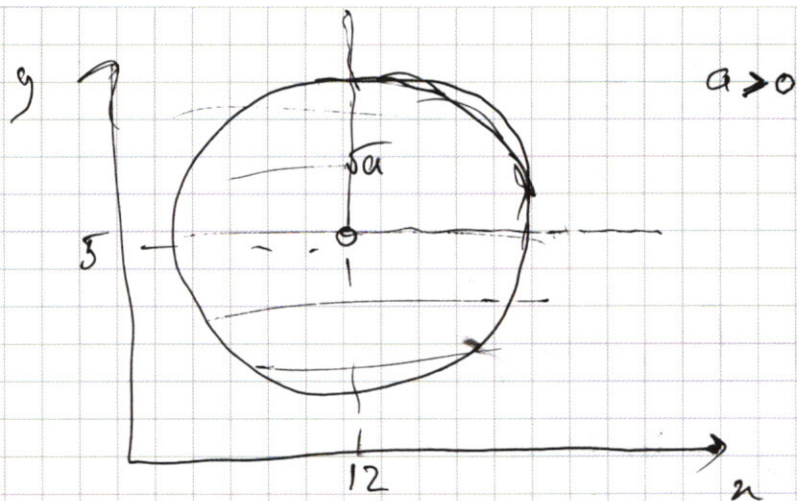
$$\begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos 2x = \sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ответ.

у5



$$\sqrt{a} < 5, \text{ то}$$

$$x + y + 5 > 0$$

$$y - x + 5 > 0$$

$$2y + 10 > 0$$

$$y > -5$$

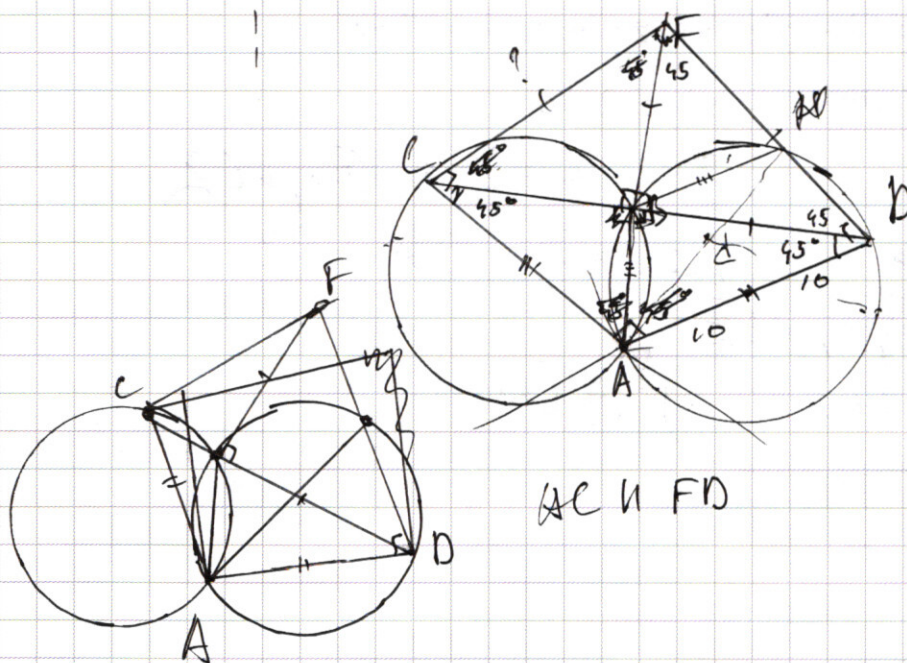
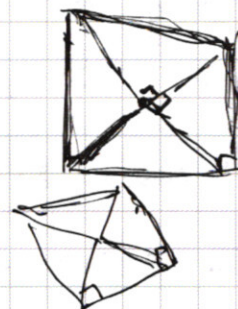
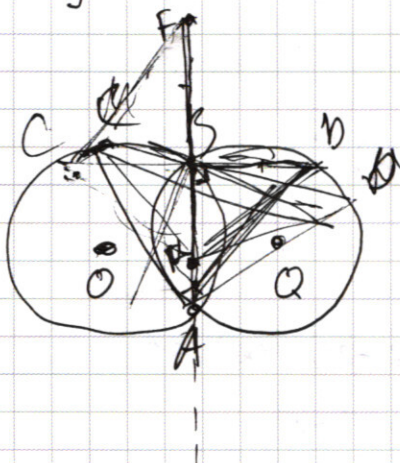
$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$(x - 12)^2 = a - 25 =$$

$$x^2 - 24x + 144 + 25 = a$$

$$x^2 - 24x + 169 = a$$



$$CF = 20$$

$$a = 20$$

$$b = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot 400} =$$

$$= \sqrt{800} a$$

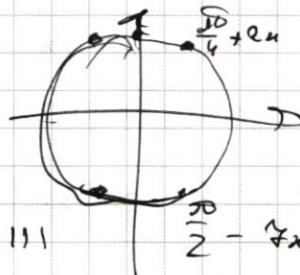
$$CF =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У1

9261 3
3084 3
1029 3
343 7
49 7
7 7
1

... $\frac{10}{9} - 7x +$



3 3 3 7 7 7 11

9 7 7 7 3 1 1 1

$$\frac{8^8}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2^4}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2^4}{9}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 560 \text{ вариантов}$$

У2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x = \cos(7x + 2x) = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos 5x = \cos(7x - 2x) = \cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x = \cos(5x + 4x) = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$\sin 9x = \sin(5x + 4x) = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + \dots$$

$$\sin 9x - \sin 5x = \sin(7x + 2x) - \sin(7x - 2x) = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x - \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 5x - \sin 7x = \sin(7x - 2x) - \sin(7x + 2x) = \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x - \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x (2 \cos 2x - 2 \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x \left(\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) - \frac{1}{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x \cos \left(\frac{11}{4} + 2x \right) - \frac{1}{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned}
 \cos 9x &= \cos 3x \cos 6x - \sin 3x \sin 6x = \cos 3x \cos 6x - \sin 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 3x = \\
 &= \cos 3x (1 - 2 \sin^2 3x) - \sin 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 3x = \\
 &= \cos 3x - 2 \sin^2 3x \cos 3x - 2 \sin^2 3x \cos 3x = \\
 &= \cos 3x - 4 \sin^2 3x \cos 3x \\
 \sin 9x &= \sin 3x \cos 6x + \sin 6x \cos 3x = \sin 3x \cos 6x + 2 \sin 3x \cos^2 3x = \\
 &= \sin 3x (2 \cos^2 3x - 1) + 2 \sin 3x \cos^2 3x = \\
 &= 4 \sin 3x \cos^2 3x - \sin 3x
 \end{aligned}$$

~~center~~

$\sin 7x =$

$\cos 2x$

у3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} & (2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (1) \end{cases}$$

$$1) y^2 - xy - 4y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - 4y = 2x^2 - 8x + xy$$

$$y(y-4) = x(2x-8+y)$$

$$y(y-4+x) = 2x(x-4+y)$$

$$(x-4+y)(y-2x) = 0$$

$$x+y=4 \text{ или } y=2x$$

$$\begin{cases} y = 4-x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$2) \text{ Если } y=4-x, \text{ то } y=2x, \text{ то}$$

$$(x^2 \cdot 16 x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^5})}$$

$$(16 x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^5})}$$

$$(y=2)x$$

$$8x - xy - 4y$$

$$(x-4)(y+2)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &\geq 2^x (1 + 3 \cdot 2^{34-x}) \\ y &< 76 + 4 \cdot 19 + 2(2^{32} - 1)x \end{aligned}$$

$$x=0, \quad \begin{cases} y \geq 3 \cdot 2^{34} + 1 \\ y < 76 \end{cases}$$

$$76 = 2 \cdot 38 = 4 \cdot 19$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x$$

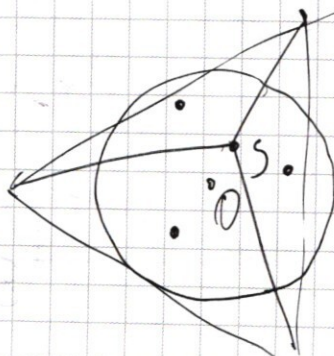
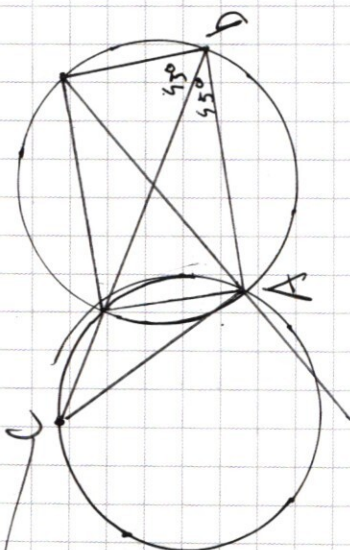
$$2^x - 2(2^{32} - 1)x = 76 - 3 \cdot 2^{34}$$

$$y \geq 2^x + 12 \cdot 2^{32}$$

$$y > 0$$

$$x=1 \quad y \geq 2 + 3 \cdot 2^{34} = 2(1 + 3 \cdot 2^{33})$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)$$



$$y^2 + xy - 4y = 2x^2 - 8x + 2xy$$

$$y(y + x - 4) = 2x(x - 4 + y)$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$(x y^2)^{-2 \ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$y = 2x, \quad (4x^3)^{-2 \ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$(4x^3)^{-2 \ln x} = (2x)^{-\ln(\frac{x}{2})}$$

$$2 \cdot x^{-6 \ln x} = 2 \cdot x^{-\ln(\frac{x}{2})} = 2 \cdot x^{-\ln(\frac{x}{2}) - (\ln x^6 - \ln 2)} = 2 \cdot x^{-\ln(\frac{x}{2}) - \ln x^6 + \ln 2}$$

$$= 2 \cdot x^{-\ln x^6 - \ln 2} = 2 \cdot x^{-\ln x^6} \cdot x^{-\ln 2} = 2 \cdot x^{-6 \ln x} \cdot x^{-\ln 2}$$

$$= 2 \cdot x^{-6 \ln x} \cdot x^{-\ln 2} = 2 \cdot x^{-6 \ln x} \cdot x^{-\ln 2}$$

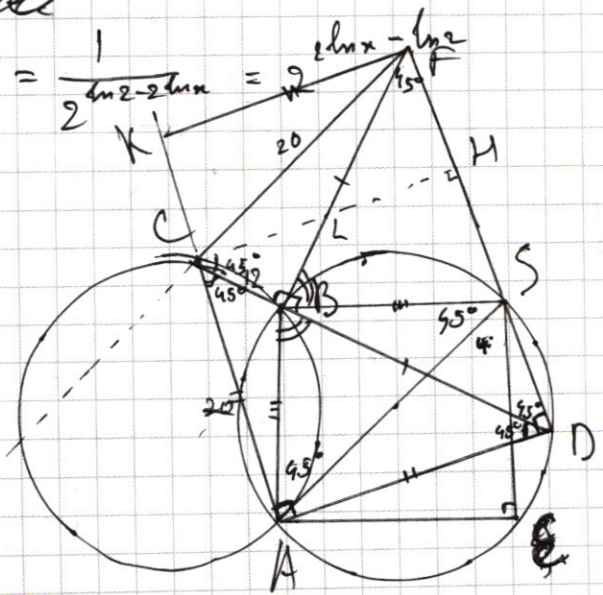
$$x = 2 \cdot x^{-6 \ln x} \cdot x^{-\ln 2} = 2 \cdot x^{-6 \ln x - \ln 2}$$

$$\frac{\ln 2 - 2 \ln x}{2} = 1$$

$$\ln 2 - 2 \ln x = 0$$

~~xxxx~~

$$x^{\ln 2} = \frac{1}{2^{\ln 2 - 2 \ln x}} = \frac{1}{2^{2 \ln x - \ln 2}}$$



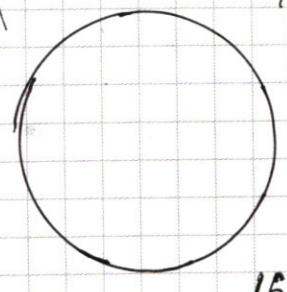
$$\cos(\frac{\sqrt{10}}{4} + \alpha) = \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{3}{5} - \frac{4}{5}) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{DM}{HF} \cdot \frac{FE}{LB} \cdot \frac{CB}{CD} = 1$$

$$FS = AD = AC$$

$$FC = AS = 20$$

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



$$CH = HD$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{20}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{144}{400} - 1 = \frac{144}{200} - 1 = \frac{144}{200} - \frac{200}{200} = -\frac{56}{200} = -\frac{14}{50} = -\frac{7}{25}$$