МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1.

Разложим число 9261 на простые множители:

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Значит как минимум 2 цифры в 8-значном числе будут равны 1.

Возможны два варианта набора цифр:

1) три семерки, три тройки, две единицы

2) три семерки, девятка, тройка и три единицы $(9 = 3 \cdot 3)$

Других вариантов нет, т.к. при умножении двух цифр, ни одна из которых не равно 1 (то есть 3, 7 или 9), получается двузначное число.

Тогда рассмотрим количество чисел для этих двух вариантов:

1) $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{6}\cdot \cancel{2}} = 560$ чисел

кол-во размещений 7ки

количество размещений 3ки на оставшихся местах

2) $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!\cdot 3!} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4 = 560 \cdot 2 = 1120$ чисел

кол-во размещений 7ки

кол-во размещений 9ки

кол-во размещений тройки

Всего: $560 + 1120 = 1680$ чисел

Ответ: 1680 8-значных чисел.

Задание №2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \sin 2x \quad (1) \\ \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x) \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$

$\frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k = 2x$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Задание №3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \quad (2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$

$\frac{y}{x^7} > 0$

т.к. $x > 0 \Rightarrow y > 0$

(1) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$(y + x - 4)(y - 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 4 - x \\ y = 2x \end{array}\right.$$

(2) Подставим y из (1).

1) $y = 2x$

$(x^6 \cdot 16)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

Прологарифмируем.

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\ln (16x^6)^{-\ln x} = \ln (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$-\ln x \cdot (\ln 16 + 6\ln x) = (\ln 2 - 6\ln x)(\ln 2 + \ln x)$

$-4\ln x \cdot \ln 2 - 6\cancel{\ln^2 x} = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 6\ln x \ln 2 - 6\cancel{\ln^2 x}$

$\ln x \ln 2 = \ln^2 2$

$\ln x = \ln 2$

$x = 2$

$y = 4$

2) $y = 4 - x$

$\left(x^2 (4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

Прологарифмируем

$\ln \left(x^2 (4-x)^4\right)^{-\ln x} = \ln (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

$-\ln x \cdot (2\ln x + 4\ln(4-x)) = (\ln(4-x) - 7\ln x)\cdot \ln(4-x)$

$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 7\ln x \ln(4-x)$

$\ln^2(4-x) - 3\ln x \ln(4-x) + 2\ln^2 x = 0$

$(2\ln x - \ln(4-x))(\ln x - \ln(4-x)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \ln x^2 = \ln(4-x) \quad (3) \\ \ln x = \ln(4-x) \quad (4) \end{array}\right.$$

(3) $x^2 = 4 - x$

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 4\cdot 4 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

т.к. $x > 0$ по ОДЗ, то $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$y = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

(4) $x = 4 - x$

$2x = 4$

$x = 2$

$y = 2$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Задание №5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & ① \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & ② \end{cases}$$

Построим графики этих функций

Раскроем модули:

① 1) $y \geq -5 \quad x \geq 0 \quad y+5 \geq x$

$\cancel{y=0}$ $2(y+5)=10 \quad y=0$

2) $y \geq -5 \quad x \geq 0 \quad y+5 < x$

$2x=10 \quad x=5$

3) $y \geq -5 \quad x < 0 \quad y+5 \geq -x$

$2(y+5)=10 \quad y=0$

4) $y \geq -5 \quad x < 0 \quad y+5 < -x$

$-2x=10 \quad x=-5$

5) $y < 5 \quad x \geq 0 \quad -(y+5) \geq x$

$-2(y+5)=10 \quad y=-10$

6) $y < -5 \quad x \geq 0 \quad -(y+5) < x$

$2x=10 \quad x=5$

7) $y < -5 \quad x < 0 \quad -(y+5) \geq -x$

$-2(y+5)=10 \quad y=-10$

8) $y < -5 \quad x < 0 \quad -(y+5) < -x$

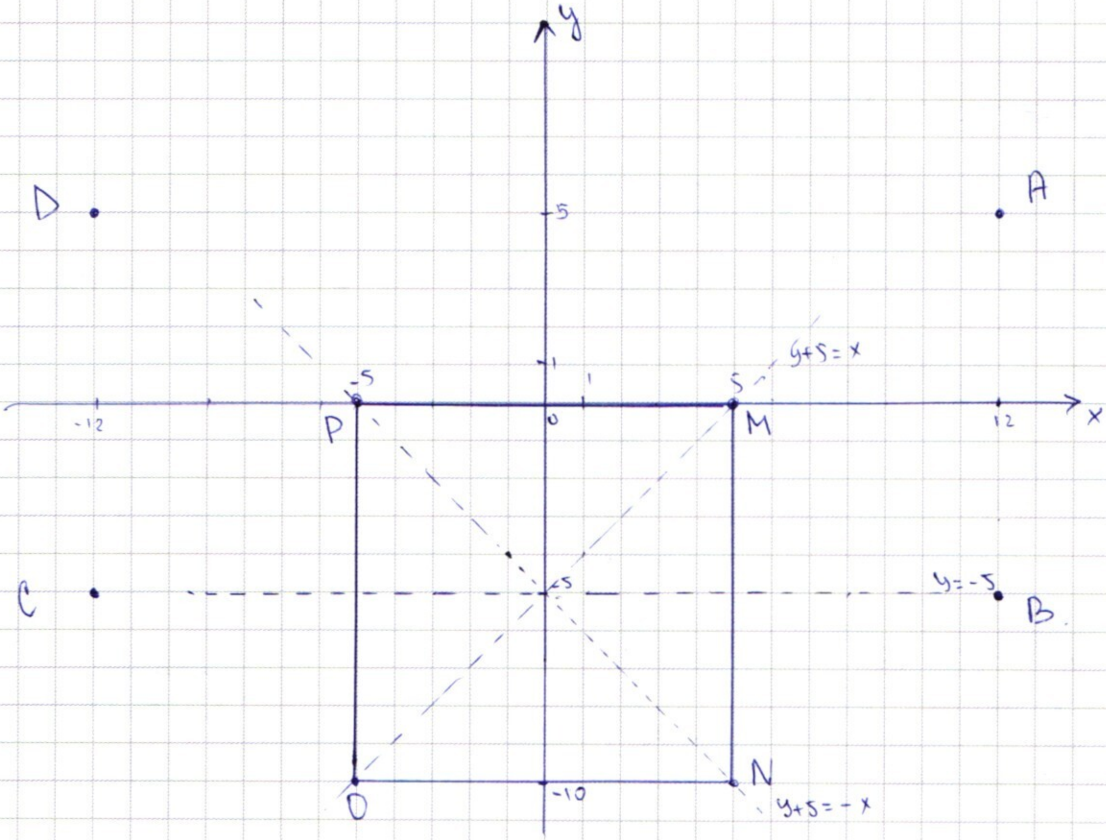
$-2x=10 \quad x=-5$

② ~~$x=12$~~ Построим $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ преобразованиями

1. $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - ~~график~~ окружность с центром в точке $(12;5)$ и радиусом $\sqrt{a}$
2. $(|x|-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - отражением гр.1. ~~по~~ относительно оси OY
3. $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - отражением гр.2. относительно оси Ox.

Построим графики ① ~~и~~ ② и отметим центры окружностей графика ②.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Заметим, что при подставлении в а какое-либо значение, график становится симметричным относительно оси OY => количество точек пересечения ① и ② в правой части равно количеству точек пересечения в левой. Т.к. решения должно быть 2, то в правой части должна быть ровно одна точка пересечения (=> у каждой окружности не более одной точки пересечения с ①)

Обозначим центры окружностей правой части ~~1 и 2~~ A и B

~~Расс~~ $\rho(A;①) = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$\rho(B;①) = \sqrt{0+49} = \sqrt{49} = 7$

| => B ближе ко ① графику => при увеличении a окружность с центром B первой коснется гр 1.

При $a = (\rho(B;①))^2 = 49$, C и B коснутся графика ① => 2 точки пересечения => $a=49$ подходит.

При $a > 49$; $a^2 \leq \sqrt{17^2+25}$ график ② будет пересекать ① более, чем в ~~одной~~ двух точках

(при $a^2 = \sqrt{17^2+5^2}$ C и B ~~коснутся~~ пересекут ① в точках M; N; O; P, т.к. $CM = CN = BP = BO = \sqrt{17^2+5^2}$)

При ~~а~~ $a^2 > \sqrt{17^2+5^2}$ окружности с центрами (С и В) больше не будут пересекать (1) => найдем такую a, что окружности (с центрами) А и В будут пересекать (1) каждая в одной точке.

Заметим, что это случится, когда радиус окружностей будет равен или AM или AO, но $AM < \sqrt{17^2+5^2}$

$$\left(\begin{array}{l}\sqrt{74} < \sqrt{289+25} \\ 74 < 314 \text{ верно}\end{array}\right)$$

$r = AO = \sqrt{17^2+15^2} = \sqrt{514}$

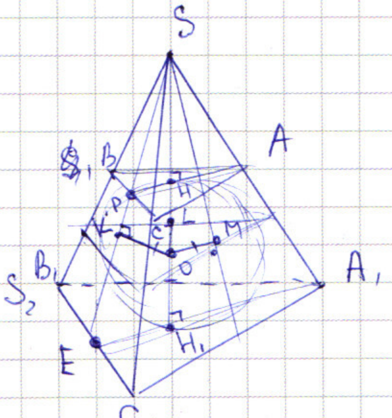
~~$a = AO^2$~~ $a = r^2 = AO^2 = 514$

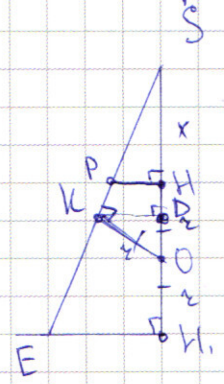
При $a > 514$ точек пересечения графиков (1) и (2) больше не будет

Ответ: $a \in \{49; 514\}$

Задание №4

Выносной рисунок:





~~Дано:~~

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ т.к. их углы равны.

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

2) $OH = OK = OH_1 = r$

$\frac{KH}{EH_1} = k = \frac{1}{4}$ (отрезки в подобных тр.)

$\angle S$ - общий

$\angle H = \angle H_1 = 90°$

$\Rightarrow \Delta SPH \sim \Delta SEH_1$ с коэф. подобия $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$\frac{SH}{SH_1} = \frac{1}{4}$

$\frac{x}{x+2r} = \frac{1}{4}$

$r = 1,5x$

$SO = x + r = 2,5x$

$KO = r = 1,5x$

$\sin(\angle KSO) = \frac{KO}{SO} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

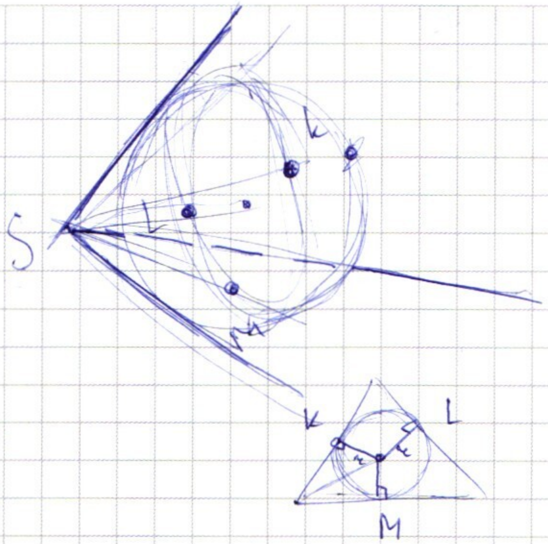
Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

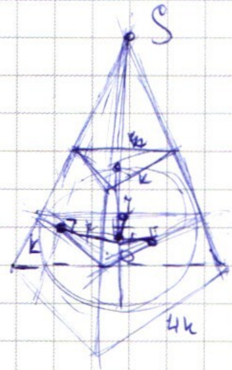
3) Заметим, что для каждой из точек K, L, M, треугольники ΔKOS, ΔLOS, ΔMOS будут равны ($\angle K = \angle L = \angle M = 90°$, SO общая, $OK = OM = OL = r$)
=> высоты из точек K, L, M ~~уже~~ совпадут в одной точке =>
$(KML) \perp SO$ (если две пересекающиеся прямые в плоскости $\perp$ другой прямой, то эта плоскость $\perp$ данной прямой)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

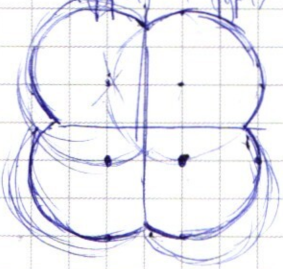
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

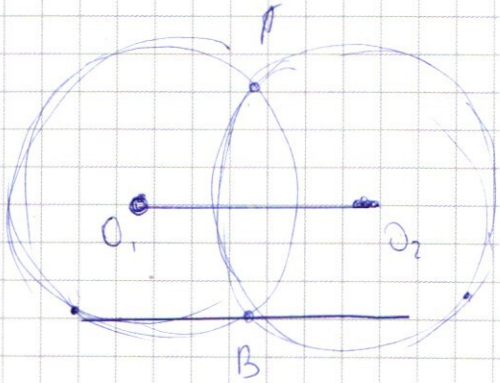


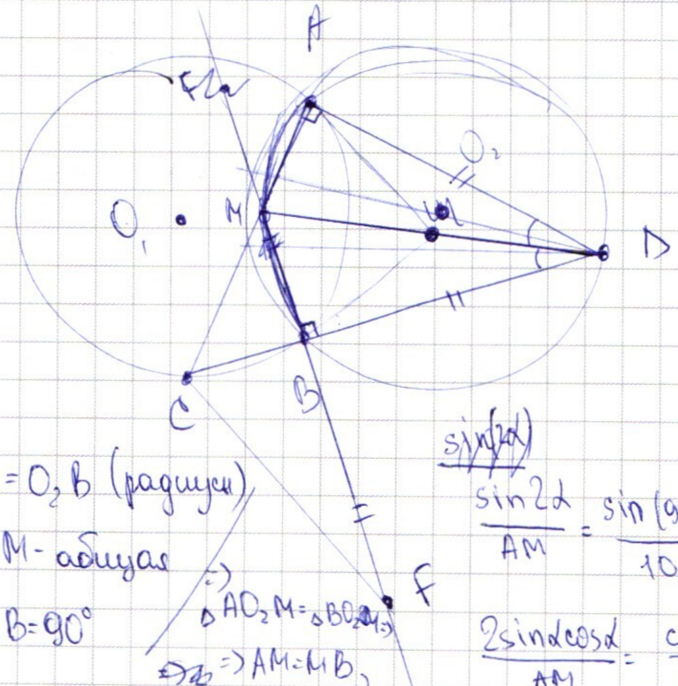


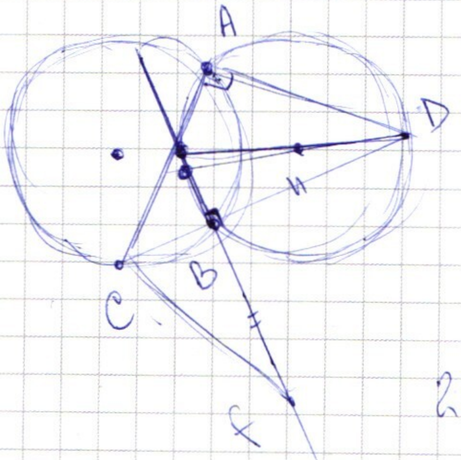
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$









$O_2A = O_2B$ (радиусы)

O_2M - общая

$\angle A = \angle B = 90°$

$\Rightarrow \triangle AO_2M = \triangle BO_2M \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = MB$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle BMD$

$\sin(2\alpha)$

$\frac{\sin 2\alpha}{AM} = \frac{\sin(90-\alpha)}{10}$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{AM} = \frac{\cos\alpha}{10}$

$20\sin\alpha = AM = MB$

$BD = \sqrt{400 - 400\sin^2\alpha} = 20\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin 90\cos\alpha - \sin\alpha\cos 90$

$|y+5+x| + |y+5-x| = 10$

$(y+5+x)^2 + (y+5-x)^2 + 2|\quad|\quad| = 100$

$y^2 + 10y + \cancel{2xy} + 25 + \cancel{10x} + x^2 + y^2 + x^2 + 10y - \cancel{2xy} + 25 - \cancel{10x} + 2|\ |\cdot|\ | = 100$

$2y^2 + 2x^2 + 50 + 20y + 2|\ ||\ | = 100$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y^2+x^2+10y+25+|x+y+5||y-x+5|=50$

~~Если обе || < 0, то y+5<x~~ $\begin{cases} x+y+5<0 \\ y+5-x<0 \end{cases}$ $y<5$

$\begin{cases} \cancel{y+5<0} & y+5<-x \\ \cancel{y<5} & y+5<x \end{cases}$

$x=1$

$|6+y|+|y+4|=1$

$\cancel{|7+y|+}$

~~Если обе || > 0, то~~

$\cancel{|(y+5)^2-x^2|}$ $y+5>x$ $y=$

$y+5<-x$

$|(y+5)+x|+|(y+5)-x|=10$

1) $\cancel{(y+5)\geq x\ ,\ (y+5)\geq 0}$

$\cancel{(y+5)+x+(y+5)-x=0}$

$\cancel{2(y+5)=0}$

$\cancel{y=-5}$

2) $\cancel{(y+5)<x\ ;\ (y+5)\geq 0-x\ ;\ x\geq 0}$

$(y+dx+a)(y+cx+b)=\cancel{y^2-xy}\ y^2+cxy+by+dxy+cdx^2+bdx+$

$+ay+acx+ab=y^2+(c+d)xy+cdx^2+$

$+\cancel{(bd)x}\ (bd+ac)x+(b+a)y+ab=0$

$\begin{cases} c+d=-1 \\ cd=-2 \\ bd+ac=8 \\ b+a=-4 \end{cases}$ $-d-d^2=-2$

$d^2+d-2=0$

$(d+2)(d-1)=0$

$d=-2$ $c=1$

$d=1$ $c=-2$

$\frac{2x}{x^7}$

$\frac{2}{x^6}$

$b-2a=8$

$b+a=-4\ |\cdot 2$ | +

$3b=0 \Rightarrow b=0$

$a=-4$

$\left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x \end{array}\right.$

$(x^2\cdot 16x^4)$

$(16x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$(y+x-4)(y-2x)=y^2-2xy+xy-2x^2-4y+8x=0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\ln(x)\cdot\log_{-}(16x^6) = \ln\left(\frac{2}{x^6}\right)\cdot\log_{-}2x$

$\ln(x)\cdot\log_{-}(16x^6) = \ln\frac{x^6}{2}\cdot\log_{-}2x$

$\cancel{\log_2(16\cdot 32) = \log_{2x}(2^4\cdot 2^5)}$

$\ln x\cdot(\ln 16 + 6\ln x) = (\ln x^6 - \ln 2)\cdot(\ln 2 + \ln x)$

$\cancel{6\ln^2 x} + \ln 16\ln x = \ln 2\cdot 6\ln x + \cancel{6\ln^2 x} - \ln^2 2 - \ln 2\cdot\ln x$

$\ln x(\ln 16 - 5\ln 2) + \ln^2 2 = 0$

$\ln x = \frac{\ln^2 2}{\ln 16 - 5\ln 2} \quad \frac{\ln^2 2}{4\ln 2 - 5\ln}$

$x = e^{\left(\frac{\ln^2 2}{\ln 16 - 5\ln 2}\right)}$

$4\ln$

$y = 2e^{(\quad)}$

$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$(2a-b)(a-b) = 0$

$\cancel{2a^2 - ab - 2ab + b^2}$

$\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

$-\ln x\cdot(2\ln x + 4\ln(4-x)) = (\ln(4-x) - 7\ln x)\ln(4-x)$

$-2\ln^2 x - 4\ln x\cdot\ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 7\ln x\ln(4-x)$

$3\ln x\ln(4-x) - \ln^2(4-x) - 2\ln^2 x = 0$

$(2\ln x - \ln(4-x))(\ln x - \ln(4-x)) = 0$

$\cancel{\ln x = \frac{1}{2}\ln}$

$\ln x^2 = \ln(4-x)$

$x^2 = 4 - x$

$x^2 + x - 4 = 0$

$\cancel{x}\ D = 1 + 4\cdot 4 = 17$

$\ln x = \ln 4 - x$

$x = 4 - x$

$2x = 4$

$x = 2$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$\overbrace{2^x + 3 \cdot 2^{34} \quad 76 + 2(\cancel{8}2^{32} - 1)x}$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} \cancel{4} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 19 \cdot 4 + 2(2^{32} - 1)x$

$2^{(x-1)} + 3 \cdot 2^{33} < 19 \cdot 2 + 2^{32} \cdot x - x$

$2^{(x-1)} + 2^{32}(6 - x) + x - 19 \cdot 2 < 0$

~~Заметим, что при $x \leq 6$ выражение принимает положительные значения, т.к. $2^{32} >>$~~

$|(y+5) + x| + |(y+5) - x| = 10$

1) $y \geq 5 \quad x > 0 \quad y + 5 > x$

$y = \cancel{18}\ 0$

2) $y > -5 \quad x > 0 \quad y + 5 < x$

$x = 5$

3) $y \geq -5 \quad x < 0 \quad y + 5 > -x$

$y = \cancel{+8}\ 0$

4) $y > -5 \quad x < 0 \quad y + 5 < -x$

$x = -5$

5) $y < -5 \quad x > 0 \quad -(y+5) > x$

$\cancel{x = -15}$

$y = -10$

6) $y < -5 \quad x > 0 \quad -(y+5) < x$

$x = 5$

7) $y < -5 \quad x < 0 \quad -(y+5) > -x$

$y = -10$

8) $y < -5 \quad x < 0 \quad -(y+5) < -x$

$x = -5$

$y > x - 5$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9261 = 3^2 \cdot 1029 = \cancel{3^4} \cdot 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

$49 \cdot 7 = 343$

$\begin{cases} 777 \quad 333 \approx C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot2} = \boxed{= 8\cdot7\cdot10 = 560} \\ 777 \quad 93 \approx C_8^3 \cdot 5\cdot4 = 5\cdot4\cdot\frac{8!}{3!\,5!} = \end{cases}$

$= \frac{8!}{3!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot5\cdot4}{} = 20\cdot8\cdot7 = 560\cdot2 = 1120$

$1120 + 560 = 1680$

$560 \cdot 3 = 1680$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = \cancel{2\sin 90 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\frac{\sqrt3}{2} - \frac12 = \frac{\sqrt3-1}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

$-\frac12$

$\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} +$

$+ \sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac12\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac12\sin\beta\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac12\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} + \ldots =$

$= \frac12\sin\alpha + \frac12\sin\beta = \frac{\beta}{}$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} =$

$= \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$1 - \cos\beta \quad -1 + \cos\alpha$

$\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$= \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos\alpha - \cos\beta = \cancel{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 - 2\cos^2\frac{\beta}{2} + 1 = 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\right) =$

$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \cdot \sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cdot \cos 2x$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\sqrt{2}\cos 4x = \sqrt{2}}$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cancel{2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x) = 0}$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

$\cos 2x = \sin 2x$ $\qquad$ $\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$\cancel{2\cos^2 x - 1 = 2\cos x \sin x}$ $\qquad$ $7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k$

$\cos 2x \cdot \sin 90^\circ + \cos 90 \cdot \sin 2x =$ $\qquad$ $5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$= \sin(90 + 2x)$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k$

$\sin(\cancel{90}\frac{\pi}{2} + 2x) = \sin 2x$

$\frac{\pi}{20} + \frac{8\pi}{20}$ $\quad$ $\frac{16}{20}$

$2\pi k + \frac{\pi}{2} + 2x = 2x + \cancel{2\pi k}$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ ОДЗ: $x > 0$

$\frac{y}{x^7} > 0 \Rightarrow y > 0$

$\cancel{(y - x - 2)}(y - x - 2) = y^2 - xy - 2y - xy + x^2 - 2x - 2y - 2x + 4 =$

$= y^2 + x^2 - 2xy - 4y - 4x + 4$

$(y - \cancel{5}(x+2))(y + \cancel{5}(x+2)) = y^2 - (x+2)^2 = y^2 - 2x^2 + 8x + 8$

$\cancel{4 - \sqrt{17}}$ $\quad$ $4 \to \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

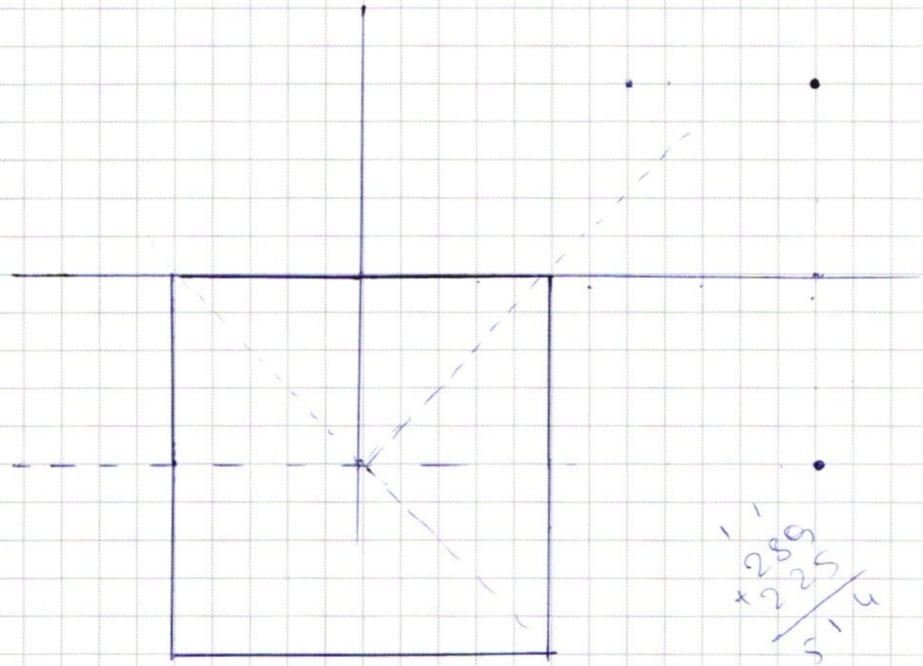
$8 \to \sqrt{17} - 1$

$9 \to \sqrt{17}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

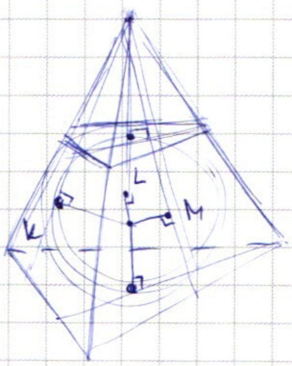
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

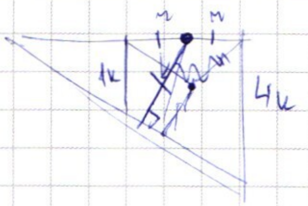
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

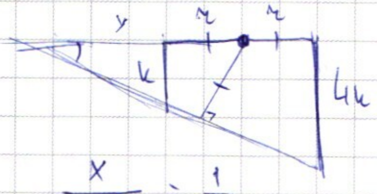


$$\begin{array}{r} 289 \\ +\,225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\,17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ +\,25 \\ \hline 314 \end{array}$$







$$\frac{x}{x+2r} = \frac{1}{4}$$

$$x + 2r = 4x$$

$$\cancel{3}\,2r = 3x$$

$$r = 1{,}5\,x$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)