МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

1029 $\quad$ 343 | 7 $\quad$ 28 $\quad$ 49 $\quad$ 63

Числа восьмизнач; значит можно использовать наборы

3 3 3 1 7 7 11 $\quad$ 1)

9 3 7 7 7 111 $\quad$ 2)

Осталось только подсчитать кол-во случаев

1) 3, 7, 1 → 3, 7, 1, 3, 7, 1, 3, 7, 1

3 · 3

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2} - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 0$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos x + \sin x)) = 0$

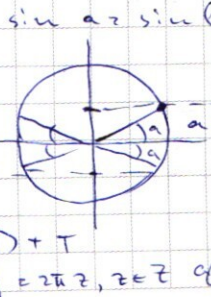
$\cancel{\cos 2x - \sin 2x = 0}$

$2\sin 7x - \sqrt{2}\,\cancel{\cos x}(\sin x + \cos x) = 0$ $\qquad \sin a = \sin b$

$\sqrt{2}\sin 7x - \sqrt{2}\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

~~7x = sin~~



$\sin b > 0$: $a_1 = b + T$, $a_2 = \pi - b + T$

$\sin b < 0$: $a_1 = b + T$, $a_2 = -(\pi + b) + T$

T – период $= 2\pi z,\ z \in \mathbb{Z}$

$\sin b < 0$: $a_1 = b$, $a_2 = \pi - b$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

$\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sin 2x - \cos 2x = 0$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

~~Исходное выражение равносильно:~~

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \begin{cases} \sin 7x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = 7x + 2\pi q_1, \ (2) \quad q_1 \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x + 2\pi p_1 \ (3) \quad p_1 \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = 7x + 2\pi q_2 \ (1') \quad q_2 \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = -(7x + \pi) + 2\pi p_2 \ (4) \quad p_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} 2\pi m_1 \leq 7x \leq \pi + 2\pi m_1, \ m_1 \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} 6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi q_1 \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \end{array}\right. \end{cases} \\ \pi + 2\pi m_2 \leq 7x \leq 2\pi + 2\pi m_2, \ m_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

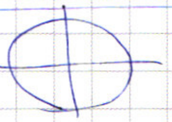
(1) и (2) – одну дают сист

~~$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$~~

~~$6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi q$~~

~~$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi q}{3}, \ q \in \mathbb{Z}$~~

(3) и (4) различ на 2π их



$\sin a = \sin b$

$a = b$

$a = \pi - b$

Исходное выражение равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = 7x + 2\pi q, \ q \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x + 2\pi p, \ p \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \\ 6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi q, \ q \in \mathbb{Z} \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi p, \ p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi q}{3}, \ q \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi p}{4}, \ p \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x = \frac{12\pi}{96} + \frac{48\pi n}{96} \\ x = \frac{8\pi}{96} + \frac{32\pi q}{96} \\ x = \frac{9\pi}{96} + \frac{24\pi p}{96} \end{array}$$

$9 + 24n$ – нечетн

$12 + 48n = 8 + 32q$

$4 + 48n = 32q$

$1 + 12n = 8q$

$12n$ – четн

$1 + 12n$ – нечетн $\Rightarrow$ пересечений нет

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi q}{3}, \ q \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi p}{4}, \ p \in \mathbb{Z}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0\end{cases}$$

$\begin{cases}x>0 \\ y>0\end{cases}$ — из $\ln(x)$, $\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)$

$(y^2 - 4y + 4) - 2(x^2 - 4x + 4) = xy + 8$

$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = xy + 8$

$x \neq 0$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 2 + \frac{8}{x} - 4\frac{y}{x^2}$

$y^2 - (x+4)y - 2x(x-4) = 0$

$y_1 \cdot y_2 = -2x(x-4) = (4-x)2x$

$y_1 + y_2 = x+4$

$y_1 = 2x \quad y_2 = (4-x)$

$16(x^2 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$ $\quad \cancel{(4-x)^4 x^2}$

$\cancel{16\, x^{6\ln\frac{1}{x}} = (2x)^{6\ln\frac{\sqrt[6]{2}}{x}}}$

$16 \cdot x^{6\ln\frac{1}{x}} = 2^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} \cdot x^{6\ln\frac{1}{x} + \ln 2}$

$x^{6\ln\frac{1}{x}} > 0 \left(16 - x^{\ln 2} \cdot 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\right) = 0$ $\quad x^{\ln 2} = x^{\log_x 2 \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln 2} = 2^{\ln x}$

$16 = 2^{\ln\frac{2}{x^6}} \cdot 2^{\ln x}$

$16 = 2^{\ln\frac{2}{x^5}}$

$\ln\frac{2}{x^5} = 4$

$\frac{2}{x^5} = e^4$

$x = \sqrt[5]{\frac{2}{e^4}} > 0$

$y = 2\sqrt[5]{\frac{2}{e^4}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$y = 4 - x \qquad x = 4 - y$

$x \in (0;4) \qquad y \in (0;4)$

$$\left((4-y)^2 y^4\right)^{-\ln(4-y)} = y^{\ln\left(\frac{y}{(4-y)^2}\right)}$$

$x^{\ln x} = \ldots$

$$\left(x^2 (4-x)^4\right)^{\ln\frac{1}{x}} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}}{(4-x)^{7\ln x}}$$

$$\frac{x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{3\ln x} - (4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{7\ln x}} = 0$$

$(4-x)^{7\ln x} > 0 \qquad (\neq 0)$

$$x^{-2\ln x + 3\ln(4-x)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$e^{\ln(4-x)\cdot\ln(4-x)} = e^{3\ln(4-x)\ln x} \cdot e^{-2\ln x \ln x}$$

$$\ln^2(4-x) = \ln(x)\left(\ln(4-x)^3 - 2\ln x\right)$$

$$\ln(x)\left(\frac{4-x}{x^{\frac{2}{3}}}\right) =$$

$$\ln^2 y = -2\ln^2 x + 3\ln(x)\cdot\ln(y)$$

~~$p^2 - 3pq + 2q^2 = 0$~~

Ответ: $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{e^4}},\ 2\sqrt[5]{\frac{2}{e^4}}\right) \ldots$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

$\frac{S_1'}{S_2} = (k)^2$

1) O_1, O_2 – т касания секущих плоскостей и сферы

$SO_1 = SO - R$

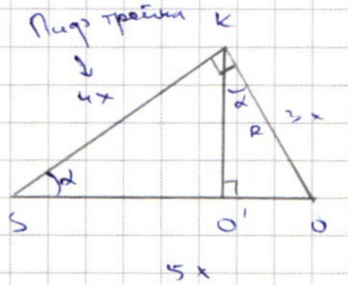
$SO_2 = SO + R$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} = \left(\frac{SO-R}{SO+R}\right)^2 = \left(\frac{SO+R-2R}{SO+R}\right)^2 = \left(1 - \frac{2R}{SO+R}\right)^2 = \left(1 - \frac{2}{\underbrace{\frac{SO}{R}}_{=\gamma}+1}\right)^2$

$SO+R \neq 0$

$R \neq 0$

2) Пиф. тройка



$\frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{\gamma+1}$; $\frac{2}{\gamma+1} = \frac{3}{4}$; $\gamma+1 = \frac{8}{3}$

$\gamma = \frac{5}{3} = \frac{SO}{R}$

$\gamma = \frac{SO}{KO}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{5}$

$\angle KSO = \alpha = \arcsin\frac{3}{5}$

O' – т пересеч KLM и SO

$KS = \sqrt{SO^2 - R^2}$

$KS = LS = MS$

в тетраэдре SKLM все ребра равны O' – ~~т~~ ц. впис окр в △KLM

$KO' \perp SO$ $LO' \perp SO$

~~$KLM \perp SO$~~

~~$KO' = 3x \cdot \cos\alpha = 3x \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}x$~~

$SO' = SK \cdot \cos\alpha = 4x \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}x$

$SO = 5x$

$R = 3x$

$\frac{S_{KLM}}{1} = \left(\frac{SO'}{SO-R}\right)^2 = \frac{\overset{=2^8}{16^2}}{5^2 \cdot 2^2}$, $S_{KLM} = \frac{2^6}{5^2} = \frac{64}{25}$

Ответ: $S_{KLM} = \frac{64}{25}$ $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$

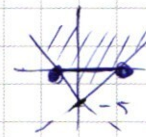
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$

1) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y > -x-5 \\ y > x-5 \end{cases}$



$2y+10=10$

$y=0$

$x \in [-5;5]$

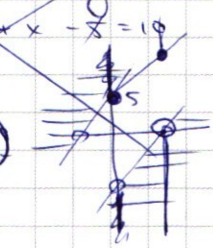
2) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ -x+y+5 < 0 \end{cases}$ $y \geq x+5$

$y < x-5$

$x+y+\cancel{x}-\cancel{y}+x-\cancel{5}=10$

$x=5$

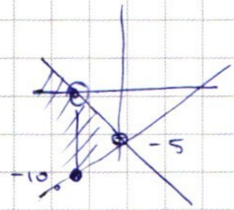
$y \in R \setminus [-5;5)$



3) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ -x+y+5 \geq 0 \end{cases}$ $-x-\cancel{y}-\cancel{x}+\cancel{y}-x+\cancel{5}=10$

$x=-5$

$\begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$



$x=-5$

$y \in [-10;0)$

4) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ -x+y+5 < 0 \end{cases}$

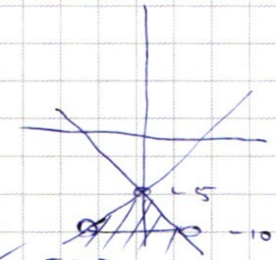
$y < -x-5$

$y < x-5$

$-x-y-5-y+x-5=10$

$y=-10$

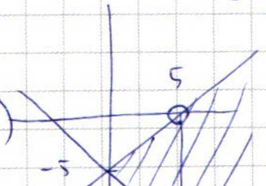
$x \in (-5;5)$



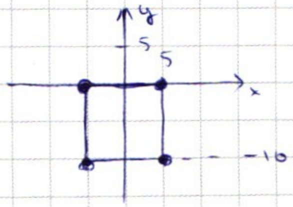
2) $\begin{cases} x+5+y \geq 0 \\ -x+y+5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$

$x=5$

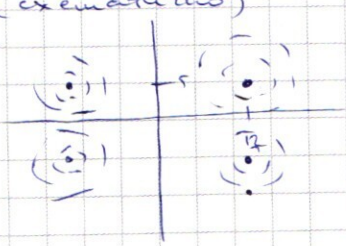
$y \in [-10;0)$



Мн-во реш (1):



Мн-во реш (2):
(схематично)

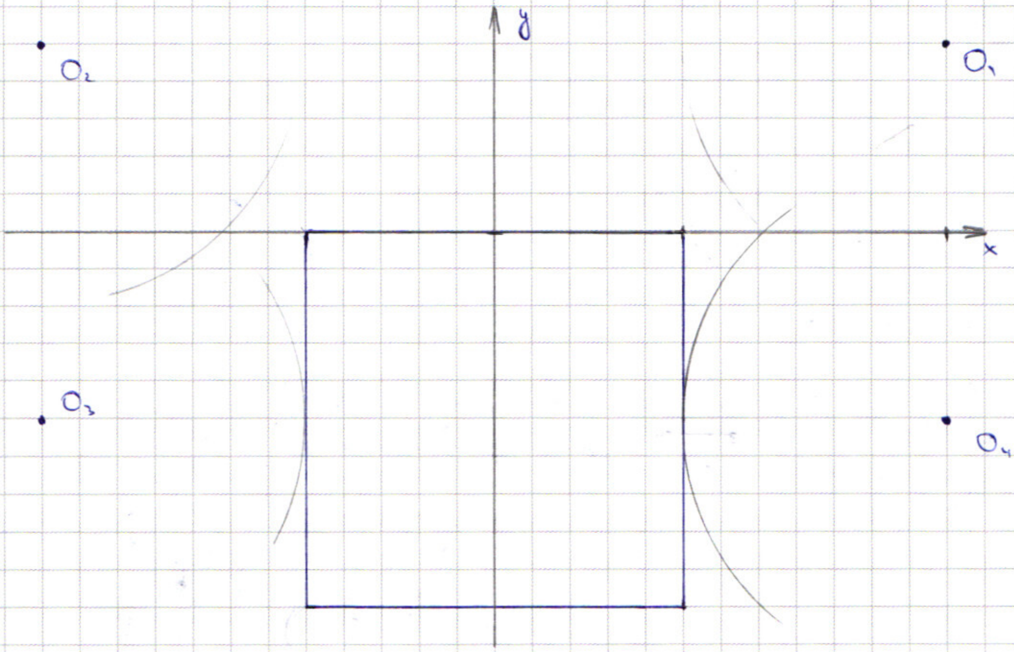


$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$

$|x|$ — мн-во симметрично отн Oy

$|y|$ — мн-во симметрично отн Ox

$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ — окр $R=\sqrt{a}$



I. ω_3 и ω_4 – касаются

$R = \sqrt{12-5} = \sqrt{7}$ $R = 12-5 = 7$

$a = R^2 = 49$

II. ω_1 и ω_2 – пересек ~~касаются~~

с углами квадрата

$R = \sqrt{(15^2) + 17^2} =$

$= \sqrt{225 + 289}$

$a = R^2 = 225 + 289 =$

$= 514$

225

$17^2 = 289$

17
17
119
17
289

289
225
514

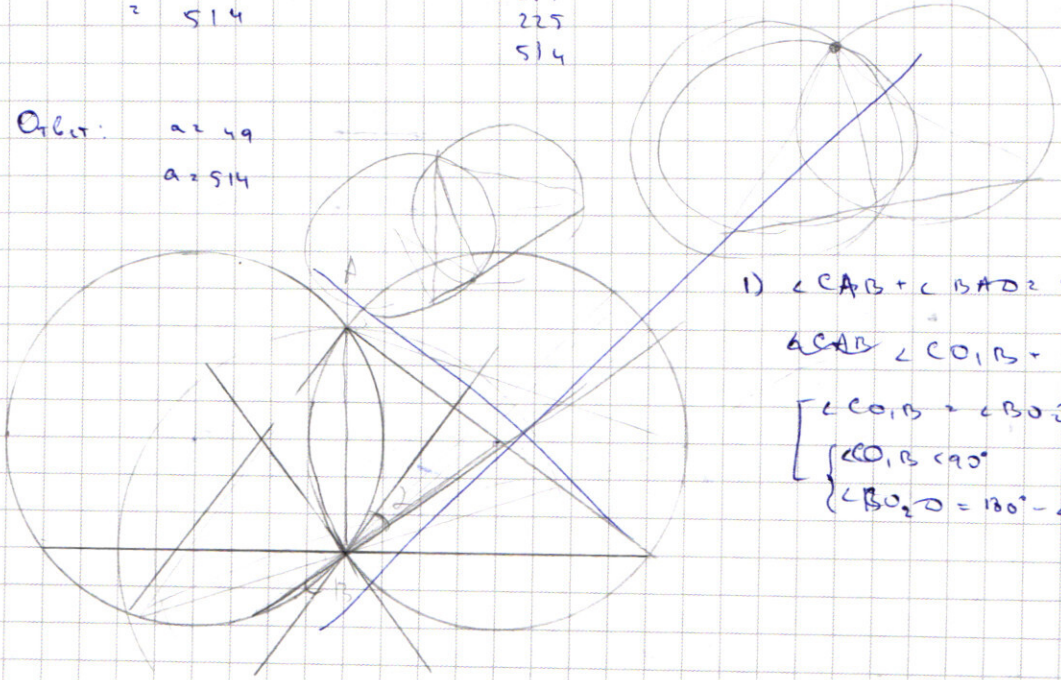
Ответ: $a = 49$

$a = 514$

III. После I надо искать вар-ты где т. пересеч совпад / у одной пары отсутствуют

O_4 и O_3 после касания всегда дают либо ~~пару~~ двеи пары пересеч (не удовлетвор) либо не пересекаются $R > \sqrt{25 + 17^2}$

O_1 и O_2 пересекаются ~~едим~~ дважды $R = \sqrt{74}$ – не удовлетвор



1) $\angle CAB + \angle BAD = 90°$

~~$\angle CAB$~~ $\angle CO_1B + \angle BO_2D = 180°$

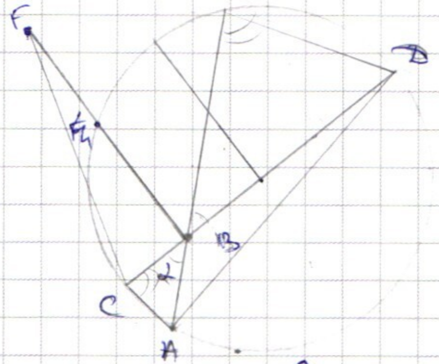
$\left[\begin{array}{l} \angle CO_1B = \angle BO_2D = 90° \\ \begin{cases} \angle CO_1B < 90° \\ \angle BO_2D = 180° - \angle CO_1B > 90° \end{cases} \end{array}\right.$ (2)

Ч. угл

Невозможно для Ч. угл

6. (продолжение)

Рассмотрим подробнее случ (2):



$\angle CAB + \angle BAD = 90°$

$\angle BAD \geq 45°$

Тогда $\triangle CAD$ можно впис

в окр, т.к. CD – диаметр (опир на $90°$)

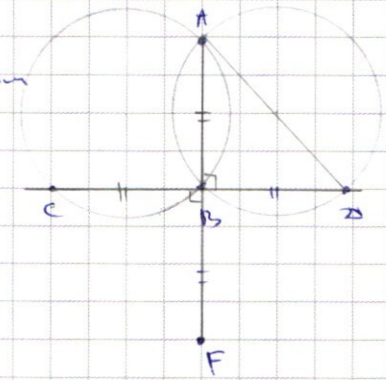
Решим задачу обратную задаче построения

а) Усл 1 $\angle CAD = 90°$ — B ~~принадлежит ω~~ $\in CD$

$\triangle CAD$ впис в ω — $A \in \omega$

Усл 2 $\triangle CBA$ можно впис

$\triangle DBA$ в окр-ти с одинаковым радиусом



$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R = \frac{AD}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{AD}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{\sin\alpha}(AC - AD) = 0$

т.к. $AC = AD$, значит $\alpha = 180°-\alpha$

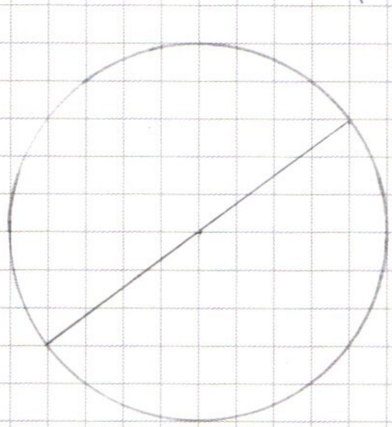
$\alpha = 90°$

$AB \perp CD$

$AB = CB = DB$

$BF = BD$.

$CF = AD = 2R = 20$



б) $BC = 12$

Да, как так-то?

Отв 10: $S = \frac{1}{2}(20)^2 = 200$

Отв 12: $S = \cancel{\frac{1}{2}(12)^2} = \frac{1}{2}(12\sqrt{2})^2 = 144$