

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Из всех цифр можно составить 4, потому что в числе равно четное количество цифр. Трижды можно (0 в числе нет, иначе умножения 0). Трижды можно 3, 6, 9, т.к. 9261 $\nmid 2$, 10 6 нет, значит в числе либо 3 и 9, либо три тройки. Важные цифры тогда должны быть единицами. Получаем два возможных цифровых числа: три 7, 3, 9, три 1 или три 7, три 3, две 1. Кол-во цифровых чисел $C_1 = \frac{8!}{3!3!} = 1120$, больших $C_2 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$. Итого $C = C_1 + C_2 = 1680$

Ответ: 1680.

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{4x}{2} = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin \frac{14x}{2} \cos \frac{4x}{2} = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x =$$

$$= -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\text{Допустим } \cos 2x + \sin 2x = 0, \text{ тогда } \tan 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} l, l \in \mathbb{Z}. (1)$$

$$\text{Проверим, подходит ли число. Тогда } 4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \cos 4x = 0$$

$$\Rightarrow \text{тогда } 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = 0, \text{ т.е. } \sin 7x \cos 2x = 0, \text{ а при значениях (1)}$$

$$\text{это не верно } \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x \neq 0. \text{ Делим уравнение } 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\text{на } \cos 2x + \sin 2x: 2 \sin 7x (\cos^2 2x - \sin^2 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) \cos 4x = 0$$

$$\text{т.к. } \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x, \text{ то } \cos 4x (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 0 \text{ или } \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$1) \cos 4x = 0, \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

При этом, подстановка $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z}$ равносильна не $\cos$, а $\sin$, так $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$, а $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$, то можно записать $\sin$ вместо $\cos$

$$(2), \text{ так как } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}; \text{ а из (1) } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} l, l \in \mathbb{Z}.$$

т.к. если (1) равносильно не $\cos$, то её нужно умножить на $\sin 2x$:

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in 2m+1, m \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } n \text{ — нечёт.}$$

$$2) \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x; \quad \sin 4x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x$$

$$\sin 4x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi d, d \in \mathbb{Z} \\ 4x + 2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi r + \pi, r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi d, d \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi r, r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n = 2m+1, m \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi d, d \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi r, r \in \mathbb{Z}$
 $\sqrt{3}$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \\ y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0, \quad D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = \\ = (3x-4)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x} \quad (\text{т.к. } \ln y, \ln x, x > 0, \text{ а из } \ln \frac{y}{x^7} > 0 \Rightarrow xy > 0, \text{ то } y > 0)$$

Прологарифмируем обе части:

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y; \quad -\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y \\ -2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y; \quad 2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$\text{Разделим это относительно } \ln y, \quad D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x = \ln^2 x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln y = \frac{3 \ln x \pm \ln x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

1) $y = 2x$, $2x = x^2$, $x(x-2) = 0$ $\begin{cases} x=0 & \text{не удов. для } x > 0 \\ x=2 \end{cases}$

$\Rightarrow x=2, y=4$

$2x = x$, $x=0$ — не реш.

2) $y = -x+4$, $-x+4 = x^2-8x+16$, $x^2-7x+12=0$ $\begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, первая точка не удов. $y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

$-x+4 = x \Rightarrow x=2$, $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: ~~$(2;2), (2;4), (3;1)$~~

Заметим, что подставив все 3 пары в уравнение исходное уравнение, найдем, что $(2;2)$ и $(2;4)$ удов. уравнению, а $(3;1)$ нет

Ответ: $(2;2), (2;4)$.

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

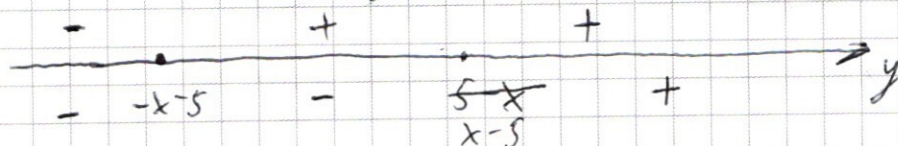
Чтобы построить график функции $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

найдем критические точки функции и точки экстремума подмодульных выражений

$x+y+5 > 0$, $y > -x-5$; $y-x+5 > 0$, $y > x-5$. Т.к. знак x неизвестен,

то рассмотрим отдельно $x > 0$ и $x < 0$.

Нам дан 1) $x > 0$, на графике знак кривой модуля, поэтому берем

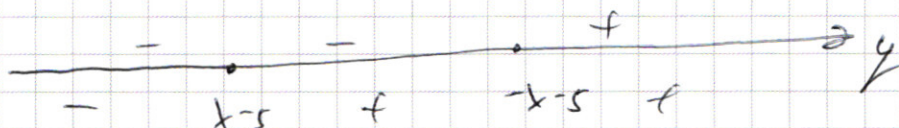


1) $y < -x-5$; $-x-y-5-y+x-5=10$, $y=-10$; $-10 < -x-5 \Rightarrow x < +5$, и $x > 0$

2) $-x-5 \leq y \leq \overset{x-5}{5-x}$; $x+y+5-y+x-5=10$; $x=5$; $-10 \leq y \leq 0$

3) $y > \overset{x-5}{5-x}$; $x+y+5+y-x+5=10$; $y=0$; $0 > x-5$; $x < 5$; $x > 0$

Тогда если $x < 0$, тогда $5-x < -x-5$, тогда

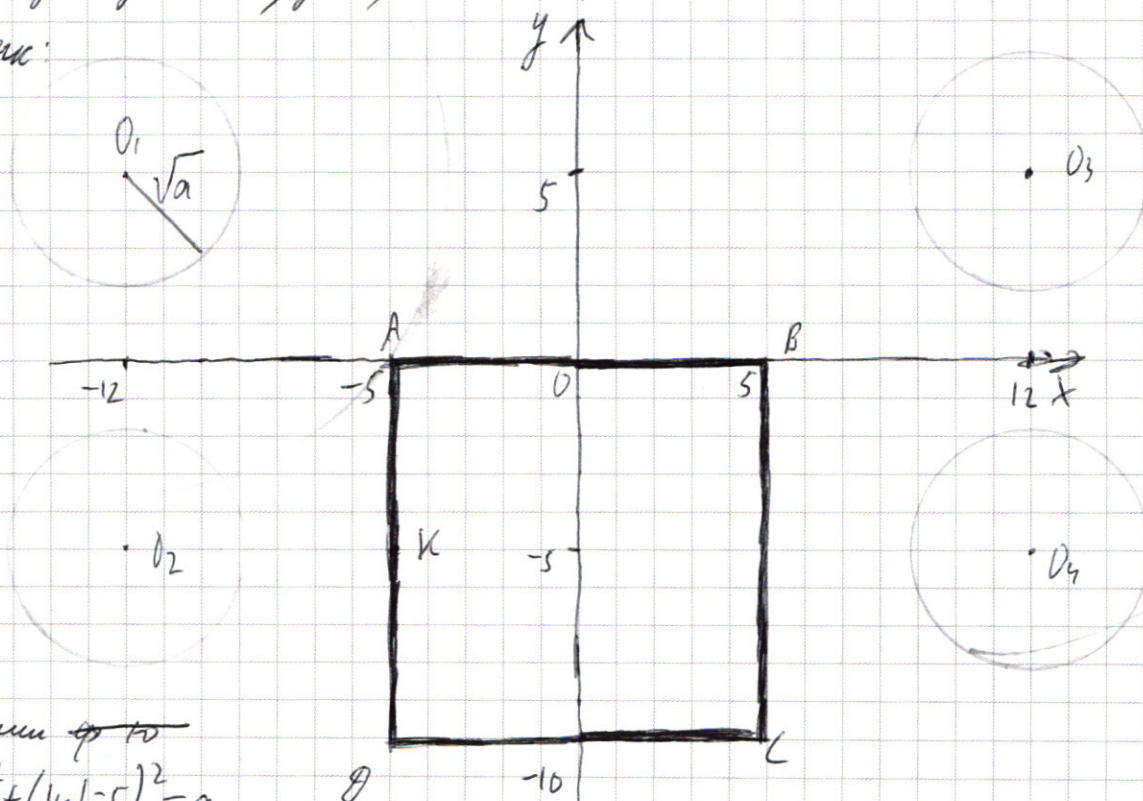


4) $y < x-5$; $-x-y-5-y+x-5=10$, $y=-10$, $-10 < x-5$, $x > -5$, $x < 0$

5) $x-5 \leq y \leq -x-5$; $-x-y-5+y-x+5=10$; $x=-5$; $-10 \leq y \leq 0$

6) $y > -x-5$; $x+y+5+y-x+5=10$; $y=0$; $0 > -x-5$, $x > -5$, $x < 0$

Рисуем график:



Теперь рассмотрим уравнение $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$.

Пусть x и y неотрицательны. Тогда $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$. Это уравнение описывает окружность с центром $(12; 5)$ и радиусом $\sqrt{a}$. И.к. $|x|=x$, $|y|=y$, то

и окружность симметрична относительно осей и центра координат

Центрами решений уравнения $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$, т.е. решений на

координатной плоскости — четыре окружности. Т.к. полученные уравнения симметричны,

то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Исходная имеет два решения, если общее число касаний двух кривых
окружностей с радиусом 1. Полагая, что ^{внутренняя} левая окружность касается
в радиусах в точках A или C, то внутренняя окружность касается стороны AB в
точке K (K-сердечина AD). Если окружность с центром O₁ касается кривой в точке
A, то окружность с центром O₂ имеет два касания с кривой, что не подходит.
Если внешняя окружность касается в точке C, то внутренняя не имеет с кривой
общих точек $\Rightarrow$ это решение, $R = O_1C = \sqrt{4^2 + 15^2} = \sqrt{511}$, $\alpha = R^2 = 511$
Теперь Внутренняя касается внутренней окружности стороны AB внешняя окружность
имеет точку касания с кривой, поэтому это решение, $R = 12 - 5 = 7$, $\alpha = R^2 = 49$
Ответ: 49; 511.

№4.

Дано: $S_{\triangle ABC} = 7$, $S_{\triangle A_2B_2C_2} = 16$.

Найти: $\angle KSO$, $S_{\triangle A_2B_2C_2}$

Решение: 1. и в вершинах

выражая три угла, то

а площади оснований параллельны,

то выражения $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ и $S_{\triangle A_2B_2C_2}$

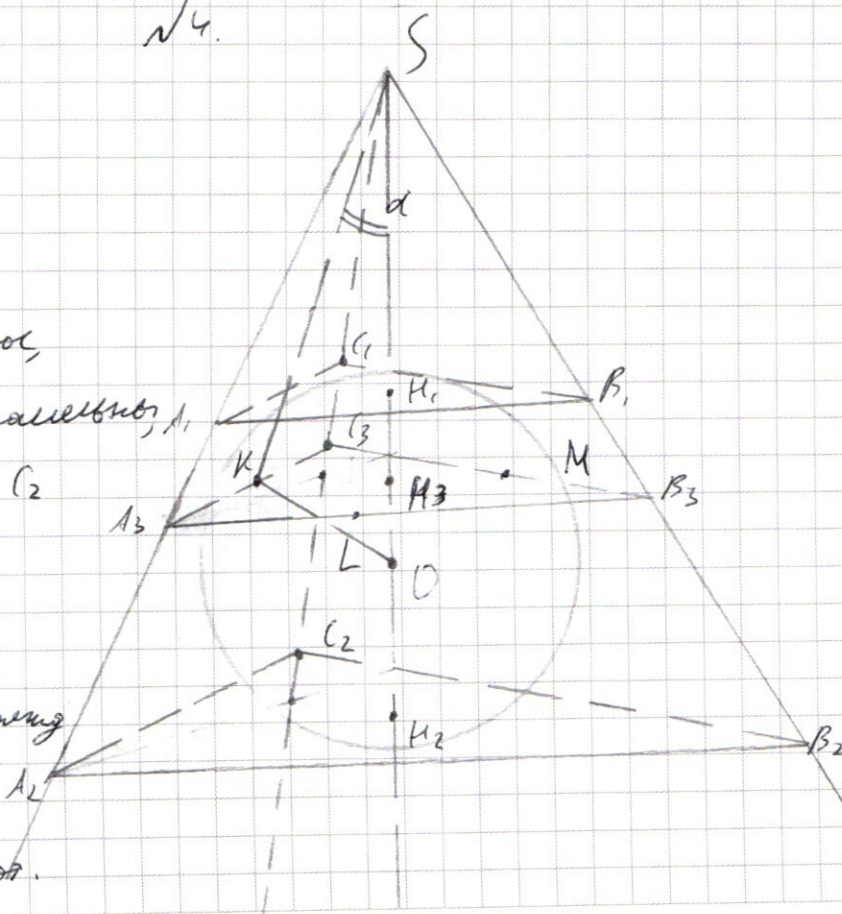
поэтому пусть $SO \perp A_1B_1C_1 = H_1$,

$SO \perp A_2B_2C_2 = H_2$.

Тогда площади оснований выражаются

отношение как ^{квадрат} линейных

размеров, а значит и высот.



$$7, 0. \frac{S_{\Delta ABC_1}}{S_{\Delta ABC_2}} = \left(\frac{SH_1}{SH_2} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{SH_1}{SH_2} \right)^2 = \frac{1}{16} \quad / \quad \frac{SH_1}{SH_2} = \frac{1}{4}.$$

Пусть радиус сферы R , $SH_1 = d$, тогда $SH_2 = R + d + 2R$
 $\Rightarrow \frac{d}{d+2R} = \frac{1}{4}, \quad 4d = d+2R, \quad d = \frac{2}{3}R.$

Тогда $OK = R$, $OK \perp SK$, $SO = R + d = \frac{5}{3}R$

Тогда $\sin \alpha = \frac{OK}{OS} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}, \quad \alpha = \arcsin \frac{3}{5}.$

Поскольку сечение ΔB_3C_3 ~~также равно~~, содержащая K, L, M , также перпендикулярна SO . Пусть $SO \cap \Delta B_3C_3 = H_3$.

Тогда KH_3 — высота $\Delta SKH_3 \Rightarrow \angle OKH_3 = \alpha. \Rightarrow OH_3 = OK \sin \alpha =$
 $= \frac{3}{5}R, \Rightarrow SH_3 = OS - \frac{3}{5}R = \frac{5}{3}R - \frac{3}{5}R = \frac{16}{15}R$

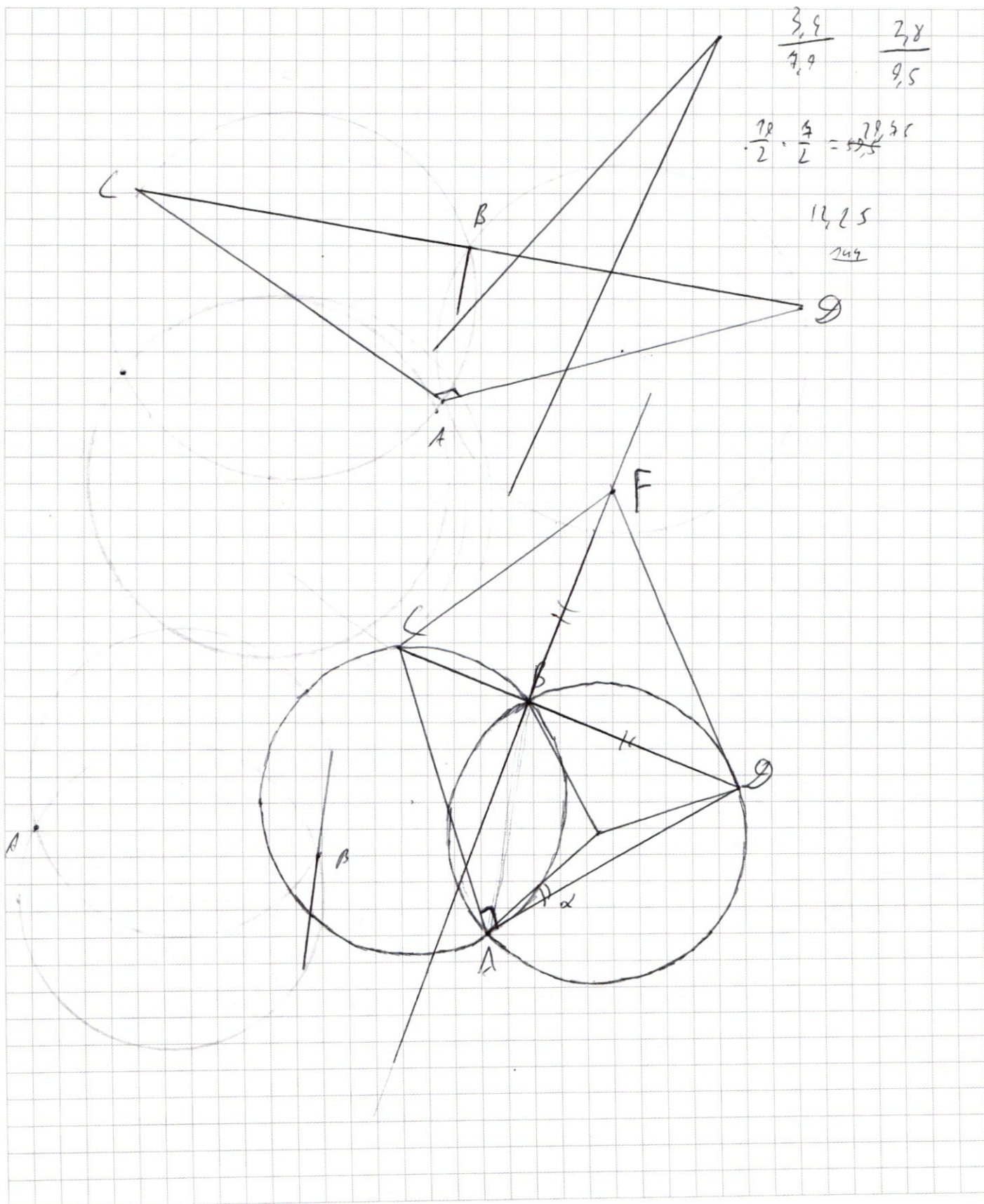
Тогда, т.к. пирамиды ΔABC_1 и ΔAB_3C_3 подобны,

$$\frac{S_{\Delta AB_3C_3}}{S_{\Delta ABC_1}} = \left(\frac{SH_3}{SH_1} \right)^2 = \left(\frac{\frac{16}{15} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} \right)^2 = \left(\frac{8}{5} \right)^2 = \frac{64}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AB_3C_3} = \frac{64}{25} S_{\Delta ABC_1} = \frac{64}{25}.$$

Ответ: $\frac{64}{25} = 2,56.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cancel{x-5 < 5-x}, \quad x-x > 10$$

$$5-x$$

$$|y+5+6| + |y-1| = 10$$

$$|y+11| + |y-1| = 10$$

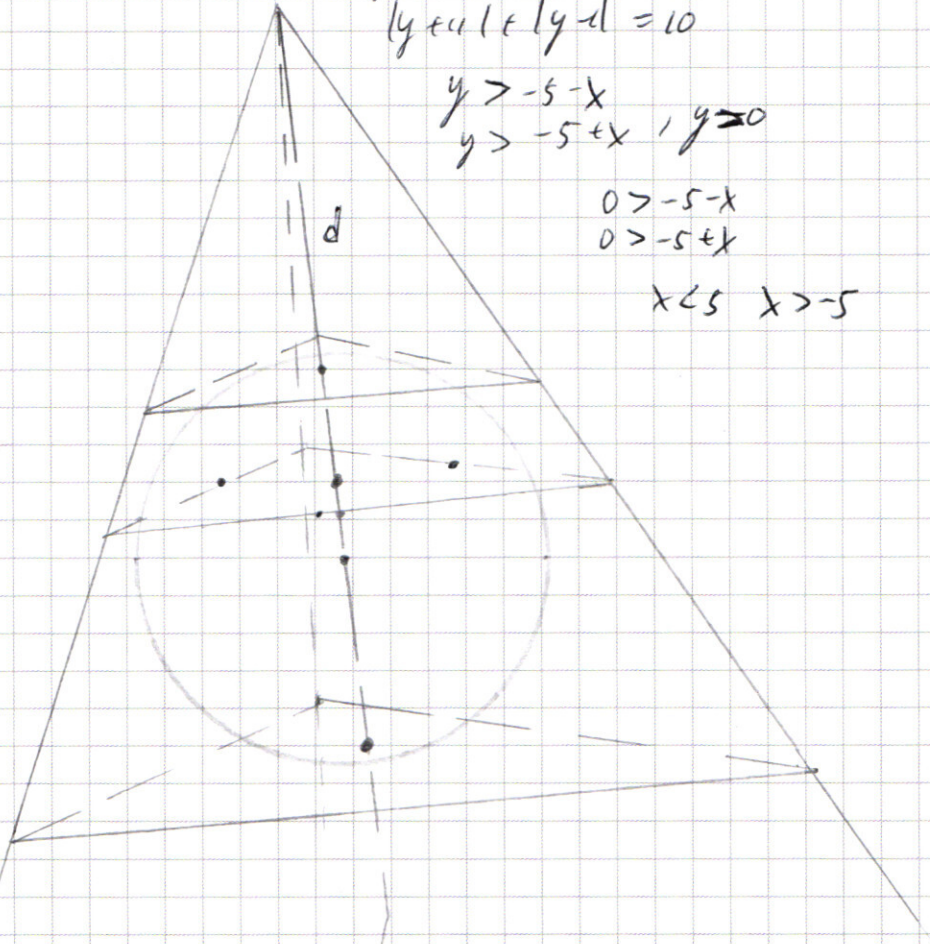
$$y > -5-x$$

$$y > -5+x, \quad y \geq 0$$

$$0 > -5-x$$

$$0 > -5+x$$

$$x < 5 \quad x > -5$$



$$\left(\frac{d}{d+2r}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{d}{d+2r} = \frac{1}{4}$$

$$4d = d+2r$$

$$d = \frac{2}{3}r$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{d+r} = \frac{r}{\left(\frac{2}{3}+1\right)r} = \frac{3}{5}$$

$$h = r \sin \alpha = \frac{3}{5}r$$

do done done
done done
done y done
done

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 343 \cdot 27 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$777 \dots$$

$$D = 1 + 8x^2 - 32x$$

$$9x = 2\pi r + \frac{3\pi}{4}$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$y = 2x \text{ или } y = -x+4$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 4 \ln x}$$

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = (\ln y - 4 \ln x) \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 4 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 4 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$y = 2x$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 2x - 3 \ln x \ln 2x = 0$$

$$16 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{y}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \cdot \frac{1+\cos y}{2} - \frac{1-\cos x}{2} \cdot \frac{1-\cos y}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos x \cos y + \cos x + \cos y - 1 + \cos x + \cos y - \cos x \cos y) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos x + \cos y)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

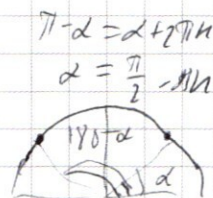
$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x \pm \ln x}{2}$$

$$2 \sin 7x \cos 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$



$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$$

$$2\ln^2 2 + \ln^4 4 - 3\ln 2 \ln 4 = 2\ln^2 2 + 4\ln^2 2 - 6\ln^2 2 = 0$$

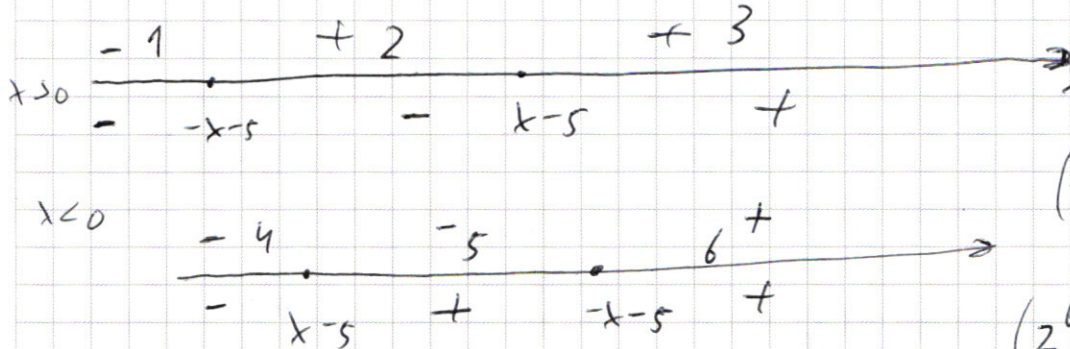
$$7^3 \cdot 3^3$$

$$777 \dots 333$$

$$777333111$$

$$(2^{18})^{-\ln 2} = 2^{4\ln 2}$$

$$(2^6)^{-\ln 2} = 2^{\ln 2^{-5}}$$



$$1) \quad -x - y - 5 - y - x - 5 = 10$$

$$y = -10, \quad x > 0, \quad -10 < -x - 5, \quad x < 5$$

$$2) \quad x = 5, \quad -10 < y < 0$$

$$(2 \cdot 2^8)^{-\ln 2} = 2^{2\ln 2^{-5}}$$

$$3) \quad y = 0, \quad x < 5, \quad x - 5 < 0, \quad x > 5$$

$$4) \quad y = -10, \quad x < 0, \quad y < x - 5 = -5, \quad x < -5$$

$$5) \quad x = -5, \quad x - 5 < y < -x - 5, \quad -10 < y < 0$$

$$6) \quad y = 0, \quad -x - 5 < 0, \quad x > -5$$

$$9^{-\ln 3} = 1^{\ln 3}$$

$$3^{-2\ln 3}$$

$$289 + 225 = 514$$

