МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 9x\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 9x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 9x\right) =$

$= \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right)$

$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\cdot\cancel{\cos 4x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 5x\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\sin 5x\cdot\cos\frac{\pi}{4} -\right.$

$\left.- \cos 5x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

Вернемся к исходному уравнению

$(\cos 9x + \sin 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) + \sqrt{2}\cdot\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0 \quad \Big|:\sqrt{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$

$2\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 9x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 9x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) - \cos 4x = 0$

$2\cdot\sin 7x\cdot\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$

$2\cdot\sin 7x\left(\cos(2x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(2x)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x - \sqrt{2}\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\sqrt{2}\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x + \sin 2x)\cdot(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\cdot\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0 \qquad (*) \\ \sqrt{2}\cdot\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{array}\right.$$

$*$. $\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \Big|:\cos 2x \neq 0$

(cos2x=0 – не корень, т.к. при $\cos 2x = 0 \to \sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x - \sin 2x = -1 \neq 0$)

$1 - \operatorname{tg} 2x = 0$

$\operatorname{tg} 2x = 1 \longrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

$**: \sqrt{2}\cdot\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$

$\sqrt{2}\cdot\sin 7x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$

$\sin 7x = \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x\right)$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

$2\cdot\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2}\cdot\cos\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 2x}{2} = 0$

$\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \longrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0\\ \cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k,\ k\in Z\\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi r,\ r\in Z\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k,\ k\in Z\\ 9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi r,\ r\in Z\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5},\ k\in Z\\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi r}{9},\ r\in Z\end{array}\right.$

Возврат к системе:

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n\in Z\\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z\\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi r}{9},\ r\in Z\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n\in Z\\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z\\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi r,\ r\in Z\end{array}\right.$

3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (*)\\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (**)\end{cases}$

$*: (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$ $\quad D(f): x, y > 0$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x} \cdot y^{\ln\frac{y}{x^7}} = 1$ (справедливо, т.к. $x \neq 0, y \neq 0$)

$x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x + \ln\frac{y}{x^7}} = 1$

$x^{2\ln x} \cdot y^{\ln x^4 + \ln\frac{y}{x^7}} = 1$ (можем внести четверку в степень, т.к. $x > 0$)

$x^{2\ln x} \cdot y^{\ln\left(x^4 \cdot \frac{y}{x^7}\right)} = 1$

$x^{2\ln x} \cdot y^{\ln\frac{y}{x^3}} = 1$

Заметим, что ЛЧ и ПЧ > 0 (т.к $x, y > 0$)

Прологарифмируем ур-е по осн-ю e

$\ln\left(x^{2\ln x}\right) + \ln\left(y^{\ln\frac{y}{x^3}}\right) = \ln 1$

$\ln x \cdot \ln x^2 + \ln\frac{y}{x^3} \cdot \ln y = 0$

$2\ln x \cdot \ln x + (\ln y - \ln x^3)\ln y = 0$

$2 \cdot \ln x \cdot \ln x - 3\ln x \cdot \ln y + \ln y \cdot \ln y = 0$

Пусть $\ln x = a$, $\ln y = b$

$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$D = 9b^2 - 4b^2 \cdot 2 = b^2 \rightarrow a_{1,2} = \frac{3b \pm b}{4} = \left[\begin{array}{l} b \\ \frac{b}{2} \end{array}\right.$

$2(a-b)\left(a - \frac{b}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = \frac{b}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = \ln y \\ \ln x = \frac{\ln y}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 2\ln x = \ln y \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cancel{x = y} \\ \ln x^2 = \ln y \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 = y \end{array}\right.$

Подставим решения ур-я (*) в (**) и найдем корни с учетом $D(f)$

$\cancel{x = y}$ $\cancel{**}$: $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$\cancel{**}$: 1^0. $x = y \rightarrow x^2 - x \cdot x - 2x^2 + 8x - 4x = 0$

$\cancel{-6x^2 + 8x = 0}$

$\cancel{2x(4-3x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ или } x = \frac{4}{3}}$

~~не входит в $D(f)$~~

$-2x^2+4x=0$

$2x(2-x)=0 \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ -не вх. в } D(f) \\ x=2 \end{array}\right.$

$x=2=y$

$2^\circ.\ y=x^2$

$(x^2)^2-x\cdot x^2-2x^2+8x-4\cdot x^2=0$

$x^4-x^3-6x^2+8x=0$

$x(x^3-x^2-6x+8)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ -не вх. в } D(f) \\ x^3-x^2-6x+8=0 \end{array}\right.$

сх. Горнера:

	1	-1	-6	8
		+2	+2	-8
2	1	1	-4	0

$x^3-x^2-6x+8=(x-2)(x^2+x-4)$

$D=1^2+4\cdot4=17 \longrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$(x-2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \longrightarrow \cancel{y=\sqrt{x}=\sqrt{2}} \quad y=x^2=4 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \longrightarrow \cancel{y=\sqrt{x}=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}} \quad y=x^2=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0 \rightarrow \text{не вх. в } D(f) \end{array}\right.$

Ответ: $(2;2)$ и $(2;4)$ и $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2\right)$

5. $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (*) \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a & (**) \end{cases}$?a - 2реш.

Рассмотрим ур-е $*$:

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$|y+5+x|+|y+5-x|=10$ $(-x<x)$

Раскроем модуль (для положит. x): $1^\circ.\ y+5\leq -x$

$-y-5-x-y-5+x=10$

$-2y-10=10 \rightarrow 2y+20=0 \rightarrow y=-10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При этом $y+5 \leq -x$

$-10+5 \leq -x$

$x \leq 5$

Значит графиком этого случая будет прямая $y=-10$ при $x \leq 5$, $x>0$

2°. $-x < y+5 \leq x$

$-(-y-5-x+y+5-x)=10$

$+2x=10$

$x=+5$ — ~~не подх, т.к. рассм случай $x>0$~~

При этом $-5 \leq y+5 \leq 5$

$-10 \leq y \leq 0$

3°. $y+5>x$

$y+5+x+y+5-x=10$

$2y=0 \to y=0$

При этом $0+5>x$

$x<5$

График: $y=0$ при $x<5$, $x>0$

Рассмотрим модуль с неположит. x $(-x \geq x)$

1°. $y+5 \leq x$ $\longrightarrow$ $-10+5 \leq x$

$x \geq -5$

$-y-5-x-y-5+x=10$

$-2y=20 \to y=-10$

График: $y=-10$; $x \geq -5$, $x \leq 0$

2°. $x<y+5 \leq -x$ —— $-5<y+5 \leq 5$

$-10<y \leq 0$

$-y-5-x+y+5-x=10$

$-2x=10 \to x=-5$

График: $x=-5$ при $-10<y \leq 0$

3°. $y+5>-x$ — — — $0+5>-x$

$x>-5$

$y+5+x+y+5-x=10$

$2y=0 \to y=0$

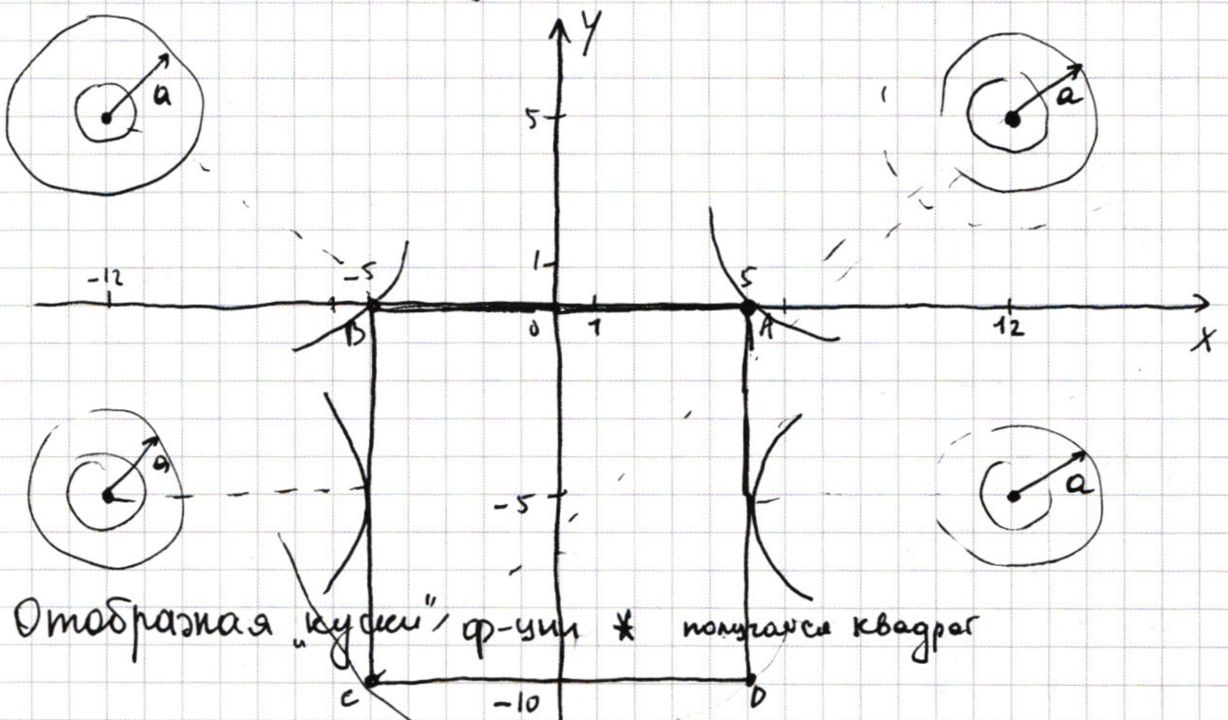
Граф: $y=0$ при $x>-5$, $x \leq 0$

Рассмотрим ~~ур-е~~ $\ast\ast$;

$$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$$

Графиком данной ф-ции ~~будет~~ является множество окружностей с центрами $(12;5)$ $(12;-5)$ $(-12;5)$ $(-12;-5)$ и одинаковым радиусом $=\sqrt{a}$

Отобразим графики ур-й $\ast$ и $\ast\ast$



Отобразная „куски" ф-ции $\ast$ получается квадрат

Чтобы система имела ровно 2 решения, необходимо, чтобы было ровно 2 пересч. окр-тей с „квадратом"

В силу симметрии, если окр-ть из одной половины касается „квадрата", то и симм. ей отн-о Oy тоже касается

Возможны неск. случаев: 1 – „нижние" окр-ти касаются каждая 1 раз в разных точках, верхние – не касаются

2 – верхние кас. в 2^x разных точках (каждая по 1), нижние – не кас.

3 – нижние кас. в 2^x одинак. точках (кажд-2); верхние – не кас.

4 – верхние кас. в 2^x один. точках, нижние – не кас.

Рассмотрим все варианты

1) Нижние окр-ти касаются 1 раз только при $R=7$ (точки кас. середины BC и AD)

$$\begin{cases} R<7 - 0\text{ кас.} \\ R=7 - 1\text{ кас.} \\ R\in(7;\sqrt{17^2+5^2}] - 2\text{ кас.} \\ R>\sqrt{17^2+5^2} - 0\text{ кас} \end{cases}$$

$R=17$ – 3 кас.

min точка кас. верхних при $R=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}>7$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $R=7$ - подх $(a=R^2=49)$

2) Верхние кас. 1 раз если $R=\sqrt{5^2+7^2}$ (точку A и B) или $R=\sqrt{17^2+15^2}$ (точку C и D)

при $R=\sqrt{5^2+7^2}$ нижние окр-ти тоже кас. $\to$ не подх.

при $R=\sqrt{17^2+15^2}$ - нижние не кас. (т.к. у них 0 точек при $R>\sqrt{17^2+5^2}$)

Значит $R=\sqrt{17^2+15^2}=\sqrt{514}$ - подх $(a=R^2=514)$

3) У нижних касание в одинак. точках по оси симметрии $\Rightarrow R=\sqrt{12^2+5^2}$ (в сер. BD и CD)

Верхние имеют ненулевое кол-во касаний при $R\in[\sqrt{5^2+7^2};\sqrt{17^2+15^2}]$

$\sqrt{5^2+7^2}<\sqrt{12^2+5^2}<\sqrt{17^2+15^2}$ (т.к. $7<17$) (т.к. $12<17$, $5<15$) $\longrightarrow$ при касании нижних в одной точке верхние будут касаться окр-ти в другом $\Rightarrow$ не подходит

4) В силу не симметричности верхние окр-ти никогда не кас. в двух одинак. точках квадрата

Значит, больше вар. нет.

Ответ: $a=49$
$a=514$

1. Восьмизначное число, произв. цифр = 9261

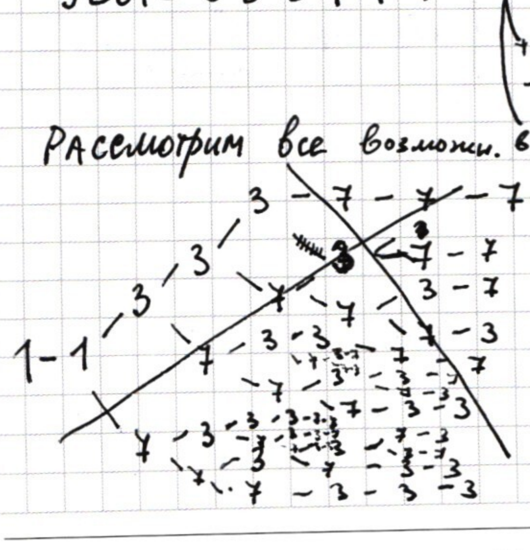
$9261=3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

$$\begin{array}{r} \times\ 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ +686\ \ \\ \hline 9261 \end{array}$$

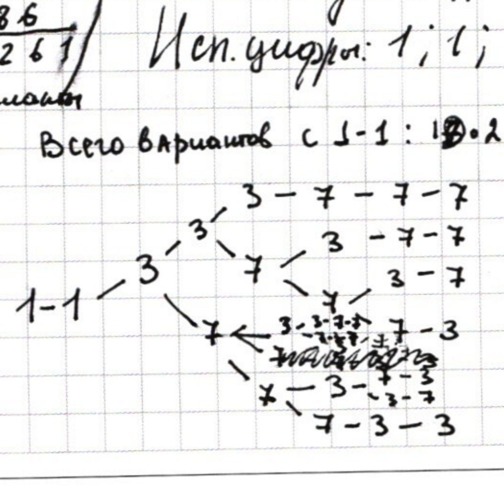
- это 6 цифр $\to$ оставшиеся две цифры - единицы

Исп. цифры: 1; 1; 3; 3; 3; 7; 7; 7

Рассмотрим все возможн. варианты



Всего вариантов с 1-1 : 10·2=20



(ЗАМЕТИМ, что вар. 1-1-7 симметричен)

1 – 3 — 1 = столько же, сколько в 1-1-3 = 10

3 – 1 – 3 – 7 – 7 – 7
7 – 3 – 7 – 7
7 – 3 – 7
7 – 3

3 – 1 – 7 – 7 – 7
7 – 1 – 7 – 7
7 – 1 – 7
7 – 1

= 8

7 — 1 = столько же, сколько в 1 – 1 – 7 = 10

– 7 = столько же, сколько в 1 – 3 – 3 = 8

37

3 – 1 – 3 – 3 – 7 – 7
7 – 3 – 7
7 – 3
7 – 3 – 3 – 7
7 – 3
7 – 3 – 3

3 – 1 – 3 – 7 – 7 – 7
7 – 3 – 7 – 7
7 – 3 – 7
7 – 3

3 – 1 – 7 – 7
7 – 1 – 7
7 – 1

7 – 1 – 3 – 7
7 – 3
3 – 1 – 7
7 – 1
7 – 1 – 3
3 – 1

19

1 – 7 — 1 = столько же, сколько 1 – 3 – 1 = 10

3 = столько же, сколько в 1 – 3 – 7 = 37 (ибо цифр „7“ и „3“ одинаково)

7 = столько же, сколько в 1 – 3 – 3 = 8

Итого если начать с 1, то: 20 + 10 + 8 + 37 + 10 + 37 + 8 = 130

Значит всего чисел 130 × 3 = 390

Ответ: 390

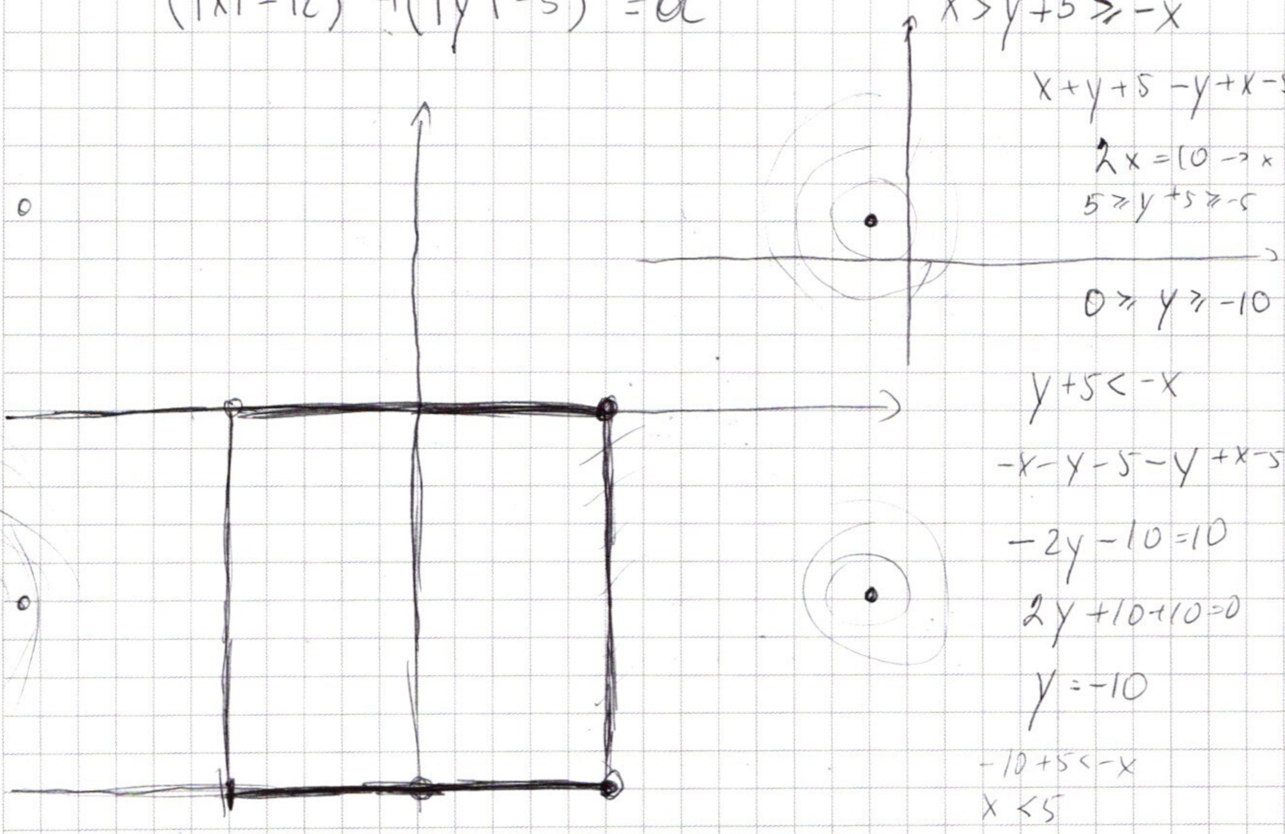
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$



в силу симметрии
у нижней
левой
четное кол-во
касаний всегда

при $a=25$ $(R=5)$
все ок
при $R<5$ — никто не каса...
след. разумн. — не будет, т.к. идет до ∞

$x^2+y^2=R^2$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$x>y+5\geq -x$

$x+y+5-y+x-5=10$

$2x=10\to x=5$

$5\geq y+5\geq -5$

$0\geq y\geq -10$

$y+5<-x$

$-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y-10=10$

$2y+10+10=0$

$y=-10$

$-10+5<-x$

$x<5$

$y+5>x$

$x+y+5+y-x+5=10$

$2y+10=10\to y=0$

$0+5>x$

$x<5$

$|y+5-5|+|y+5+5|=10$

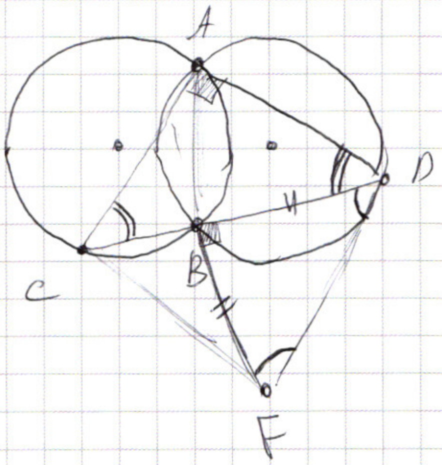
$|y|+|y+10|=10$

$y+y+10+10$

$\begin{array}{r}25\\ \times 15\\ \hline 75\\ 25\\ \hline 225\end{array}$

$\begin{array}{r}17\\ \times 17\\ \hline 119\\ 17\\ \hline 289\end{array}$

$\begin{array}{r}289\\ +225\\ \hline 514\end{array}$



$\angle CAD = 90^\circ$

$r_1 = r_2 = R = 10$

$BD = BF$

$CF = ?$

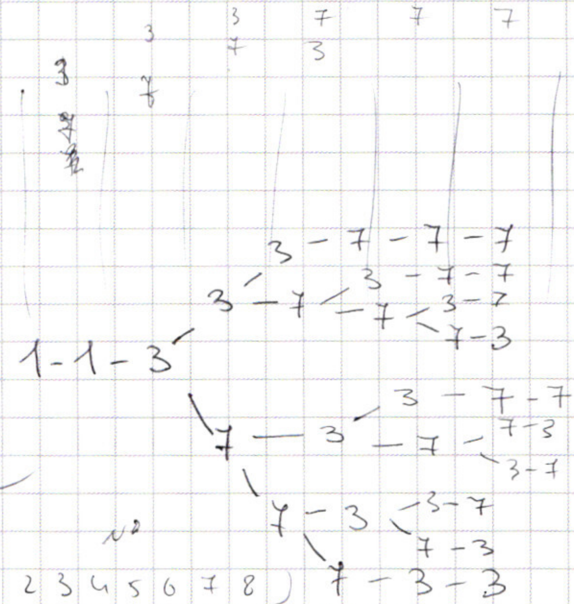
$\angle ACB = \angle ADB$ (опир. на 1 дугу)

1. $9261 = 7^3 \cdot 3^3 \cdot 1 \cdot 1$

7 7 7 3 3 3 1 1

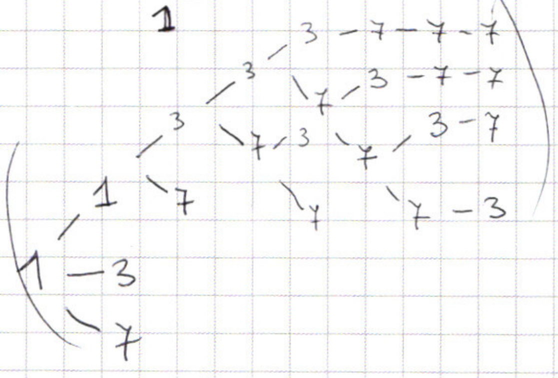
$$\begin{array}{r} \times\, 343 \\ 27 \\ \hline +\,2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

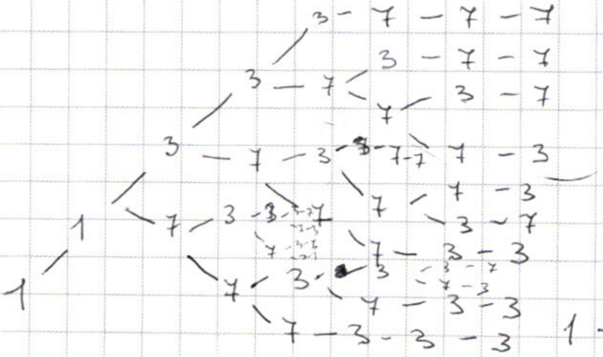
11333777
11337377
11337737
11337773 ✓
11373773
11373377 ✓
11373737
11377337
11377373
11377733
11373773

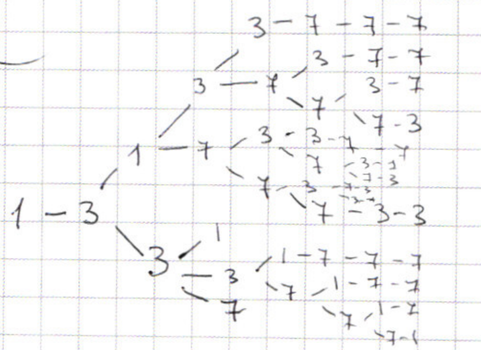


№2

1 2 3 4 5 6 7 8







$37 + 8 + 10 = 47 + 8 = 55$

$110 + 20$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cdot\sin 7x\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x=0$ $\qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2\cdot\sin 7x\cdot\left(\cos 2x\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right)-\cos 4x=0$

$\sqrt2\sin 7x\cdot\cos 2x-\sqrt2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x-\cos 4x=0$

$\cancel{\sqrt2\sin 7x\cdot\cos 2x-\sqrt2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x-\cos^2 2x+\sin^2 2x=0}$

$\cancel{\cos 2x\left(\sqrt2\sin 7x-\cos 2x\right)+\sin 2x\left(\sin 2x-\sqrt2\sin 7x\right)=0}$

$\sqrt2\sin 7x\left(\cos 2x-\sin 2x\right)-\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)=0$

$\sqrt2\cdot\sin 7x\left(\cos 2x-\sin 2x\right)-\left(\cos 2x-\sin 2x\right)\left(\cos 2x+\sin 2x\right)=0$

$\left(\cos 2x-\sin 2x\right)\left(\sqrt2\cdot\sin 7x-\left(\cos 2x+\sin 2x\right)\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x-\sin 2x=0 \quad (*)\\ \sqrt2\cdot\sin 7x-\cos 2x-\sin 2x=0 \quad (**)\end{array}\right.$

$*:\ \cos 2x-\sin 2x=0 \ \big|:\cos 2x$

$1=\operatorname{tg} 2x$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

Answer

$**:\ \sqrt2\cdot\sin 7x=\cos 2x+\sin 2x$

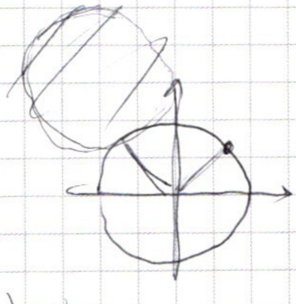
$\sqrt2\cdot\sin 7x=\sqrt2\left(\overset{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt2}{2}}\cos 2x+\overset{\cos}{\frac{\sqrt2}{2}}\sin 2x\right)$

$\sin 7x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$

$7x=\frac{\pi}{4}+2x+2\pi k$

$5x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k$?



$\sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0$

$2\cdot\sin\frac{7x-\frac{\pi}{4}-2x}{2}\cdot\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}+2x}{2}=0$

$\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$\cancel{\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}}$

$5x-\frac{\pi}{4}=\pi n \qquad 9x+\frac{\pi}{4}$

$\cancel{a}=\frac{}{2}(5-|x|)+\frac{}{2}(21-|x|)$

$01=|5+x-1|+|5+1+x|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \ (*) \end{cases}$ $x>0,\ y>0$

$\ln x = \log_e x$

$\ln x = a$

$e^a = x$

$*: \ 2x^2 - 8x + xy + 4y - y^2 = 0 \ | : y^2$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 8\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{4}{y} - 1 = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left(2\frac{x}{y}+1\right) + \frac{4}{y}\left(1-2\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{x}{y}\cdot\left(2\frac{x}{y}+1\right) - \frac{4}{y}\left(2\frac{x}{y}-1\right) - 1 = 0$$

$$\left(2\frac{x}{y}+1\right)\cdot\left(\frac{x-4}{y}\right) - 1 = 0$$

$**: \ (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \longrightarrow x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}\cdot y^{\ln\frac{y}{x^7}} = 1$$

$$x^{2\ln x}\cdot y^{4\cdot\ln x + \ln\frac{y}{x^7}} = 1$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b\cdot c)$$

$$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln x^4 + \ln\frac{y}{x^7}} = 1 \ \rightarrow x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\left(x^4\cdot\frac{y}{x^7}\right)} = 1$$

$x^{\ln x} = x^{\log_e x}$

$$x^{2\cdot\ln x}\cdot y^{\ln\frac{y}{x^3}} = 1$$

$$\ln\left(x^{2\cdot\ln x}\right) + \ln\left(y^{\ln\frac{y}{x^3}}\right) = \ln 1$$

$$\ln x\cdot\ln x^2 + \ln\frac{y}{x^3}\cdot\ln y = 0$$

$$2\cdot\ln x\cdot\ln x + (\ln y - \ln x^3)\cdot\ln y = 0$$

$$2\ln x\cdot\ln x + \ln y\cdot\ln y - \ln y\cdot\ln x^3 = 0$$

$$2\ln x\cdot\ln x - 3\ln y\cdot\ln x + \ln y\cdot\ln y = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. кол-во восьмизначных чисел, произв цифр = 9261

$9261 = 3\cdot3\cdot1029 = 3\cdot3\cdot3\cdot343 = 3\cdot3\cdot3\cdot 343 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot49 =$

$= 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

вот, какие цифры д.б.

ещё 2 единицы

Цифры: 1; 1; 3; 3; 3; 7; 7; 7

$343 \times 27 = 2401 + 686 = 9261$

1123

1123
1132
1213
1231
1312
1321
2113
2131
2311
3112
3121
3211

$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$D = 9b^2 - 4\cdot2b^2 = b^2$

$a_{1,2} = \frac{3b \pm b}{4} = b;\ \frac{b}{2}$

$2(a-b)(a-\frac{b}{2}) = 0$

$(\ln x - \ln y)(\ln x - \ln \frac{y}{2}) = 0$

$\ln x = \ln y \Rightarrow \boxed{x = y}$

$\ln x = \ln\frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{2}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\frac{12}{x} - 1 = 0$, $\frac{12}{x} = 2$, $\boxed{x = 6}$

$- (\cos 5x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x)$

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cdot\cos 4x$

~~$2\cdot\sin 7x(\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x) = \sqrt{2}\cdot\cos 4x$~~

~~$2\sin 7x(2\cos^2 x - 1 - 2\sin x\cos x$~~

$-(\cos 5x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x) = -2\left(\frac{1}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x\right) =$

$= -2(\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 5x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 4x)$

$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9x\right) =$

$= \sqrt{2}\cdot(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 9x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 9x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 9x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 5x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\sin 5x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos 5x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) + \cancel{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cancel{\sqrt{2}}\cdot\cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 9x\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 9x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 9x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$2\cdot\sin 7x\cdot\cos\frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2\sin 7x\cdot\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0}\ \checkmark$$

$$2\cdot\sin 7x\cdot\cos\frac{\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \cos 4x = 0$$

$$2\cdot\sin 7x\cdot\sqrt{\frac{1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}} - \cos 4x = 0$$

$$2\cdot\sin 7x\sqrt{\frac{1 - \sin 4x}{2}} - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x\sqrt{\frac{1 - 2\cos 2x\sin 2x}{2}} - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x\sqrt{\frac{\sin^2 2x - 2\cos 2x\sin 2x + \cos^2 2x}{2}} - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x\frac{\sqrt{(\sin 2x - \cos 2x)^2}}{\sqrt{2}} - \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2}\cdot\sin 7x\cdot\left|\sin 2x - \cos 2x\right| - \cos 4x = 0$$

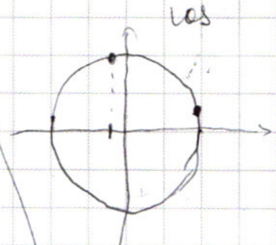
$$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 5x + \cos 9x\right)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \to \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

cos



$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3}\quad y = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\pi\right) =$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\cdot\left(+\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$$

$$\frac{2\pi}{3}\quad\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)