

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

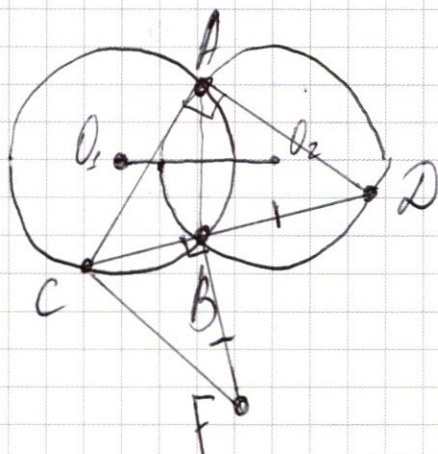
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~cos~~ $\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) =$
 $(x^2 y^4) - \ln x = y \ln(y/x^7)$

$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \frac{y \ln y - 1}{\ln x} \cdot y \ln x^7$

$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x + 7 \ln x} = y \ln y^{\ln x}$
 $x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y \ln y$

$\frac{\sqrt{2} \cos 4x}{2}$



~~log~~ $\frac{y \ln y}{y^{7 \ln x}}$

$2 \cos 2x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$

$4 \cos^2 2x (\sin 7x + \cos 7x)^2 = 2 \cos^2 4x$
 $= 1 + \cos 2x$

$\cos 4x$

$\cos 5x = \cos(4x + x) = \cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x$

~~cos~~ $\cos 4x (\sin x - \cos x) + \sin 4x (\cos x + \sin x)$

$\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 4x$

$$\cos 9x = \cos(4x + 5x) = \cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$

$$\sin 9x = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x$$

$$\cos 4x (\sin 5x + \cos 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \cos 4x (\sin x + \cos x) - \sin 4x (\sin x - \cos x)$$

$$\cos^2$$

$$\cos 9x = (\cos 9x \cdot \cos 4x + \sin 9x \cdot \sin 4x) - \sqrt{2} \cos 4x + \frac{\sin 9x}{\cos 4x} +$$

$$+ \sin 9x \cdot \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 9x$$

$$\cos 9x (1 - \cos 4x - \sin 4x)$$

$$\sin 9x$$

$$\cos 4x (-\cos 9x + \sin 9x - \sqrt{2})$$

$$\sin 4x (-\sin 9x - \cos 9x)$$

$$(-\sin 4x + 1)(\cos 9x + \sin 9x)$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} = y^{\ln y}$$

$$y(y-4) - 2x(x-4) = xy$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9621 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 62 \\ 54 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1069 \overline{) 11} \\ 99 \\ \hline 99 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1069 \overline{) 13} \\ 104 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 26 \\ 18 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2309 \\ 686 \\ \hline 9181 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2301 \\ 686 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$C_8^3 (C_5^3 + C_5^1 \cdot C_4^1) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 5 \cdot 4 \right) =$$

$$= 56(10 + 20) = 56 \cdot 30 = 1680$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x + \cos(-5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 9x + \cos(-5x) = 2 \cos 2x \cdot \cos 7x$$

$$2 \cos 2x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$$

$$2 \cos 2x (\sin 7x + \cos 7x) - 2\sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} = 0$$

$$2 \cos 2x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} \cos 2x (2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$2 \cos 2x (\sin 7x + \cos 7x - \sqrt{2} \cos 2x) = -\sqrt{2}$$

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$$\int y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$\frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}} =$$

~~$$x^2 - \ln x$$~~

$$\int |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\int (|x-12|)^2 + (|y-5|)^2 = a$$

$$(12; 5)$$

$$|x+y+5|$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq -x-5$$

$$|y-x+5|$$

$$y \geq x-5$$

$$2y + 10 = 10$$

~~$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$~~

$$2x = 10$$

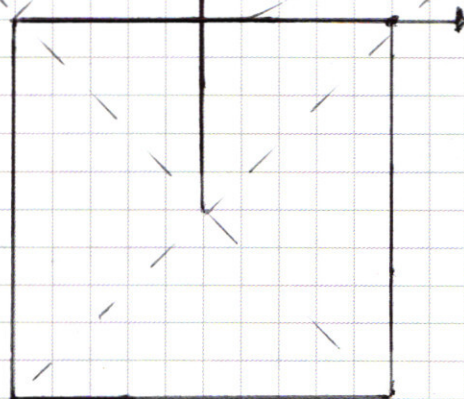
$$x = 5$$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y - 10 = 10$$

$$-2y = 20$$

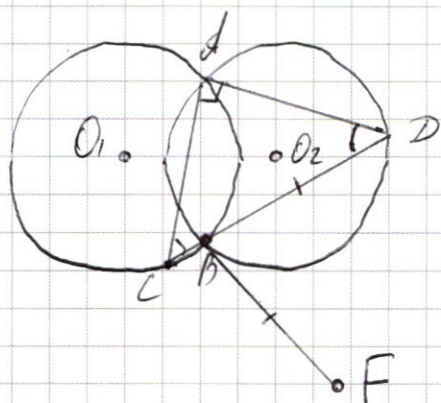
$$y = -10$$



~~$$-x-y-5 + y-x+5 = 10$$~~

$$-2x = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \cdot y = \sqrt{2} x \cdot y'$$

$$y = \sqrt{2} y'$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{10} \approx 10$$

$$7\sqrt{2} \approx 10$$

$$7 \times 1,41 = 9,87$$

$$4x = \alpha$$

$$5x = \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta +$$

$$\cos \alpha (\cos \beta - \sqrt{2} + \sin \beta) + \sin \alpha (-\sin \beta + \cos \beta) + \cos \beta - \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta =$$

$$(\cos \beta - \sin \beta)(\sin \alpha - 1)$$

$$2^x$$

$$(2^{33} - 2)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + (2^{33} - 2)x$$

$$x = 1 : 2^{33} - 2$$

$$x = 2 : 2^{34} - 4$$

$$x = 3 : 3 \cdot 2^{33} - 6$$

$$x = 4 : 2^{35} - 8 + 76 = 2^{35} + 68$$

$$x = 5 : \cancel{3 \cdot 2^{34}}$$

$$10 (2^{32} - 1) =$$

$$2,5 (2^{34} - 4)$$

$$x = 6 : 12 (2^{32} - 1)$$

$$3 (2^{34} - 4)$$

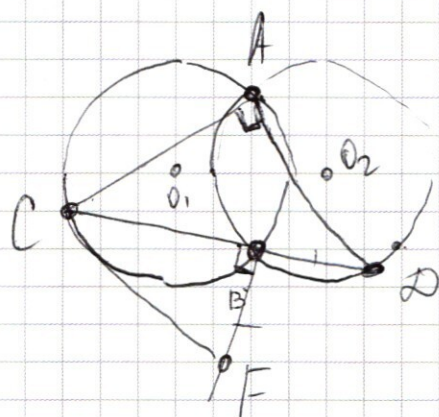
$$x = 6 : 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 3 \cdot 2^4 - 12$$

$$64$$

$$x = 7$$

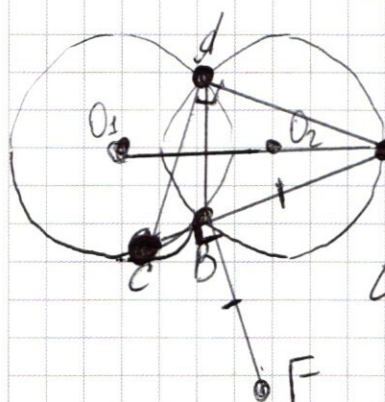
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x^2 y^4) - \ln x = \frac{y \ln y}{y \times \ln x}$$

$$(x^2 y^2) \ln x = \frac{y \ln y}{y \times \ln x} \cdot y \ln y$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$



$$\ln x = \cancel{\log_e x}$$

$$\ln x = \ln$$

$$\ln x = \frac{\log_y x}{\log_y e}$$

$$\log_2 8 = \frac{\log_8 8}{\log_8 2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\log_2 8 = \frac{\log_8 2}{\log_8 8} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\ln y = \frac{\log_8 y}{\log_y e} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 \ln x = y \ln(y/x^7) = y \ln y - 7y \ln x$$

$$y \ln \frac{y}{x^3} = x^{-2} \ln x$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

~~$x^{-2\ln x}$~~

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^7) \cdot \ln y$$

$$-\ln x \cdot (\ln x^2 + \ln y^4) = (\ln y - \ln x^7) \cdot \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 7\ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

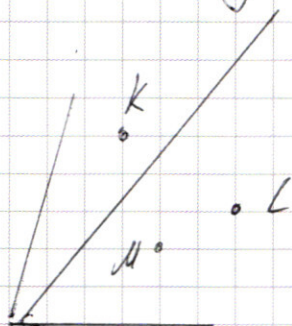
$$(\ln y - 1,5\ln x)^2 - 0,25\ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - 1,75\ln x)(\ln y - 1,25\ln x) = 0$$

$$\ln y = 1,75\ln x$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{7}{4}}$$

$$y = x^{\frac{7}{4}}$$



	1	-1	-6	8
2	1	1	-4	0

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$$K_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{(-1 + \sqrt{17})^2}{4} = \frac{17 + 1 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №11

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Таким образом, у нас возможны только два набора цифр, которые будут образовывать наше восьмизначное число.

Набор 1: 3 семерки, 3 тройки, 2 единицы

ответ для набора 1: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1 = 560$

Набор 2: 3 семерки, 1 девятка, 1 тройка, 3 единицы

ответ для набора 2: $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 1120$

Итого: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел

Задача №5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x+y+5 \geq 0 & \& \quad y-x+5 \geq 0 \\ x+y+5 < 0 & \& \quad y-x+5 < 0 \\ x+y+5 \geq 0 & \& \quad y-x+5 < 0 \\ x+y+5 < 0 & \& \quad y-x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y+10 &= 10 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$x+y+5 \geq 0 \quad \& \quad y-x+5 < 0$$

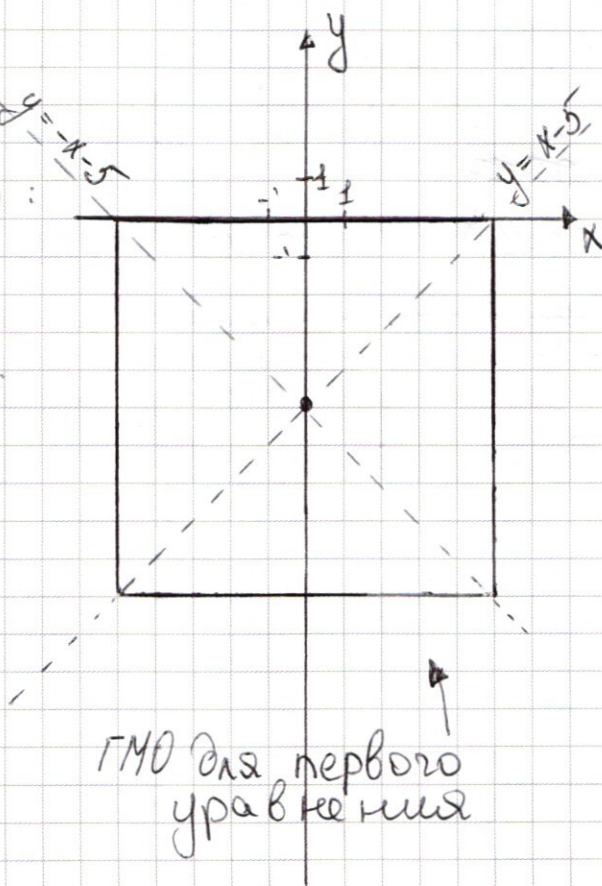
$$\begin{aligned} 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$x+y+5 < 0 \quad \& \quad y-x+5 < 0$$

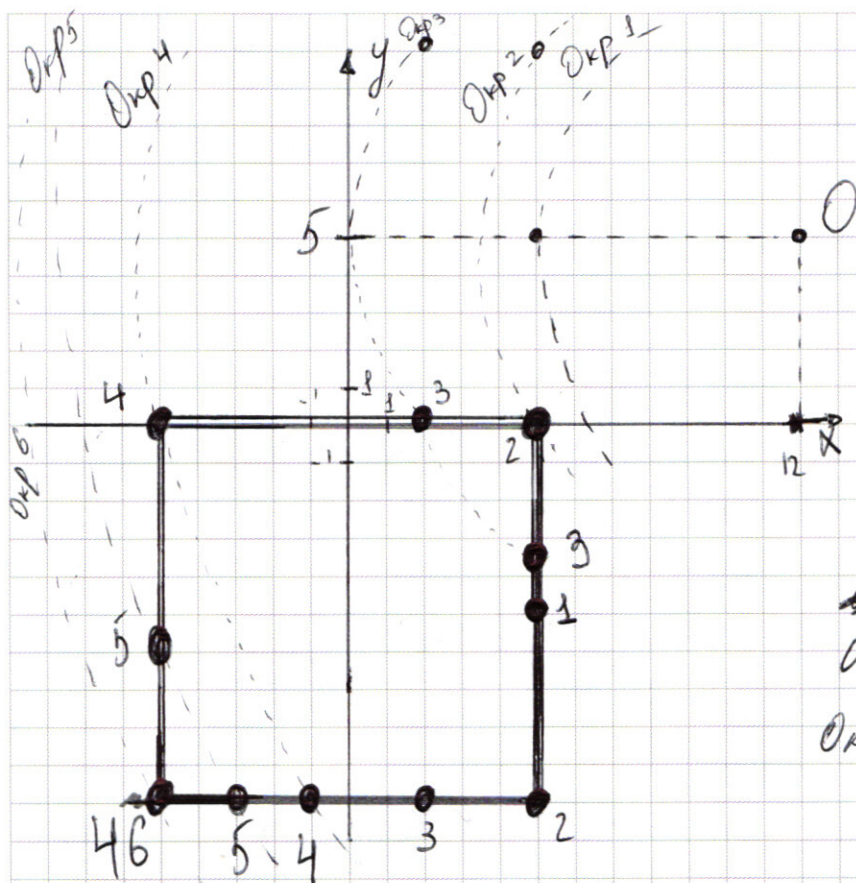
$$\begin{aligned} -2y-10 &= 10 \\ -2y &= 20 \\ y &= -10 \end{aligned}$$

$$x+y+5 < 0 \quad \& \quad y-x+5 \geq 0$$

$$\begin{aligned} -2x &= 10 \\ x &= -5 \end{aligned}$$



ГМО для первого уравнения



Заметим, что второе уравнение задаёт окружность, а также точки симметричные этой окружности относительно оси (ой).

Окр 1: $r = 4$, $a = 49$
 Окр 2: $r = \sqrt{4^2 + 25} = \sqrt{74}$, $a = 74$
 Окр 4: $r = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314}$, $a = 314$
 Окр 6: $r = \sqrt{14^2 + 15^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}$, $a = 514$

• x - обозначает, что выделенная точка является решением системы, если второе уравнение задаётся окружностью Nx и её отображением.

Некоторые утверждения:

1) Если окружность содержит точку $(x'; 0)$, то она содержит и точку $(x'; 10)$, т.к. окружность симметрична относительно прямой $y = 5$ и значит точка $(x'; -10)$ ~~также~~ также задаётся вторым уравнением.

Заметим, что нам подходят все окружности от второй включительно до четвёртой ~~включительно~~ вторая окружность, а также все, которые лежат между четвёртой и шестой ~~включительно~~ не включительно.

В остальных случаях количество решений системы не будет равно 2.

Ответ: При $a = 49$ или $a \in (314; 514)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №31

$$\int (x^2 y^4) - \ln x = y \ln (y/x^7) \quad (1)$$

$$\int y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1): & -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^7) \cdot \ln y \\ & -\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y \\ & -2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y \\ & \ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0 \\ & (\ln y - 1.5 \ln x)^2 - (0.5 \ln x)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$(\ln y - 2 \ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln y = 2 \ln x & (11) \\ \ln y = \ln x & (22) \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 & (11) \\ x = y & (22) \end{cases}$$

$$(11): (2): x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$-x(x^2 + 5x - 8) = 0 \quad x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 32}}{2}$$

$$(22): (2): x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 4 \\ x = 0 \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ не подходит}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (x=2; y=4); \left(x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}; y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$$

Задача №4

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$g(x) = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

Заметим, что при $x < 6: f(x) > g(x)$
 при $x = 6: f(x) = g(x)$
 при $x > 6: f(x) < g(x)$

$$f(6) = 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$g(6) = 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12 = 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$f(4) - f(6) = 64$$

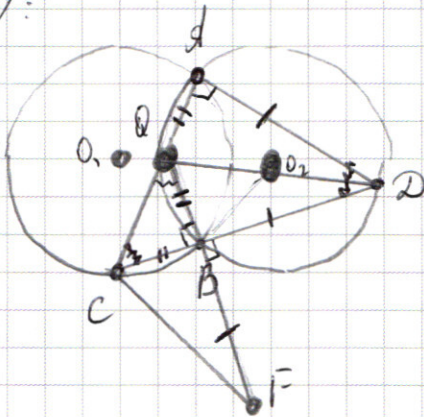
$$g(4) - g(6) = 2^{33} - 2 - 12 = 2^{33} - 10 \quad \text{ans} = 2^{33} - 10 - 64 = 2^{33} - 74$$

$$f(8) - f(6) = 128 + 64 = 192$$

$$g(8) - g(6) = 2^{34} - 4 - 12 = 2^{34} - 16$$

Задача №6

(1):



1) $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (опираются на равные дуги в равных окружностях)

т.о. $\triangle CAD \sim \triangle FBD$, $k =$

$$|CA| \cdot |CQ| = |CB| \cdot |CD| \quad (\text{отр. сек из одн. л.})$$

$$|CA| \cdot |CQ| = |CB| \cdot |CA| \cdot \sqrt{2}$$

$$|CQ| = |CB| \cdot \sqrt{2}$$

т.о. $Q \in (BF)$ ($\triangle CQB$ - р/ф, н/у)

$\angle AQD = 90^\circ \Rightarrow [QD]$ - диаметр

$\triangle DQB = \triangle FEB$ (по 2-м катетам) $\Rightarrow |QD| = |CF| = 20$

(2): $|BC| = 12 \xrightarrow{\triangle CBQ} |CQ| = 12\sqrt{2}$

$|QA| = 12 \Rightarrow |CA| = 12\sqrt{2} + 12$

$\angle AQD = \angle BQD$ (опираются на равные дуги)

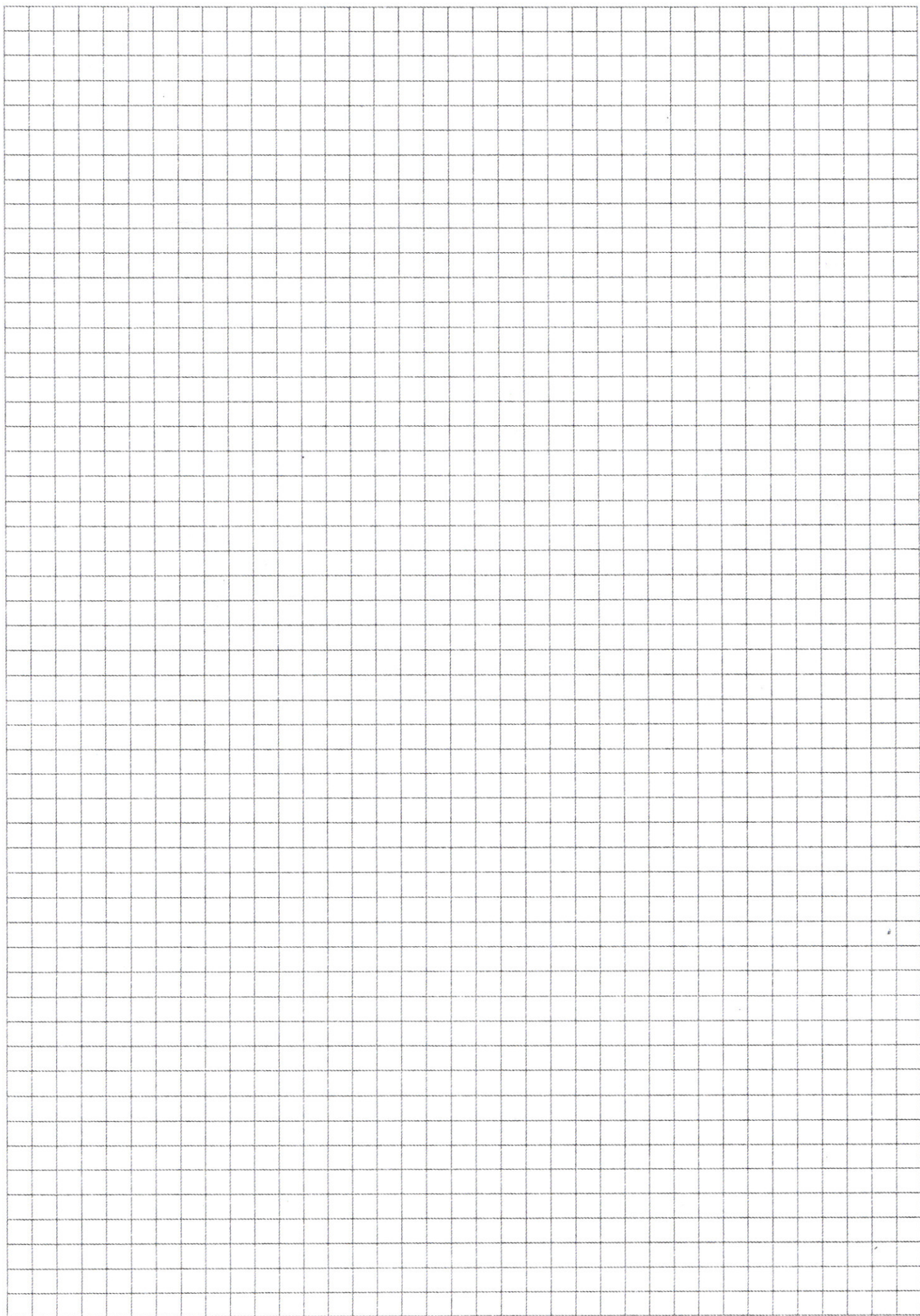
~~scribbles~~ $\cos \angle BCF = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
 $\sin \angle BCF = \frac{4}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \sin \hat{QCF} &= \sin (45^\circ + \sin \hat{BCF}) = \text{Задача №6 (продолжение)} \\ &= \sin 45^\circ \cos \hat{BCF} + \cos 45^\circ \sin \hat{BCF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ACF} &= \frac{\sin \hat{QCF} \cdot |CF| \cdot |CA|}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{20} \cdot 20 \cdot (12\sqrt{2} + 12) = \\ &= 84 \cdot 2 + 84\sqrt{2} = \\ &= 168 + 84\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 168 + 84\sqrt{2} ; 220$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)