

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

1) Решим второе ~~уравнение~~ ^{уравнение} системы:

$$-2x^2 + (8-y)x + y^2 - 4y = 0$$

$$2x^2 - (8-y)x - y^2 + 4y = 0$$

$$D = (8-y)^2 - 8(-y^2 + 4y) = 64 - 16y + y^2 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 48y + 64 = (3y-8)^2$$

$$x = \frac{8-y+3y-8}{4}$$

или

$$x = \frac{8-y-3y+8}{4}$$

$$x = \frac{2y-4}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{y}{2}}$$

$$x = \frac{-4y+16}{4}$$

$$\boxed{x = -y+4}$$

2) Решим первое уравнение:

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} - \ln x^7$$

$$e^{-2\ln^2 x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} : y^{7\ln x}$$

$$e^{-2\ln^2 x} \cdot y^{3\ln x} = e^{\ln^2 y}$$

$$y^{3\ln x} = e^{\ln^2 y + 2\ln^2 x}$$

$$\ln[y^{3\ln x}] = \ln[e^{\ln^2 y + 2\ln^2 x}]$$

$$3\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y + 2\ln^2 x$$

$$(\ln y - \ln x)(2\ln x - \ln y) = 0$$

$$\ln y = \ln x$$

или

$$2\ln x = \ln y$$

$$\boxed{y = x}$$

$$\boxed{x^2 = y}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^7} > 0 \end{cases}$$

3) Если $x = y$, то

$$x = \frac{y}{2}$$

$$2x \stackrel{?}{=} x \Rightarrow \boxed{x=0} (y=0)$$

или

$$x = -y+4$$

$$2x = 4$$

$$\boxed{x=2} (y=2)$$

см. далее

4) Если $y = x^2$, то

$$x = \frac{y}{2}$$

$$2x = x^2$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

или

$$x = -y + 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

или

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$y = \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

5) Т.к. $x > 0$, $\frac{y}{x^2} > 0$, то подходят следующие ~~решения~~ ^{корни}:
 $(2; 2)$, $(2; 4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$

Ответ: $(2; 2)$; $(2; 4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2} + 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \cos \frac{9x-5x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

или

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 2 \sin 7x$$

Если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = 0 \Rightarrow$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x \quad | : \cos 2x \neq 0$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) = 2 \sin 7x$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} = \sin 7x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) - \sin 7x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2x - 7x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2x + 7x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{5x}{2} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{9x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{8} - 5x}{2} = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = 2\pi n$$

$$\frac{\frac{\pi}{8} + 9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + 9x = \pi + 2\pi n$$

см. далее

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \left[\text{то же самое, что и } 5x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n, \text{ т.к. } n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$\frac{\pi}{4} + 9x = \pi + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$; $n \in \mathbb{Z}$

N1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3;$$

Всего в числе 8 цифр, значит в данном числе обязательно присутствуют три тройки, три семерки и две единицы. Оставшиеся цифры единицы, потому что произведение всех цифр равно $3^3 \cdot 7^3$.

Всего таких чисел $(7+6+5+4+3+1)$ штук, потому что:

~~$$\frac{7+1}{2} = 28 \text{ чисел}$$~~

1) (Нужно расставить две единицы на какие-либо из восьми позиций)

2) Фиксируем единицу на 1 позиции, тогда оставшиеся можно поставить на одну из 7 (т.е. 7 способов). Затем пусть единица стоит на 2 месте, тогда есть 6 способов расставить единицу и т.д.

$$\text{Всего: } 7 + 6 + 5 + \dots + 1 = 28 \text{ ~~чисел~~ способов}$$

3) Аналогично можно расставить тройки по 6 позициям. ~~Получим~~ $(4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) = 10 + 6 + 3 = 19 \text{ способов}$.

Расположение семерки определяется однозначно.

$$\text{Итого: } 19 \cdot 28 = 532 \text{ способа}$$

Ответ: 532

N5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

- 1) Если $a < 0$ ур-ие не имеет решений
- 2) $a = 0$ - второе уравнение - одна из точек с координатами $(\pm 12; \pm 5)$
- 3) $a > 0$ - второе ур-ие - ~~один из~~ одна из окружностей с центром в $(\pm 12; \pm 5)$ и радиусом $\sqrt{a}$
- 4) Первое ур-ие - различные прямые

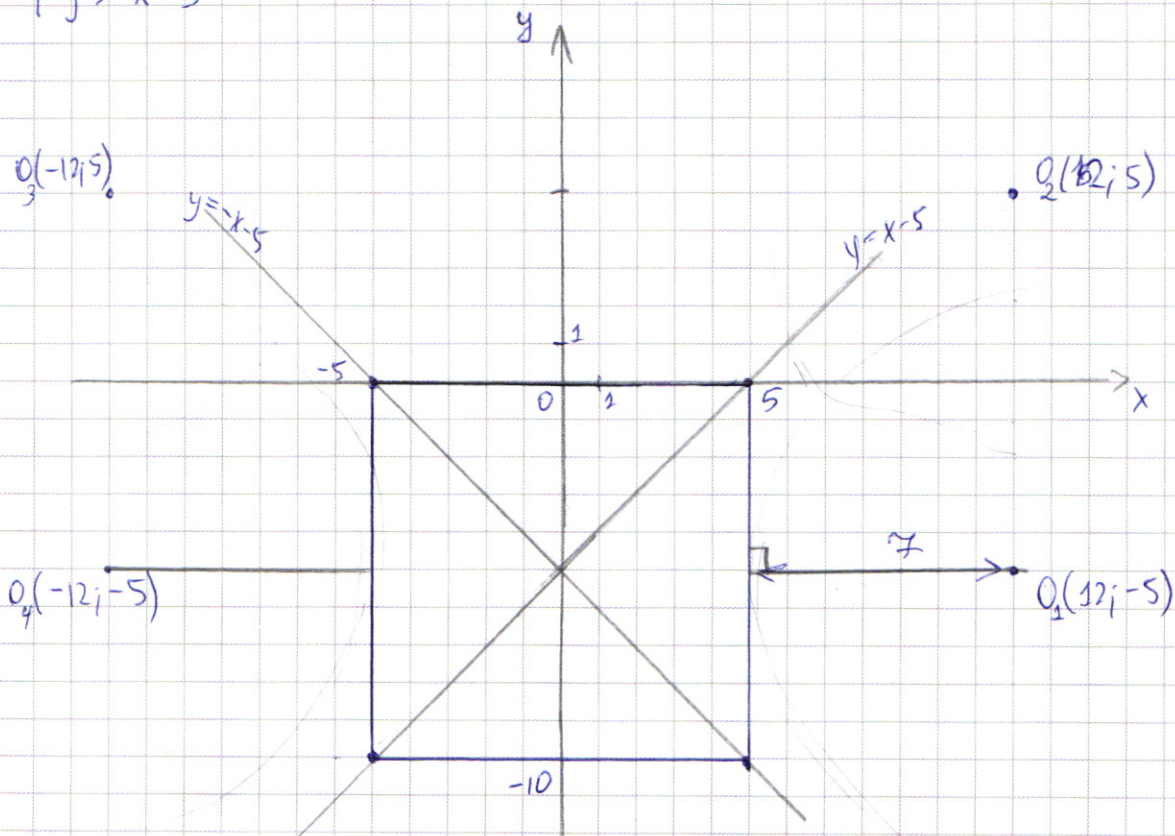
если $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$, то первое ур-ие имеет вид $y=0$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases} : x=5 ;$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases} : y=-10$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases} : x=-5$$

↗ пересечение двух полуокружностей



Окружность должна касаться стороны квадрата (центр в т. O_1), тогда и вторая окружность касается квадрата $\Rightarrow$ 2 решения

$$\Rightarrow R = 7 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} = 7 \\ a = 49$$

При касании окружн

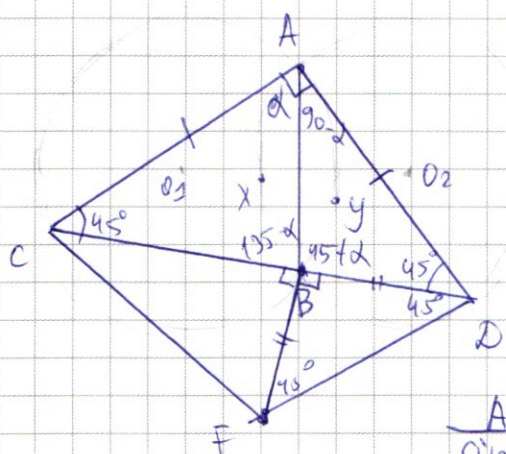
ан. дане

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если окружность с центром в т. O_3 будет проходить через точку $(-5, 0)$, то оставшиеся окружности пересекут квадрат и будут больше, чем 3 решения

ответ: $a = 49$.

№6.



1) O_1AO_2B - ромб (все стороны равны) $\Rightarrow$

$$\angle AO_1B = \angle AO_2B \Rightarrow \angle AOB = \angle AXB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \text{ (вписанные)} \Rightarrow$$

$\triangle ACD$ - равнобедр., $AC = AD$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow AB = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2) \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$$

$$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha; \angle ABD = 135 - 90 + \alpha = 45 + \alpha$$

$$\angle CBA = 135 - \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 20; \frac{BD}{\cos \alpha} = 20$$

$$\Rightarrow BC + BD = 20(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

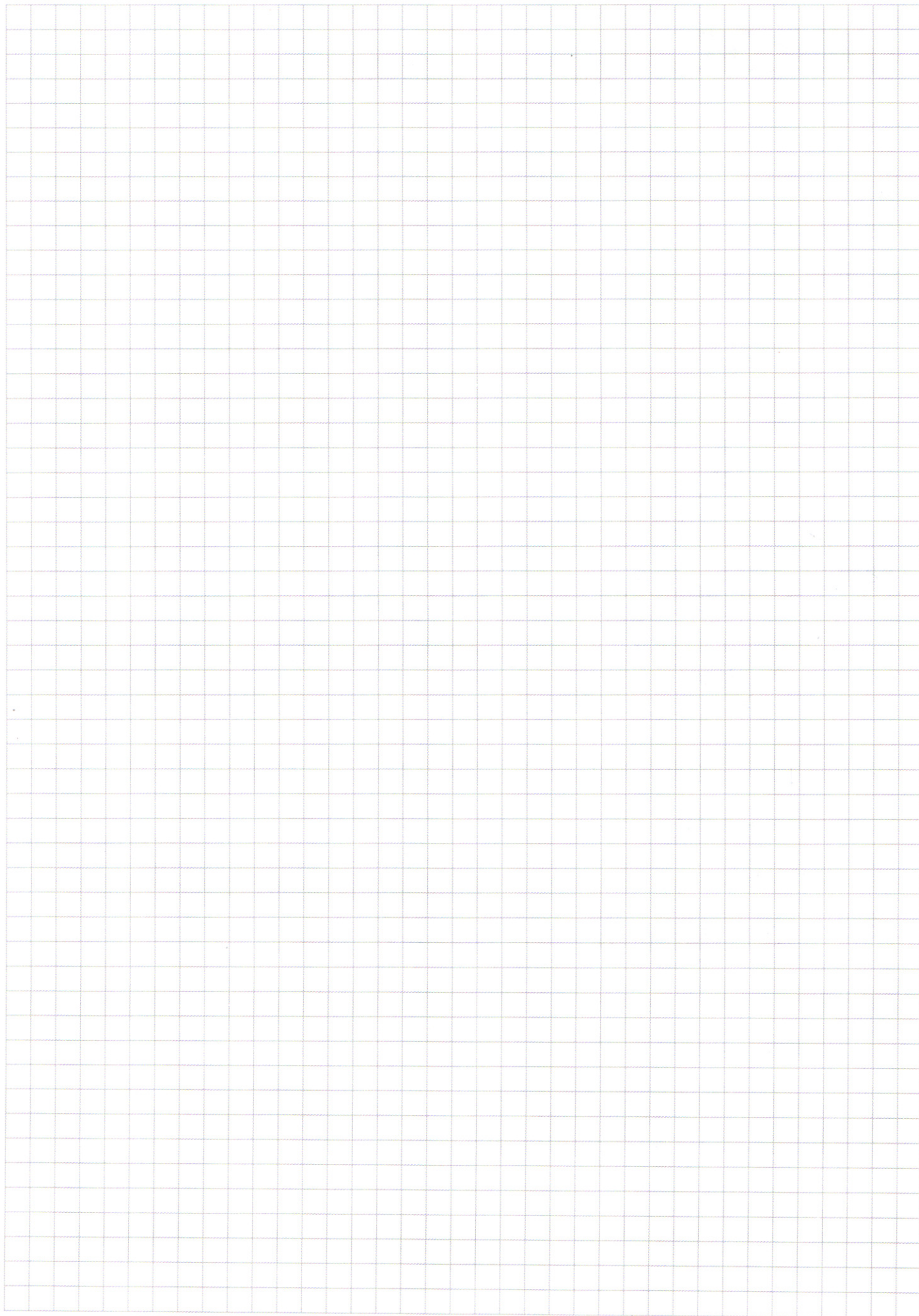
$$AC = 20 \sin(135 - \alpha) = 20 \sin(45 + \alpha)$$

$$AD = 20 \sin(45 + \alpha)$$

$$3) AD^2 + AC^2 = CD^2$$

$$20^2 \sin^2(45 + \alpha) \cdot 2 = 20^2 (1 + \sin 2\alpha)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha\right)^2 \cdot 2 = 1 + \sin 2\alpha$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R = 10$
 $\angle CPD = 90^\circ$
 $BF = BD$
 $CF = ?$

$\triangle ABC \sim \triangle PDC \Rightarrow \angle CAB = \angle CPA \Rightarrow AC = AD$

$\triangle ABC = AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \alpha$
 $\triangle ABD = AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \alpha$
 $\Rightarrow BD = BC$
 $\Rightarrow AB \perp DC$

$BD^2 - BC^2 = 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \alpha = 0$
 $BD = BC$
 $BD + BC = 2a \cos \alpha$
 $BD + BC = BA$
 $2a \cos \alpha = BA$

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$
 $AB = \sqrt{2} \cdot 10 = 10\sqrt{2}$

$\angle PDA = 90^\circ$

$\frac{BD}{\sin 45^\circ} = 2R$
 $BD \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = FD$
 $FD = 2\sqrt{2} \cdot BD$
(пусть) $BC = BD$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$x = 4 - y$
 $x = \frac{y}{2}$
 $2x = y$
 $x = \frac{4 - x}{2}$
 $2x = 4 - x$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3}$
 $y = \frac{8}{3}$

$\ln x = \ln y$
 $x = y$
 $x^2 = y$
 $x^2 + x - 4 = 0$
 $D = 1 + 16 = 17$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $y = \frac{18 \pm 2\sqrt{17}}{4}$

$2x = x^2$
 $2 = x$
 $y = 4$

$3 \ln x \ln y = \ln^2 y + 2 \ln^2 x$
 $2a^2 - 3ab + b^2 = 0$
 $D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$
 $a = \frac{3b \pm b}{4} = \begin{cases} b \\ \frac{b}{2} \end{cases}$

$\log_a b^c = c \log_a b$

$2 \ln x = \ln y$
 $x^2 = y$

② см. задачу

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 926 \overline{) 19} \\ 26 \overline{) 10} 29 \overline{) 3} \\ \underline{-18} \quad \underline{0} \quad \underline{69} \\ 31 \quad 12 \quad 343 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ \times 21 \\ \hline 42 \\ \times 42 \\ \hline 441 \\ \times 21 \\ \hline 441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{7} & \underline{1} & \underline{1} \\
 - & - & - & - & - & 2 & - & 1 \\
 & & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & 1 & & & & & 1 & \\
 2 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \} 7 \\
 \\
 \\
 \\
 \} 6 \\
 5
 \end{array}$$

2 единицы на 8 шт

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{7+1}{2} \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \\ \times 21 \\ \hline 441 \\ 882 \\ \hline 882 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \\ & -2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \end{aligned}$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2(\sin 7x \sin 2x - \sin 7x \cos 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos(9x + \frac{\pi}{4})) + \sqrt{2}(\cos(5x + \frac{\pi}{4})) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$+ 2 \cos 7x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \cos^2 x \sin 2x = \cos 4x$$

$$2(\cos^7 x \sin x + \sin^2 x) \sin 2x = \cos^4 x + 1$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 4x = 1 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right) + \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos^3 2x - \sin^2 2x)$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad \text{when}$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\lg 2x = 1$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$2 \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{9}}{2} \cdot \cos \frac{2x + \frac{\pi}{9}}{2} = 0$$

$$\chi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\frac{g_x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + 5h$$

$$g_x \leftarrow n - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$(2) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\begin{aligned}(4-2x)(4+y+2x) + 4(2x-y) &= xy \\ (2x-y)(4+y-2x) &= xy\end{aligned}$$

$$8^{\log_2 8} = 8^3$$

$$16^{\log_2 16} = 16^4$$

$$a^{\log_a b} = b^{\log_a a}$$

$$y^2 - 4y + 8x - x(y + 2x) = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases}$$

$$(y-x)^2 + xy - x^2 - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\begin{aligned} x^{\ln x} &= e^{\ln x \cdot \ln x} \\ \ln x &= \log_x e \\ \ln x &= \frac{1}{\log_x e} \end{aligned}$$

$$(1) (xy^2)^{-2\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$a^{\log_b a} = N$$
$$\log_b a = \log_a N$$
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\ln N}{\ln a}$$

$$N = e^{\frac{\ln 9}{\ln 2}}$$

$$\Delta = (x+4)^2 - 4(-2x^2+8x) = x^2+8x+16+8x^2-16x = 9x^2-8x+16 > 0$$

$$\Delta = 64 - \frac{74}{48}$$

$$-2x^2 + (-y+8)x + y^2 - 4y = 0$$

$$D = (8-y)^2 + 8(y^2 - 4y) = 64 - 16y + y^2 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 48y + 64 = (3y - 8)^2$$

$$x = \frac{y-8 \pm (3y-8)}{-4} = \begin{cases} \frac{y-8+3y-8}{-4} = \frac{4y-16}{-4} = -y+4 \\ \frac{-2y-8+8}{-4} = \frac{-2y}{-4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$x = 4 - y$ und $x = \frac{y}{2}$

(1): $\left(\frac{y^8}{4}\right)^{\ln x} = y^{8 \ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$

$$y^{-8 \ln x} \cdot 4^{\ln x} = y^{\ln y} = y^{-7 \ln x}$$

$$4^{\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{\ln x}$$

$$4^{\ln y - \ln 2} = y^{\ln y} \cdot y^{\ln y - \ln 2}$$

~~$$(x^2 y^4)^{\ln x} \cdot y^{\ln y} = \ln x^7 = 7 \ln x$$~~

$$x^{2\ln x} \cdot y^{5\ln y} = y^{7\ln x}$$

$$x^{e^{nx}} = N = (e^{e^{nx}})$$

$$\frac{20 \times 10^3}{e} \cdot \frac{5 \ln 2}{e} =$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \frac{1}{y^{4 \ln x}}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y^y \ln y$$

$$e^{-2\ln^2 x} \cdot y^{2\ln x} = e^{\ln^2 y}$$

~~$$y^{\sin x} = e^{\ln y \sin x} = e^{\ln y \sin x}$$~~

$$y + \ln^2 y = e^{2\ln^2 y} \left(\frac{e^{\ln^2 y}}{e^{4\ln^2 y}} \right)$$

$$a^{lnb} = b^{kna}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$y=0$$

$$2x(-x+4)=0$$

$x=0$ und $x=4$

$$x = \frac{y}{2}$$

①

3	3	3	7	7	7
3	3	3	-	-	-
3	-	-	3	3	-
3	-	-	3	3	-
3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3

3

52. $4 + 3 + 2 + 1$

$\begin{array}{r} 333 \\ - 333 \\ \hline 333 \end{array}$

$\begin{array}{r} 333 \\ - 333 \\ \hline 333 \end{array}$

[illegible]