МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Разложим число 9261 на множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$.
Заметим, что 7^3 мы можем получить только перемножая цифры 7, т.к. $7^2 = 49$ и это не цифра. 3^3 мы можем получить либо перемножая $3 \cdot 3 \cdot 3$ (3 цифры „3"), либо перемножая $9 \cdot 3$ (1 цифра „9", 1 цифра „3"). Рассмотрим оба случая:

1. Есть 3 цифры 7, есть 3 цифры 3. Всего цифр 8, значит, нужно еще 2 цифры, т.к. произведение $3^3 \cdot 7^3 = 9261$, то эти 2 цифры — цифры „1". На I место можно поставить одну из 8 цифр (1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7), на второе место одну из оставшихся 7 и т.д. Т.е. всего способов $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ~~...~~ При этом мы посчитали несколько раз способы поставить 1, 1; 3, 3, 3; 7, 7, 7 за разные. Но т.к. цифры одинаковые, то кол-во повторений равно кол-ву перестановок из этих цифр: для 1 - это 2! для 3 - это 3!, для 7 - это 3!, т.к. на I место можно поставить одну из 3 (для 3 и 7) цифр или 2 (для 1 цифр), на второе место одну из 2-х оставшихся (для 3 и 7) цифр или 1 цифру (для 1) и т.д. Т.е. в этом варианте: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$ способов, т.е. $\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{2} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$ способов.

2. Есть 3 цифры 7, одна цифра 9, одна цифра 3. Это 5 цифр, нужно еще 3, т.к. произведение $7^3 \cdot 9 \cdot 3 = 9261$, то это цифры 1, 1, 1. Тогда аналогично поставить эти 8 цифр на 8 мест: 8!. При этом для 7 мы посчитали 3! повторений, для 1 мы посчитали 3! повторений (аналогично предыдущему пункту). Т.е. всего мы посчитали чисел: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ чисел.

Т.е. всего $560 + 1120 = 1680$ чисел. Заметим, что никаких других цифр быть не может, т.к. могут быть только множители числа 9261, а это $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, т.е. либо 3, либо 7, либо $3 \cdot 3$, остальные не подходят, т.к. если перемножать ≥ 1 тройку и ≥ 1 семерку, то будет ≥ 21 - это не цифра, если перемножать ≥ 3 троек - это ≥ 27, т.е. не цифра, если перемножать ≥ 2 семерок, то это ≥ 49 - не цифра.

Ответ: 1680

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x-5x}{2}\cdot\sin\frac{9x+5x}{2} = -2\sin 2x\cdot\sin 7x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cdot\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x\cdot\cos 2x$

$\cos 9x - \cos 5x - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = -2\sin 2x\cdot$
$\cdot\sin 7x - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x = 0$

$\sin 2x\cdot\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x - \sin 7x\cdot\cos 2x = 0$

$\sin 7x(\sin 2x - \cos 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\sin 7x(\sin 2x - \cos 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) - \sin 7x\right) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x - \sin 7x\right) = 0$

$\cos 2x - \sin 2x = 0$ или $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) - \sin 7x = 0$

$\cancel{-2\sin\frac{2x+2x}{2}\cdot\sin\frac{2x+2x}{2} = 0}$ $\cancel{2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2x-7x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2x+7x}{2} = 0}$

$\cancel{\sin 0 = 0}$ ~~или~~ $\cancel{\sin 2x = 0}$ $\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{8} - 2{,}5x\right) = 0}$ ~~или~~ $\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{8} + 4{,}5x\right) = 0}$

$\cancel{\varnothing}$, ~~т.к.~~ $\cancel{\sin 0 = 1}$ $\cancel{2x = \pi n}$

$\cos 2x = \sin 2x$

Т.к. $\sin 2x \neq 0$, иначе $\cos 2x = \pm 1$, но $\pm 1 \neq 0$, то

$\operatorname{ctg} 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin 7x$.

Условие рав-ва синусов:

$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 2x = 7x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + 2x = \pi - 7x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{4} - 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 9x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi t}{5}, t \in \mathbb{Z}\ (m = -t) \\ x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \pi n;\ \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi t}{5};\ -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9};\ m, t, k \in \mathbb{Z}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0\end{cases}$$

Решим 2-е ур-е системы отн-но y:

$y^2-y(x+4)+(8x-2x^2)=0$

$D=(x+4)^2-4(8x-2x^2)=x^2+8x+16-32x+8x^2=9x^2-24x+16=$
$=(3x-4)^2$

$y_{1,2}=\frac{(x+4)\pm(3x-4)}{2}$

$y_1=\frac{x+4+3x-4}{2}$ $\qquad$ $y_2=\frac{x+4-3x+4}{2}$

$y_1=2x$ $\qquad$ $y_2=4-\cancel{2}x$

Рассмотрим 1 случай:

$y=2x$

$(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

ОДЗ: $x>0$ $\quad \frac{y}{x^7}>0 \Rightarrow \begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$

$((2x)^4\cdot x^2)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$

$(16x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}}=(2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$(16x^6)^{\ln x}\cdot(2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}=1$

$16^{\ln x}\cdot(x^6)^{\ln x}\cdot(2)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}\cdot x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}=1$

$(2^4)^{\ln x}\cdot x^{6\ln x}\cdot 2^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}\cdot x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}=1$

$6\ln x=\ln x^6$ $\qquad$ $4\ln x=\ln x^4$

$2^{4\ln x}\cdot x^{\ln x^6}\cdot 2^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}\cdot x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}=1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$2^{\ln x^4} \cdot 2^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} \cdot x^{\ln x^6} \cdot x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} = 1$

$2^{\ln x^4 + \ln\frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln x^6 + \ln\frac{2}{x^6}} = 1$

$\ln x^4 + \ln\frac{2}{x^6} = \ln\left(x^4\cdot\frac{2}{x^6}\right) = \ln\frac{2}{x^2}$, ($x\neq 0$, т.к $x>0$)

$\ln x^6 + \ln\frac{2}{x^6} = \ln\left(x^6\cdot\frac{2}{x^6}\right) = \ln 2$ ($x\neq 0$, т.к. $x>0$)

$2^{\ln\frac{2}{x^2}}\cdot x^{\ln 2} = 1$

$2^{\ln\frac{2}{x^2}} = 2^{\ln 2 - \ln x^2} = 2^{\ln 2}\cdot 2^{(-\ln x^2)} = \frac{2^{\ln 2}}{2^{\ln x^2}}$

$\frac{2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2}}{2^{\ln x^2}} = 1$

$2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2} = 2^{\ln x^2}$

$(2x)^{\ln 2} = 2^{\ln x^2}$

$(2x)^{\ln 2} = 2^{2\ln x}$

$(2x)^{\ln 2} = 4^{\ln x}$

~~Посмотрим на функцию~~ $(2x)^{\ln 2}$. $\ln 2 < 1$, т.к. $e > 2 \Rightarrow$ ~~это функция степенная убывающая, т.к. степен~~

~~Посмотрим на функцию~~ $y = (2x)^{\ln 2}$. $\ln 2 < 1$, $\ln 2 > 0$, т.к. $2 > 1$, т.к. $x > 0$ ~~по ОДЗ, возьмем~~ $x_1 > x_2$. $2x_1 > 2x_2 \Rightarrow$

Посмотрим на 1-е ур-е системы:

Введём новые переменные: $\ln x = a$, $\ln\left(\frac{y}{x^7}\right) = b$, т.е. $e^a = x$, $e^b = \frac{y}{x^7}$.

Тогда $y = e^b\cdot x^7 = e^b\cdot(e^a)^7 = e^b\cdot e^{7a} = e^{7a+b}$

$x^2 = (e^a)^2 = e^{2a}$. $y^4 = (e^{7a+b})^4 = e^{28a+4b}$.

Тогда получаем новое уравнение:

$(e^{2a}\cdot e^{28a+4b})^{-a} = (e^{7a+b})^b$

$(e^{2a+28a+4b})^{-a} = e^{7ab+b^2}$

$(e^{30a+4b})^{-a} = e^{7ab+b^2}$

$e^{-30a^2-4ab} = e^{7ab+b^2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Это ~~степенное ур~~ показательное уравнение =>

$-30a^2-4ab=7ab+b^2$

$30a^2+b^2+11ab=0$

$30a^2+11ab+b^2=0$

Рассмотрим ур-е отн-но a:

$D=(11b)^2-4\cdot 30b^2=121b^2-120b^2=b^2$

$a_{1,2}=\frac{-11b\pm b}{60}$

$a_1=-\frac{b}{5}$ $\qquad$ $a_2=-\frac{b}{6}$

$a=\ln x,\ b=\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)$

$\ln x=\cancel{-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$ $\qquad$ $\ln x=-\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)$

$\ln x=\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}}$ $\qquad$ $\ln x=\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}}$

Т.к. это логарифмическое уравнение, то

1) $x=\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}}$ $\qquad$ 2) $x=\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}}$

Теперь вернёмся к I случаю II ур-я:

$y=2x$

1) $x=\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{2x}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{2}{x^6}\right)^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{x^6}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$ | возведем в 5 степень

$x^5=\frac{x^6}{2}$ $\qquad$ т.к. $x\neq 0$ по ОДЗ $(x>0)$, то

$\frac{x}{2}=1 \Rightarrow x=2,\ y=2\cdot 2=4$

2) $x=\left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left(\frac{2x}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left(\frac{2}{x^6}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left(\frac{x^6}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$ | возведём в 6 степень

можем возвести, т.к. всё положительно по ОДЗ

$x^6 = \frac{x^6}{2}$

$2x^6 = x^6$, $x^6 = 0$, но $x \neq 0$ по ОДЗ, значит, решений нет.

Теперь вернёмся ко II случаю II ур-я:

$y = 4 - x$

1) $x = \left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{4-x}{x^7}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\frac{1}{5}}$ (возведём в 5 степень)

$x^5 = \frac{x^7}{4-x}$ $\quad | : x^5$ ($x \neq 0$ по ОДЗ)

$1 = \frac{x^2}{4-x}$

$x^2 = 4 - x$

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

не соотв. ОДЗ

$x_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$y = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}$. Т.к. $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$, то $\frac{\sqrt{17}-1}{2} < \frac{5-1}{2} = 2$, т.е.

$4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 4 - 2 > 0$, т.е. соотв. ОДЗ.

2) $x = \left(\frac{y}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{4-x}{x^7}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\frac{1}{6}}$. Возведём в 6 степень, знак не изменится, т.к. все положительно по ОДЗ.

$x^6 = \frac{x^7}{x-4}$ $\quad | : x^6$

$1 = \frac{x}{x-4}$

$x - 4 = x$

$0 = -4$

нет решений.

Ответ: $(2; 4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

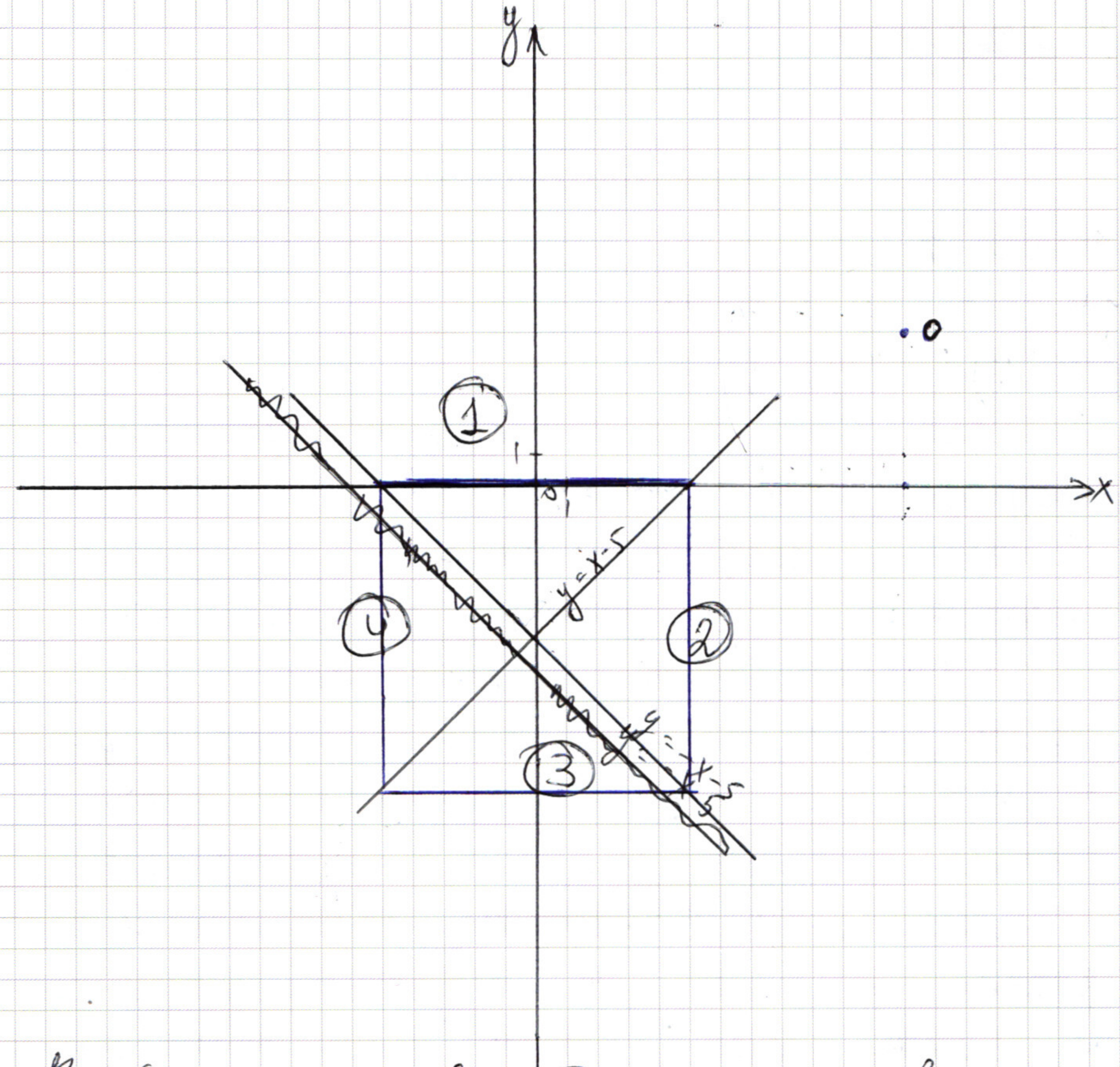
Заметим, что во 2 ур-и системы слева сумма квадратов, значит $a \geq 0$.

Построим график 1 ур-я:

модуль I раскрывается со знаком „+" или „-" в зависимости от того, лежит точка выше или ниже графика функции $y = -x-5$ (если $y \geq -x-5$, т.е. $y+x+5 \geq 0$, то со знаком „+", если $y < -x-5$, т.е. $y+x+5 < 0$, то со знаком „-"). II модуль раскрывается со знаком „+" или „-" в зависимости от того, выше или ниже лежит точка относительно графика функции $y = x-5$ (если $y \geq x-5$, т.е. $-y \leq -(x-5)$, то $y-(x-5) \geq 0$, если $y < x+5$, т.е. $-y > -(x-5)$, то $y-(x+5) < y-y=0$).

В соответствии с этим построим графики функций $y = -x-5$, $y = x-5$.

Получится 4 области:



В области 1: все точки лежат выше графика $y=x-5$ и $y=-x-5$, то есть оба модуля раскрываются со знаком „+“:
$|x+y+5|+|y-x+5| = x+y+5+y-x+5=10$
$2y=0 \Rightarrow y=0$. Это горизонтальная прямая (синим цветом). В области 2: точки лежат выше ~~или правее~~ прямой $y=-x-5$, но ниже прямой $y=x-5$, то есть I модуль со знаком „+“, второй – со знаком „–“.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+5|+|y-x+5| = x+y+5-y+x-5=10.$

$2x=10 \Rightarrow x=5$. Это вертикальная прямая (синим цветом).

3 область: все точки ниже обеих прямых $\Rightarrow$ оба модуля раскрываются со знаком „$-$“ $\Rightarrow$

$|x+y+5|+|y-x+5| = -x-y-5-y+x-5=10$

$-2y=20$

$y=-10$ – горизонтальная прямая (синим цветом).

4 область: все точки выше прямой $y=x-5$, но ниже $y=-x-5$, I модуль раскрывается со знаком „$-$“, второй – со знаком „$+$“:

$|x+y+5|+|y-x+5| = -x-y-5+y-x+5=10.$

$-2x=10$

$x=-5$ – вертикальная прямая (синим цветом)

Получим, что график – синий квадрат.

Посмотрим на II ур-е:

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a.$

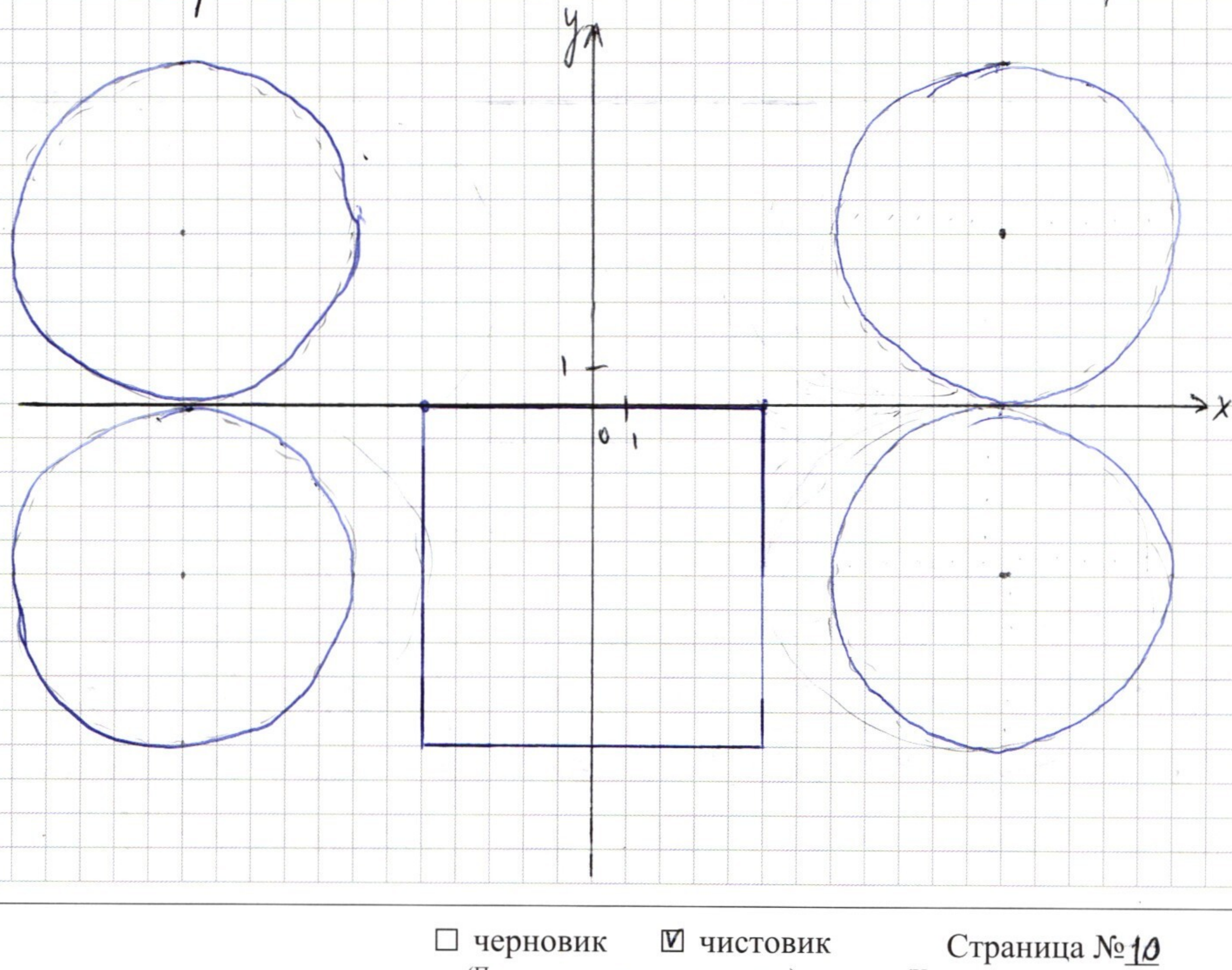
Если без модулей, то это уравнение окр-ти с центром в т. $(12;5)$ и радиусом $\sqrt{a}$ $(a>0)$.

Если $a=0$, то это точка $(12;5) \Rightarrow$ решений нет.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

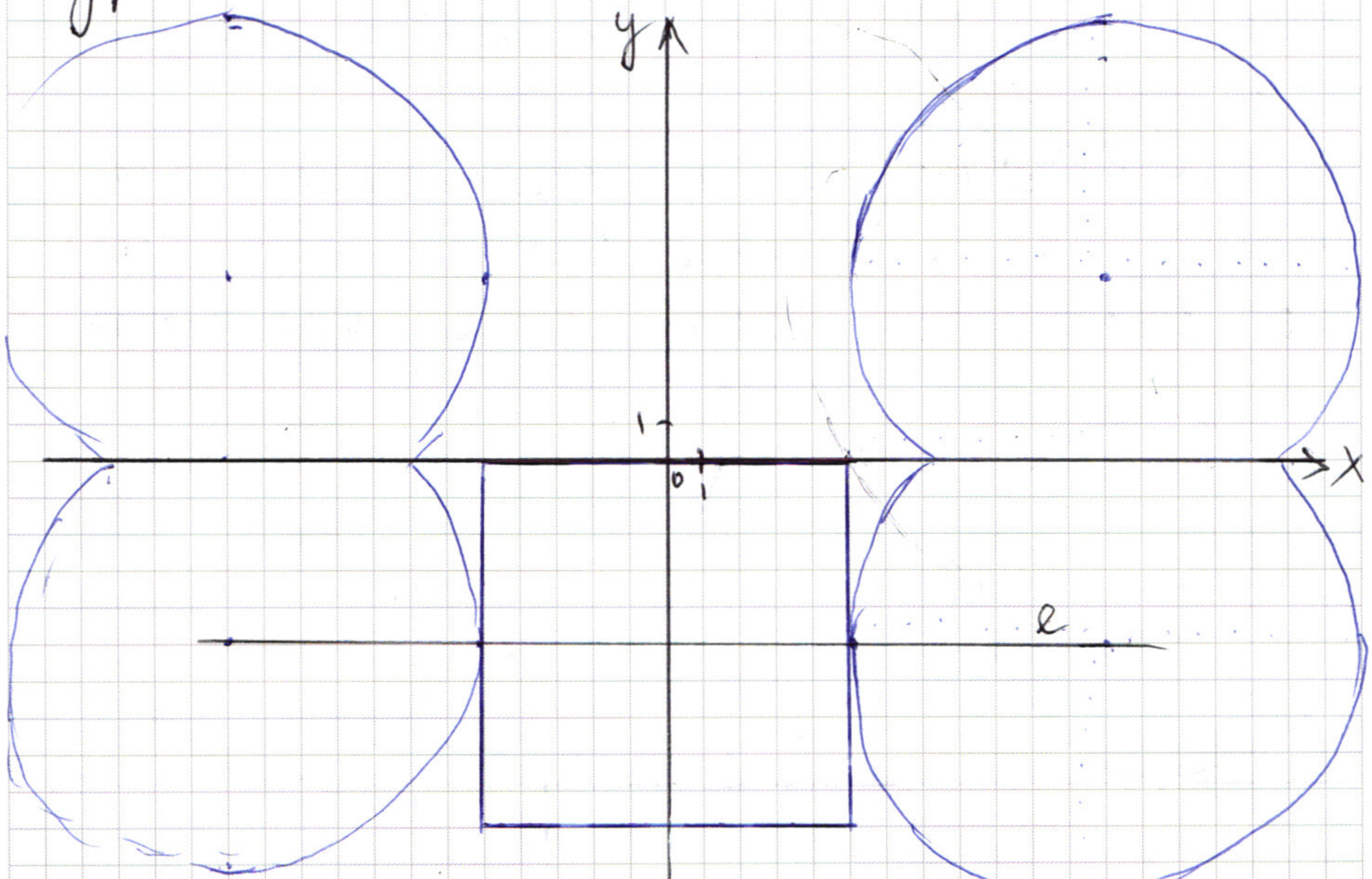
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

т.е. в I четверти - это график той части окр-ти, которая входит в I четверть. (т.к. $x \geq 0$, $y \geq 0$).
Если мы добавляем ~~??~~ $|x|$, то то, что правее оси OY отражается отн-но оси OY, т.к. $|x| = |-x|$, когда добавляем $|y|$, то то, что ниже оси OX отражается отн-но оси OX, т.к. $|y| = |-y|$.
Если $\sqrt{a} \leq 5$, то в I четверти вся окр-ть лежит в I четверти (не ниже оси OX), т.е. отражается ~~только~~ тоже вся окр-ть:

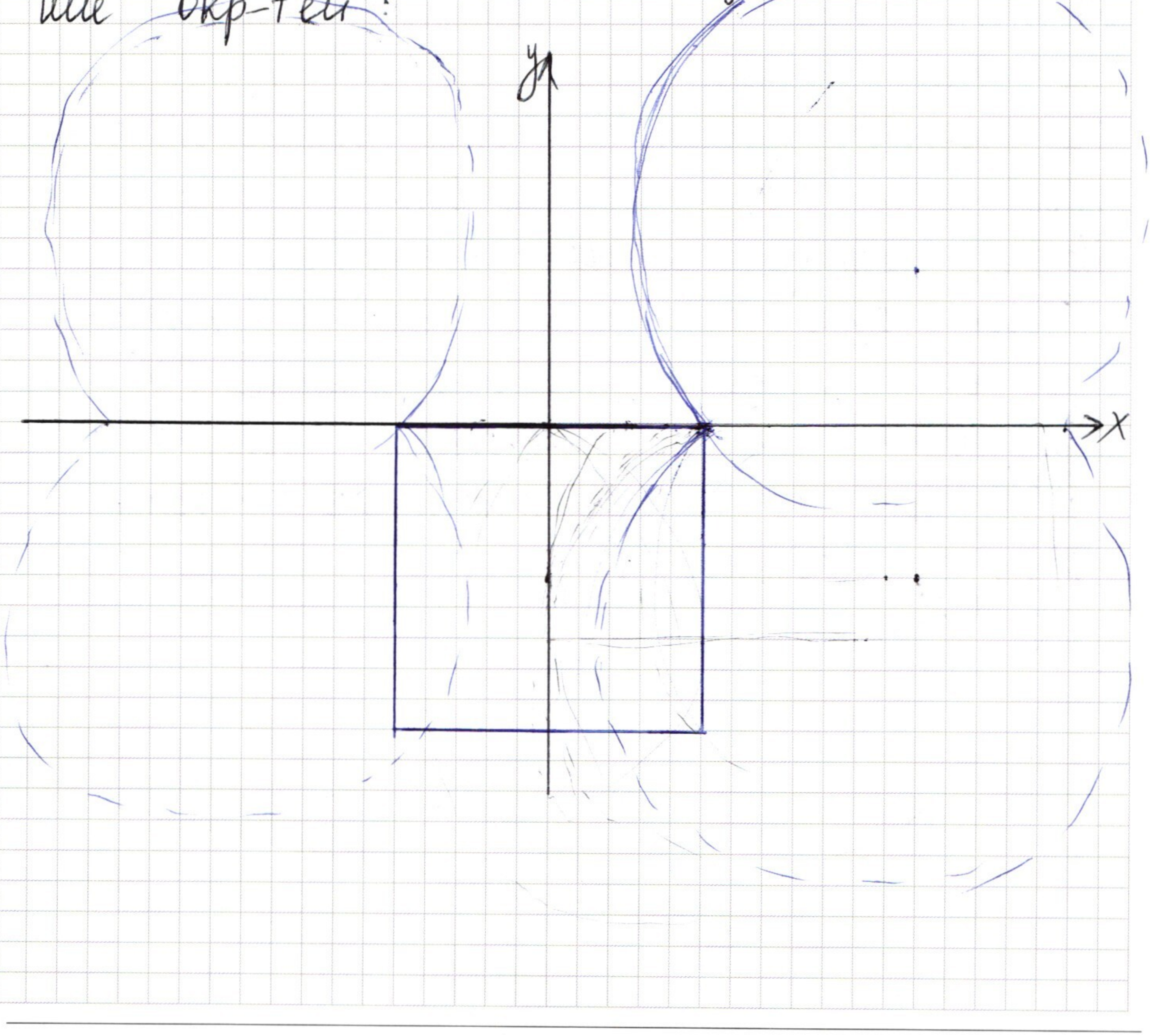


при $\sqrt{a}=5$ графики I и II функции не имеют общих точек => решений нет. При $\sqrt{a}<5$ все окр-ти лежат внутри окружности с $r=\sqrt{5}$ => также не имеют общих точек => не имеют решений. Если $\sqrt{a}>5$; но $\sqrt{a}<7$:

~~Заметим, что те 4 окр-ти, которые лежат в I и во II четверти никогда не будут иметь общих точек с графиком I ур-я системы, т.к.~~



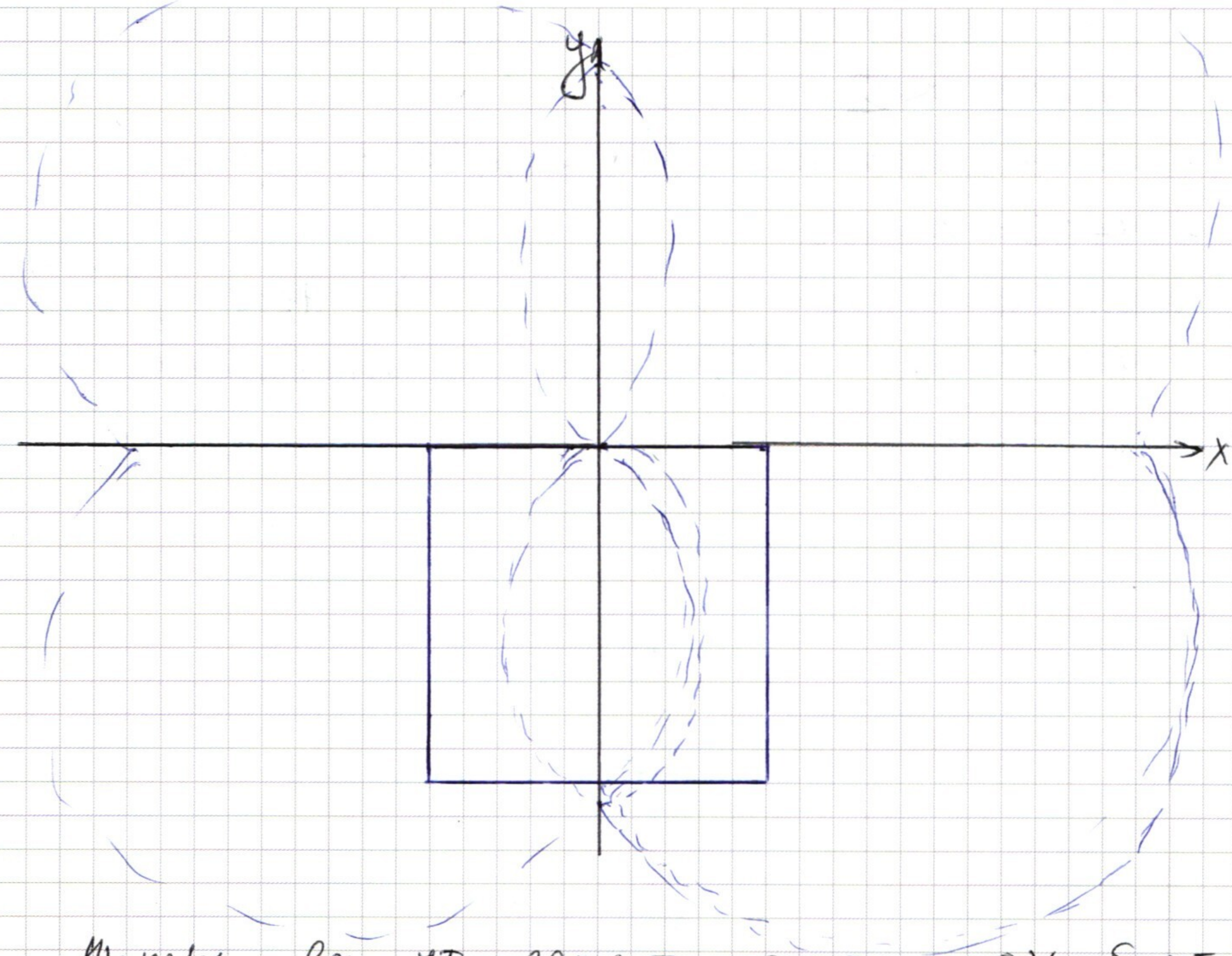
Все окр-ти при $5<\sqrt{a}<7$ лежат внутри таких недоокружностей => не касаются сторон квадрата => нет решений системы. При $\sqrt{a}=7$: окр-ти на рисунке и они касаются (две нижние) * квадрата (т.к. прямая $\ell = -5$ проходит через центры обеих окр-тей и $\ell \perp$ вертикальным сторонам квадрата) => ~~в~~ они касаются и для каждой из 2-х нижних окр-тей точка касания ровно одна => при $\sqrt{a} = 7$ 2 решения => $a = 49$ Посмотрим на следующее положение окр-тей:



До этого положения окр-тей (пусть $a = a_1$ в этом случае), т.е. $7 < \sqrt{a} < a_1$ нижние окр-ти ~~касаю~~ пересекают квадрат по 2 раза, верхние не пересекают => решений 4. После этого положения пересекать начинают верхние окр-ти. При этом нижние окр-ти всегда будут пересекать квадрат по 2 раза (при $y = 0$ и при $y = -10$). И так до тех пор, пока нижние окр-ти не будут касаться оси OY. До этого момента решений будет ≥ 4, т.к. нижние пересекают по 2 раза квадрат, точки не совпадают, т.к. эти недоокружности лежат полностью либо левее оси OY, либо правее).
~~Когда радиус станет больше, чем~~
Если они касаются оси OY, то $\sqrt{a} = 12$, т.к. $\{x = 12$, радиус перпендикулярен OY. При этом окр-ть пересекает квадрат при $y = -10$ => решений ≥ 3. Если радиус больше 12:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



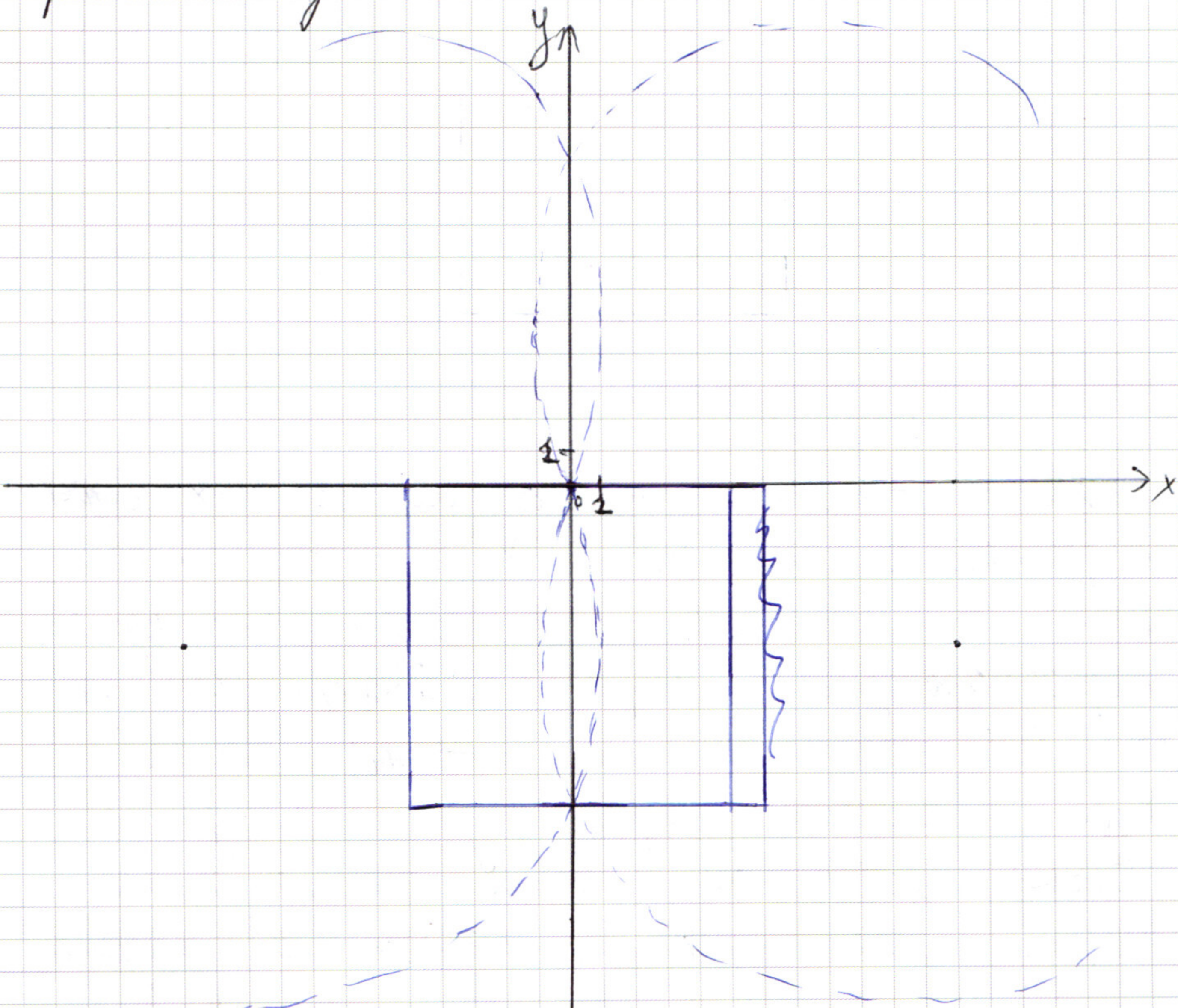
Теперь все, что заходить за ось OX будет отражаться отн-но OY, т.к. окр-ти равные, то по сути, мы получим просто пересекающиеся окр-ти, и выходящие за ось OY. Заметим, что ~~всегда~~ всегда будет решение при $y=0$ и $y=-10$. Если хотя бы одна такая точка окр-ти не будет совпадать с другой, то решений будет ≥ 3. Значит, решений будет ровно 2, если эти окр-ти (нижние пересекутся в точках $(0;0)$ и $(0;-10)$, иначе, т. к. картинка симметрична отн-но OY, то решений с каждой стороны ≥ 2, в сумме > 2. Если $x=0$, $y=0$, то

~~$|0+0+5|+|0-0|$~~ $(|0|-12)^2+(|0|-5)^2=a$

$144+25=a=169$.

Если $x=0$, $y=-10$, $((|0|-12^2)+(|0|-5)^2=$

$=144+25=169$. Нарисуем и проверим, что решений действительно 2:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

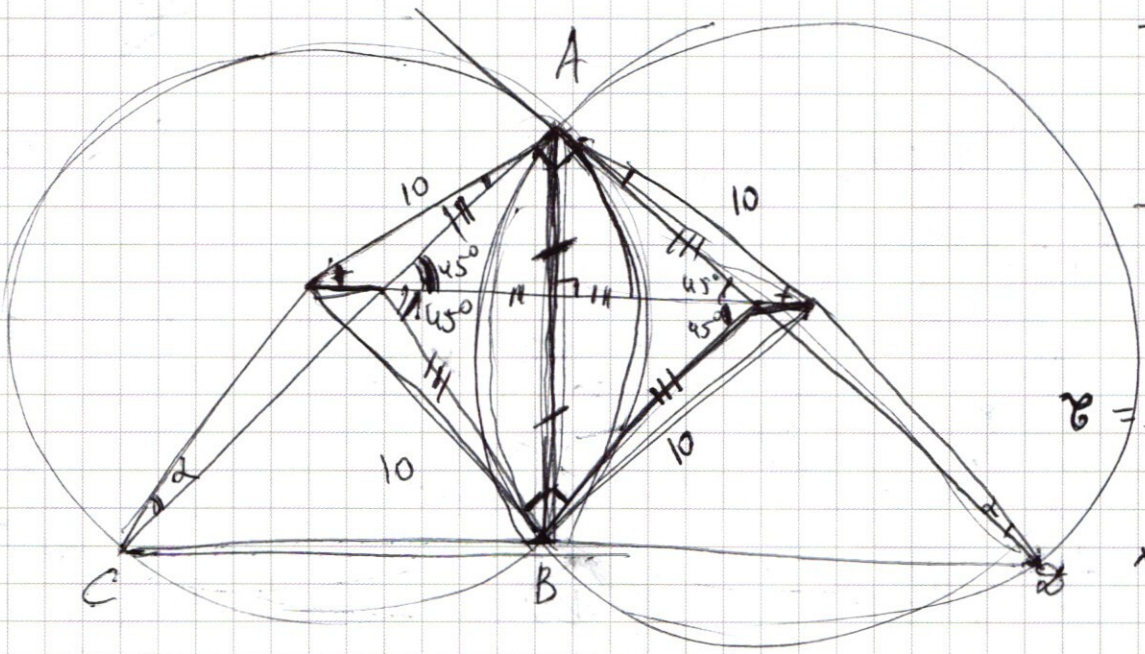
Заметим, что верхние окр-ти проходят через т. (0;0), т.к. картинка симметрична отн-но OX и больше с квадратом не имеет общих точек, т.к. все остальные выше оси OX. Все остальные точки нижних квадратов не могут иметь общих точек с квадратом, т.к. горизонтальные прямые пересекли, а ~~радиусы~~ маленькие недоокружности не могут касаться горизонтальных сторон, т.к. ~~они~~ самые дальние точки по оси OX — это ±1.

Ответ: 49, 169.

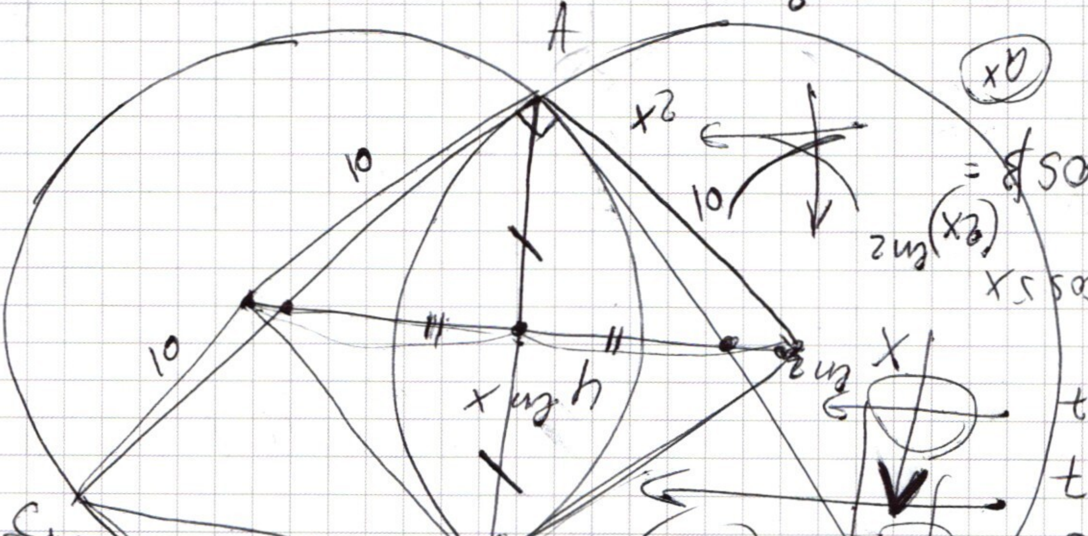
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD^2 = BD \cdot CD$$

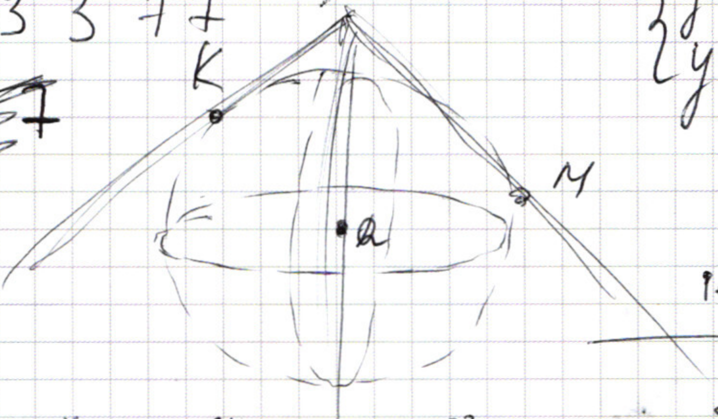


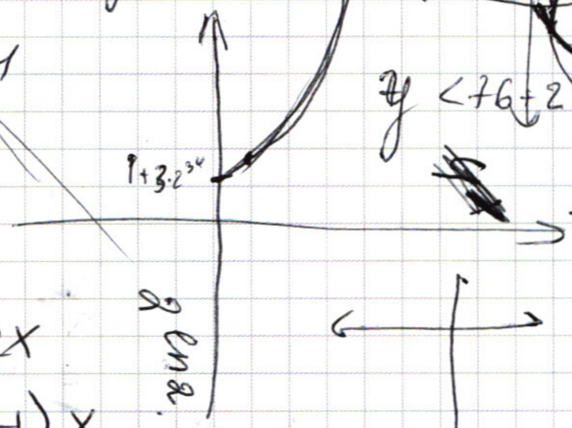
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

1 3 3 7 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

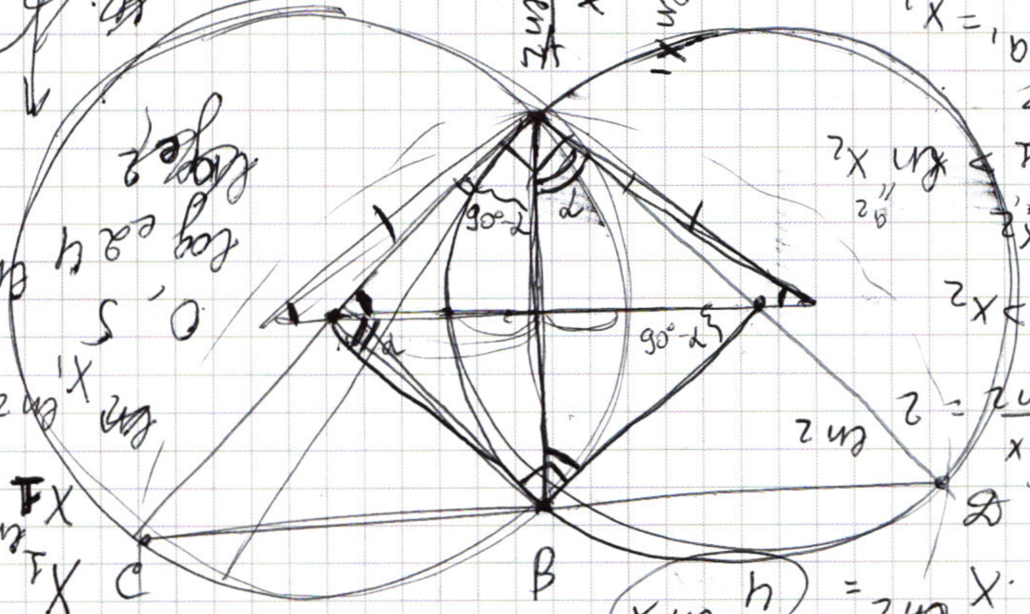


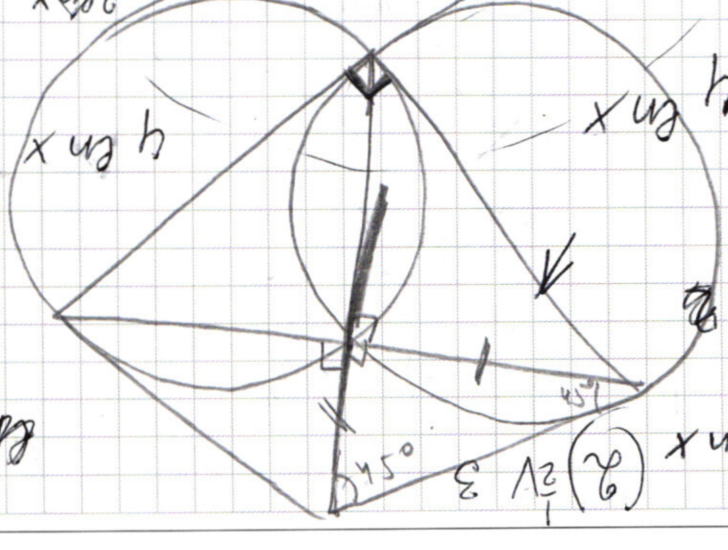


$y < 76 + 2^{33}x - 2x$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2^{33}x - 2x$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32}-1)x$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$x+y+5>0$

$y > -(x+5)$

$4-5+5>0$

$4-5=4+5$

$y=-(\cancel{x+5})-x-5$

$y=5-x$

$(|x|-12)^2+|y-5|^2=(a)^2$

$y-x+5=0$

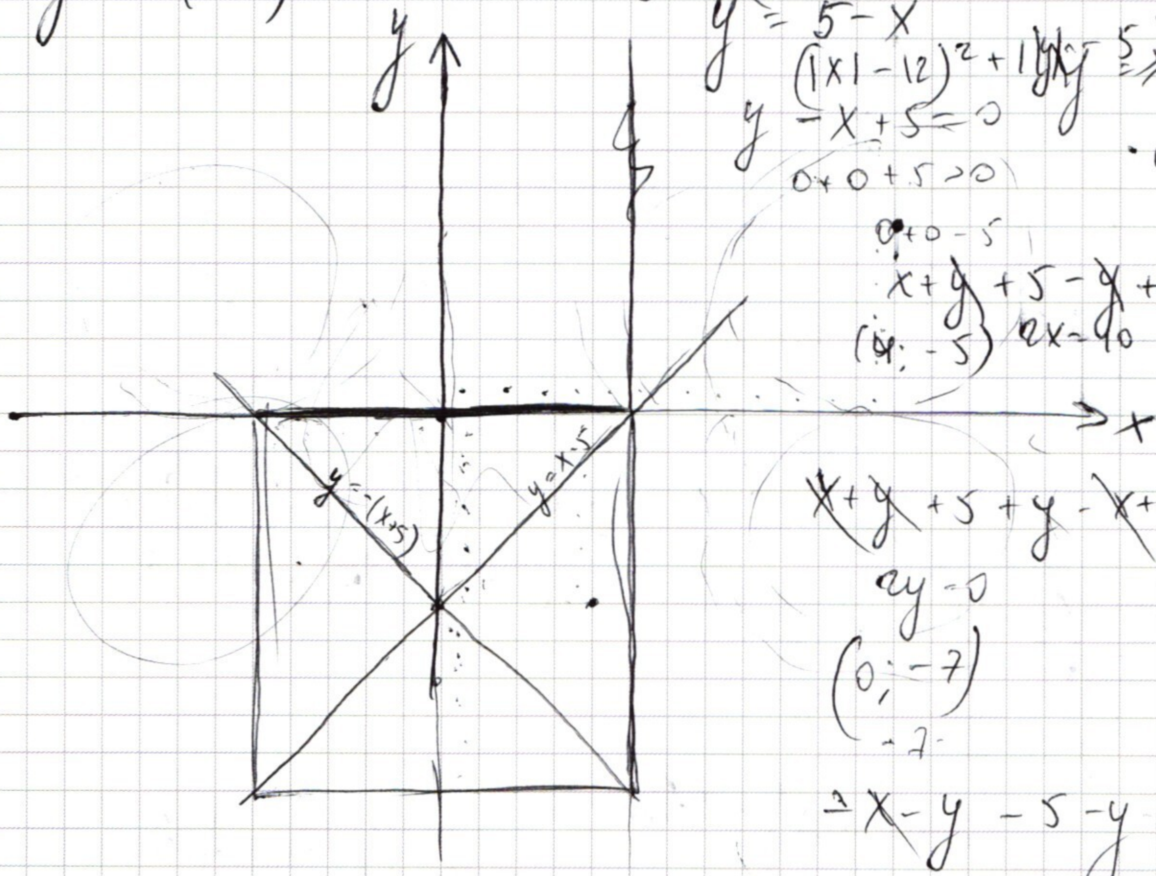
$\cdot a>0$

$0+0+5>0$

$0+0-5$

$x+\cancel{y}+5-\cancel{y}+x-5=10$

$(4;-5)$ $2x=10$ $x=5$



$\cancel{x}+y+5+y-\cancel{x}+5=10$

$2y=0$

$(0;-7)$

-7

$-x-y-5-y+\cancel{x}-5=10$

$(5;-5)$ $-2y-10=10$

$-2y=20$

$-5-5+5$ $y=-10$

$-5+5$

$-x-\cancel{y}-5+\cancel{y}-\cancel{x}+5=10$

$-2x=10$

$x=-5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y = 4 - x$

$$\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$$

$\times \frac{16}{8}$

$$(x-4)^4 = \left((x-4)^2\right)^2 = (x^2 - 8x+16)(x^2-8x+16) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$-8x^3 + 16x^2 - 128x + 16x^2 - 128x + 256 =$$

$$= x^4 - 16x^3 + 98x^2 - 256x + 256$$

$$\left((x y^2)^2\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$$

$xy \quad x = 4 - y$

$$\left((4-y)^2 \cdot y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$$

$$\left(x^2 y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \qquad \ln_e x = c \quad e^c = x$$

$\cancel{x^2 y^4}$

$\ln x = a \qquad e^a = x$

$\ln\left(\frac{y}{x^7}\right) = b \qquad e^b = \frac{y}{x^7} \qquad y = x^7 e^b =$

$$x^2 = (e^a)^2 = e^{2a} \qquad = e^{7a} \cdot e^b = e^{7a+b}$$

$$(y^4) = e^{28a+4b}$$

$$\left(e^{2a} \cdot e^{28a+4b}\right)^{-a} = y\left(e^{7a+b}\right)^b$$

$$e^{-30a^2 \cancel{+4ab}}$$

$$30a^2 + 4ab + 7ab + b^2$$

$$\alpha = 1$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$ $\quad (x^2\cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$ $\quad \frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}}$

$1 = 16^{\ln x}\cdot x^{6\ln x}\cdot 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}} = \cancel{16}\, 2^{4\ln x}\cdot 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{6\ln x}\cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}} =$

$= 2^{\ln x^4 + \ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln x^6 + \ln\frac{2}{x^6}} = 2^{\ln\frac{2}{x^2}}\cdot x^{\ln 2} = 1 =$

$= \frac{2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2}}{2^{\ln x^2}} = 1$ $\quad (2x)^{\ln 2} = 2^{\ln x^2}$

$\ln x^2 = a$ $\quad \cancel{e^{a^2} = x^2}$ $\quad e^a =$, $e^a = x^2$ $\quad x = \sqrt{e^a}$

$2x = 2\sqrt{e^a}$ $\quad (2\sqrt{e^a})^{\ln 2}$

$(2x)^{\ln 2} = 2^{2\ln x}$ $\quad 2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2} = 4^{\ln x}$

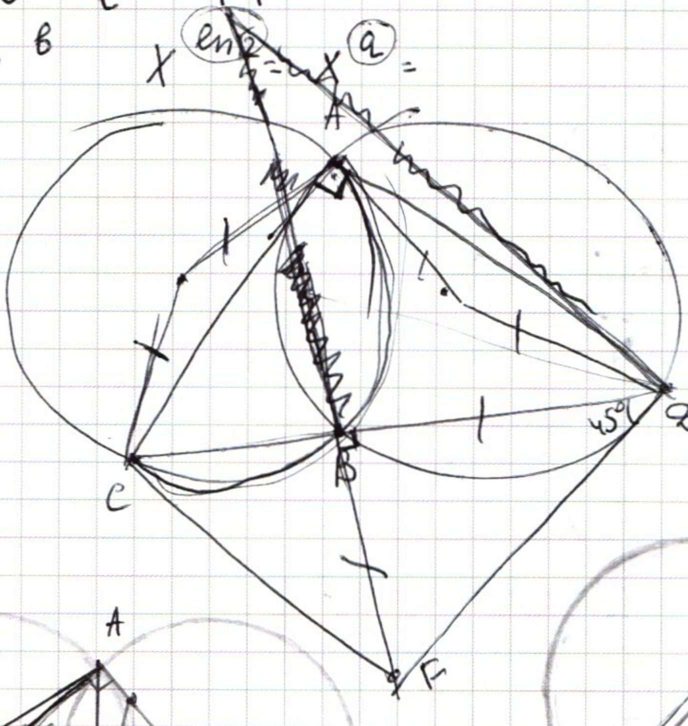
$\frac{4^{\ln x}}{x^{\ln 2}} = 2^{\ln 2}$ $\quad \ln 2 = a$ $\quad e^a = 2$ $\quad 2^a = e^{a\cdot a} = e^{(\ln 2)^2}$

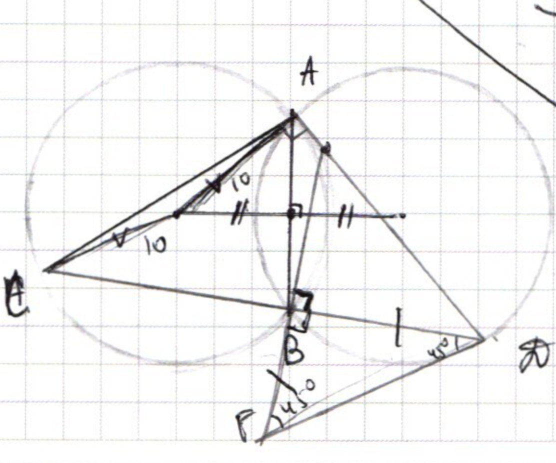
$\ln x = b$ $\quad e^b = x$

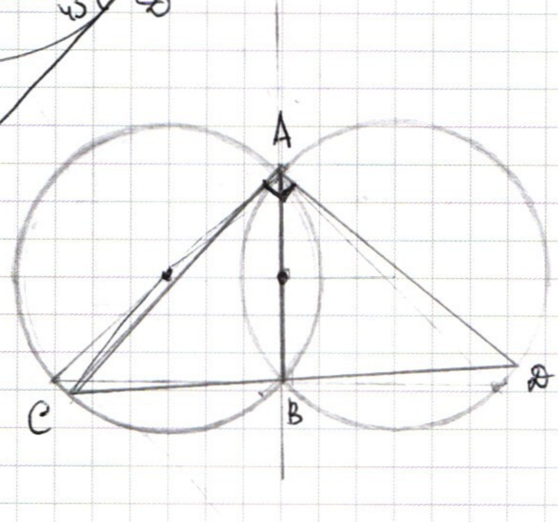
$4^{\ln x} = 4^b$ $\quad x^{\ln 2} = x^a =$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = FD$







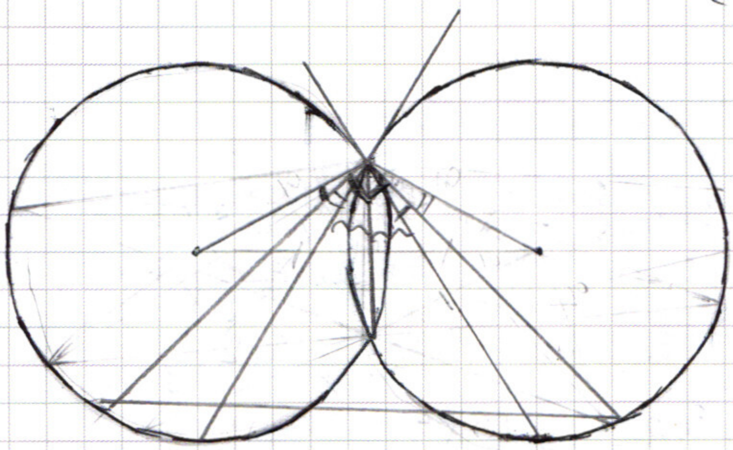
$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$\ln y = a$

$e^a = y$

$y^2 = (e^a)^a = e^{a\cdot a} =$

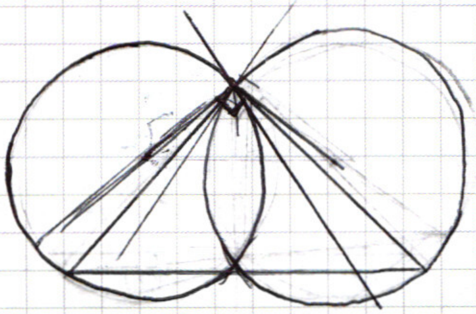
$= e^{(\ln y)^2}$



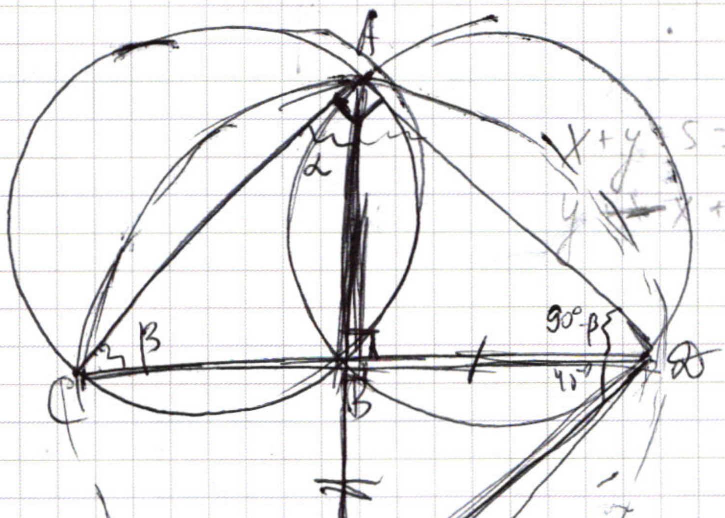
$> y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$ Если $x > 0 \Rightarrow y < 3\cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2^{33}x - 2x$ $76 = \cancel{2\cdot 3 \cdot 2}$

$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$



$x > -(y+5)$



$x + y - 5 > 0$

$y - x + 5 > 0$ 1

$0 > h$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_8 = 9261$

$9261 : 3 = 3087$, $3087 : 3 = 1029$, $1029 : 3 = 343$, $343 : 7 = 49$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

$49 \cdot 7 = 343$

$343 \cdot 27 = 9261$

3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1

~~первая фишка~~

$3! \cdot 3! \cdot 2!$

~~2 1 тройку~~

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin\frac{9x-5x}{2}\cdot\sin\frac{9x+5x}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 4x + 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cdot\cos\frac{9x-5x}{2} = 0$

$-2\sin 2x\cdot\sin 7x - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cdot\cos 2x = 0$

$-\sin 2x\cdot\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x + \sin 7x\cdot\cos 2x = 0$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x = 0$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)\right) = 0$

$\cos 2x = \sin 2x$

решается

$\sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 0$

$\sin 7x - \left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

$2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2}\cdot\cos\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 2x}{2} = 0$

решается

3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0\end{cases}$

$\begin{cases}(y - 2x)(y + x - 4) = 0 \\ (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}\end{cases}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^2 - y(x+4) + (8x - 2x^2) = 0$

$D = (x+4)^2 - 4\cdot(8x - 2x^2) = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y_{1,2} = \frac{x + 4 \pm (3x-4)}{2}$ $y_1 = 2x$ $y_2 = -x + 4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} y = 2x \\ 2(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 4-x \\ 2(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \end{cases}$

ОДЗ: $x>0$ $\quad \frac{y}{x^7} > 0 \Rightarrow y > 0$

$(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$

$(x^2\cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = 2x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$ $\qquad (16x^6)^{\ln x}\cdot 2x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} =$

$= 1 \quad 16^{\ln x}(x^6)^{\ln x}\cdot 2x^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot 2^{\ln\frac{2}{x^6}} = 1$

$2^{4\ln x}\cdot 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{6\ln x}\cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}} = 1$

$2^{\left(4\ln x + \ln\frac{2}{x^6}\right)}\cdot x^{6\ln x + \ln\frac{2}{x^6}} = 1$

$2^{\ln x^4 + \ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{6\ln x^6 + \ln\frac{2}{x^6}}$ $\qquad \ln x = a \quad e^a = x$

$\ln x = a$ $\qquad x^6 = e^{6a} \qquad \ln x^6 = 6$

$e^a = x \quad e^{6a} = x^6 \quad \ln_e e^{6a} = 6a \qquad e^{6a}$

$(e^a)^6\ x^{\ln x^6} \qquad \ln x^6 = a \quad e^a = x \quad x^6 = e^{6a}$

$\cancel{x^{\ln x^6}} \quad (e^a)^{6a} \quad x^{\ln x^6} \qquad \ln x = a \quad e^a = x$

$a^{\log_2 a}$ $\qquad \ln x = x^a$ $\quad \cancel{\ln x = a \quad e^a = x}$

$\log a$

$2^{\ln\left(x^4\cdot\frac{2}{x^6}\right)}\cdot x^{\ln\left(x^6\cdot\frac{2}{x^6}\right)} = 2^{\ln\left(\frac{2}{x^2}\right)}\cdot x^{\ln 2} = 1$

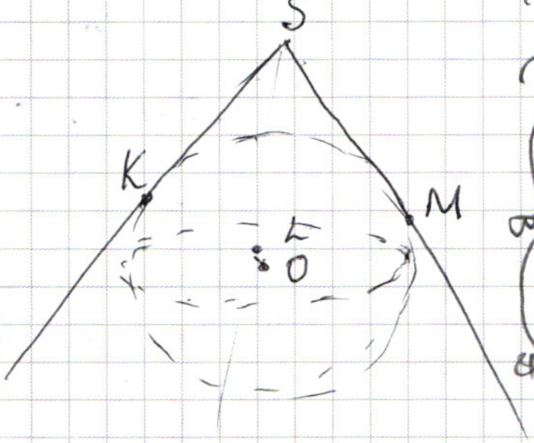
$\cancel{2^{\ln 2}}\ 2^{\ln 2 - \ln x^2}\cdot x^{\ln 2} = \frac{2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2}}{2^{\ln(x^2)}} =$

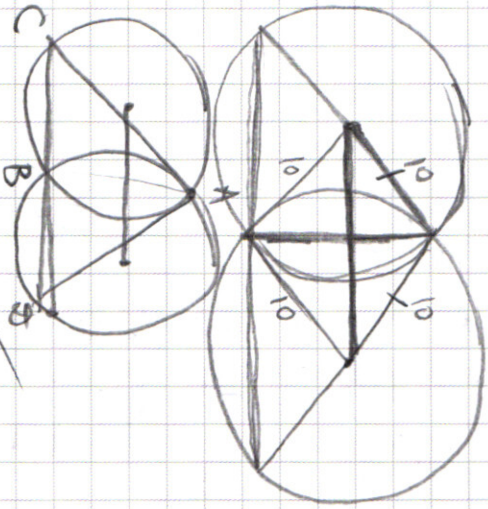
$= \frac{2^{\ln 2}\, x^{\ln 2}}{2^{\ln x^2}} = 1$

$\log_e 2 = a \quad e^a = 2 \quad x^{\ln 2} = x^a \qquad \ln x^2 =$

$\cancel{2^{\ln 2}}$ $\qquad \ln 2 = a \quad e^a = 2 \quad 2^{\ln 2} = 2^a$

$\frac{x^{\ln 2}}{2^{\ln x^2}} = \frac{1}{2^{\ln 2}}$ $\qquad |x+y+5| + |y-x+5| = 10$





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)