

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО 1

11 класс

ВАРИАНТ 7

III

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \quad \text{N3} \quad \text{I}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad \text{II}$$

ОДЗ: $x > 0, \frac{y}{x^2} > 0 \Rightarrow y > 0$

Ответ: $\boxed{x=2, y=4}$; $\boxed{x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, y = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2}$

Решим II наискрещивая:

$$(y-x)(y+x) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y+x-4)(y-2x) = 0$$

Это уравнение имеет 2 решения: $\begin{cases} y+x-4=0 \\ y-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4-x \\ y=2x \end{cases}$

Решим I:

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^2} = y^{\ln y} / y^{2 \ln x} \Rightarrow \frac{y^{\ln y}}{(y^2)^{\ln x}} = y^{\ln y}$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2 y^4}\right)^{\ln x} = y^{\ln y} \Rightarrow \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} = y^{\ln y} \Rightarrow \frac{y^3}{x^2} = y^{\frac{\ln y}{\ln x}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

~~$\Rightarrow y^3 = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \cdot x^2$~~

~~$\log_3 y = \log_3 y^{\ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow \log_3 y = \ln \frac{y}{x^2} \Rightarrow \log_3 y = \frac{\ln y}{\ln x^2} \Rightarrow \log_3 y = \frac{\ln y}{2 \ln x}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y^{\ln \frac{y}{x^2}}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

~~$\Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$~~

Итак, имеем:

$$\begin{cases} y=4-x & \text{A} \\ y=2x & \text{B} \\ x^2=y & \text{C} \end{cases}$$

Случай A: $4-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-4=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, y = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right)^2$ (вариант $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ не подх. по ОДЗ)

Случай B: $2x=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ - не подх. по ОДЗ} \\ x=2 \Rightarrow y=4 \end{cases}$

Случай C: $x^2=y \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y^{\log_3 y} = y^{\log_3 y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим 9261 на простые множители. $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. Т.к. это число является произведением цифр восьмизначного числа, т.е. произведением восьми целых неотрицательных чисел, принимающих значения от 0 до 9, то:

- 1.) цифр 0, 2, 4, 5, 6, 8 в разложении быть не может.
- 2.) в разложении числа содержится ровно ~~одна~~^{три} цифра 7. разложение
- 3.) если в разложении числа содержится ≥ 2 двух цифр 9, то в произведении цифр 3 должно входить в степень ≥ 4 , что не так $\Rightarrow$ цифр 9 в числе ≤ 1 .
- 4.) если в разложении числа содержится 1 цифра 9, состав цифр может:
3 цифры 7, 1 цифра 9, 1 цифра 3, 3 цифры ~~1~~¹.
Таких чисел $\underbrace{C_8^3}_{\text{поставили 7}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{поставили 1}} \cdot \underbrace{C_2^1}_{\text{поставили 9}} \cdot \underbrace{C_1^1}_{\text{поставили 3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2 = 1120$
- 5.) если в разложении числа содержится 0 цифр 9, состав цифр может:
3 цифры 7, 3 цифры 3, 2 цифры ¹.
Таких чисел $\underbrace{C_8^3}_{\text{поставили 7}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{поставили 3}} \cdot \underbrace{C_2^2}_{\text{поставили 1}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$

Всего таких чисел $1120 + 560 = 1680$ Ответ: 1680.

№ 2

Запишем, что $\cos 9x - \cos 5x = -2 \cdot \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \sin \frac{9x-5x}{2} = -2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2 \cdot \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \cos \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$

Тогда: $(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$

$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2 \cdot 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$

продолжение на след. листе.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$ (попрощение)

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) \right) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

Это возможно в двух случаях:

I. $\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \pi - \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

Второй: $x = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

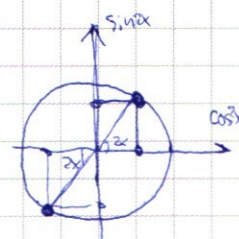
$\sqrt{5}$.

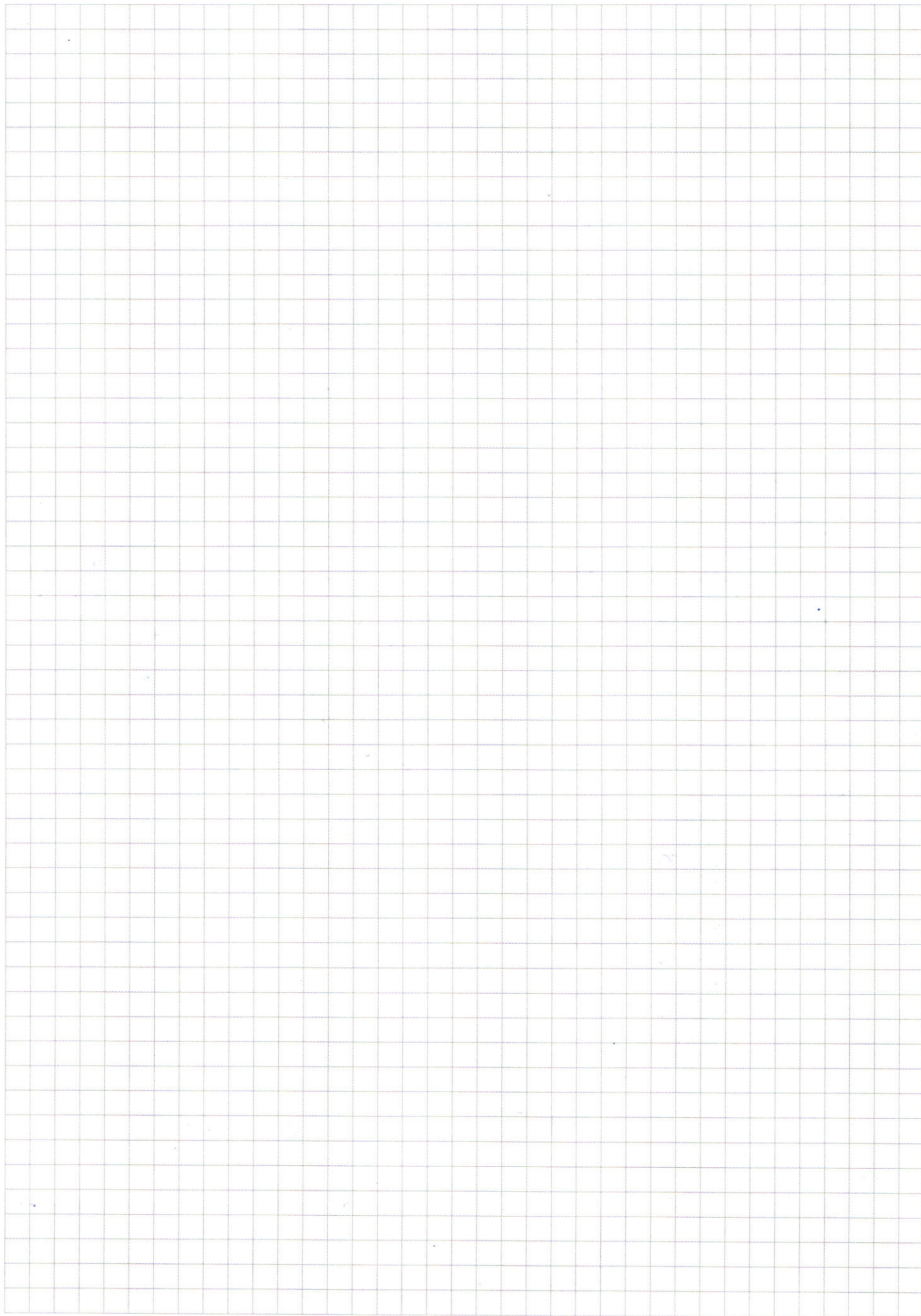
$$\sqrt{|x+y+5| + |y-x+5|} = 10 \quad \text{I}$$

$$\sqrt{(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2} = a \quad \text{II}$$

продолжение на следующем листе

Рассмотрим уравнение номер I, разобрав, как и в каком случае раскрываются модули:





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{S}$ (проверка)

1) $x+y+S \geq 0$; $y-x+S \geq 0$
 $x+y+S+y-x+S = 10$
 $2y=0 \Rightarrow y=0$; $S \geq x \geq -S$

2.) $x+y+S \geq 0$; $y-x+S \leq 0$
 $x+y+S-y+x-S = 10$
 $2x=10 \Rightarrow x=5 \Rightarrow |y-10|+|y|=10$ ← подставим x в исходное
По ограничению $0 \geq y \geq -10 \Rightarrow$ модуль раскрывается так:
 $y+10-y=10 \Rightarrow y \in [0; -10]$

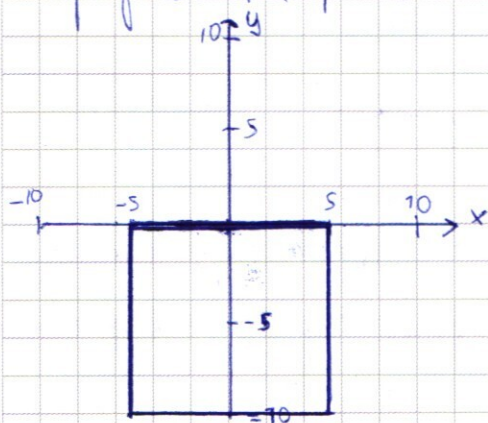
3.) $x+y+S \leq 0$; $y-x+S \geq 0$

$-x-y-S+y-x+S = 10$
 $-2x=10 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow |y+10|+|y-10|=10$
По ограничению $0 \geq y \geq -10 \Rightarrow$ модуль раскрывается так:
 $y+10-y=10 \Rightarrow y \in [0; -10]$

4.) $x+y+S \leq 0$; $y-x+S \leq 0$

$-x-y-S-y+x-S = 10$
 $-2y=20 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow |x-5|+|-x-5|=10$
 $\Rightarrow |x-5|+|x+5|=10$. По ограничению $-5 \leq x \leq 5$
 $\Rightarrow$ модуль раскрывается так: $5-x+x-5=10 \Rightarrow x \in [-5; 5]$

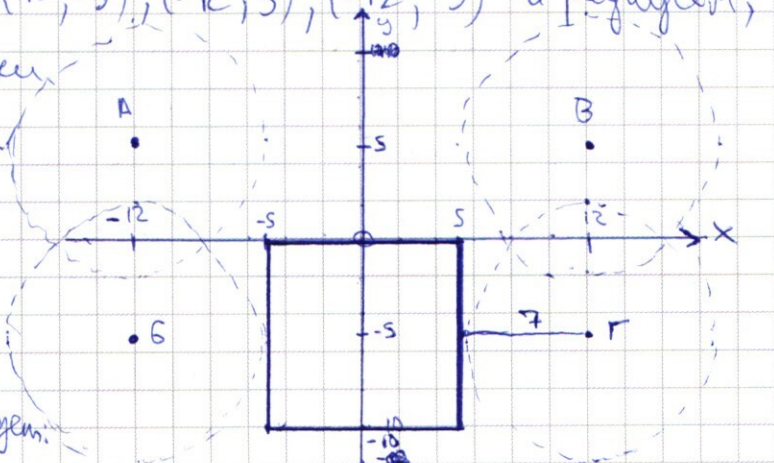
Графически решения этого уравнения выглядят так:



Рассмотрим ~~будет~~ уравнение (II). Т.к. множество решений уравнения $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = a^2$ графически - окружность с центром в $(x_1; y_1)$ радиусом a , то, т.к. $|x| = |-x|$, множество ~~бо~~ решений уравнения $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a^2$

графически является четырьмя окружностями с центрами в точках $(12; 5)$, $(12; -5)$, $(-12; 5)$, $(-12; -5)$ и радиусом, равным $5a$. Запишем графически:

Запишем, что решения системы - пересечение окружностей с квадратом - решением уравнения (I). Также запишем, что график симметричен относительно оси y - т.е. если есть решение (x_1, y_1) , то также будет и решение $(-x_1, y_1)$. Из этого следует:



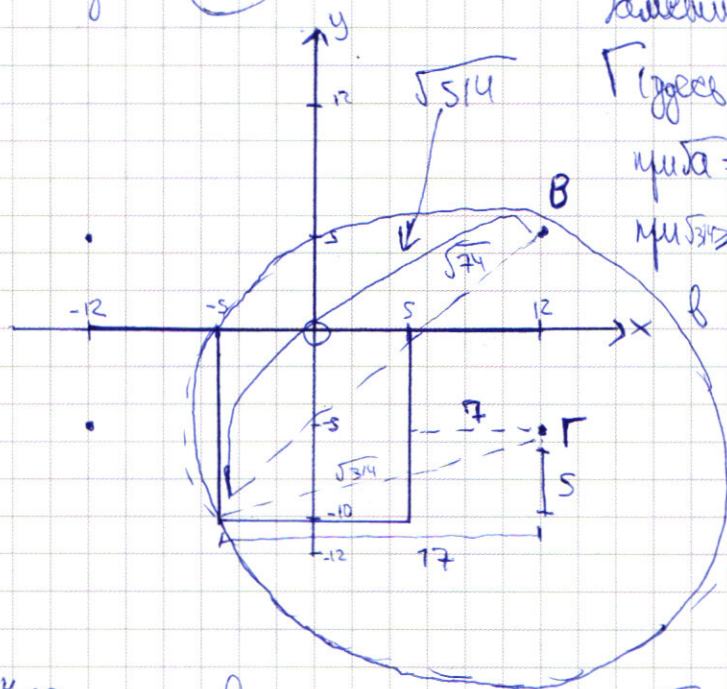
следует, что ~~то~~ т.к. у системы ровно два решения, то:

~~при $x > 0$ существует ~~одно~~ решение~~ $\textcircled{5}$ окружности с центрами в B и Γ совместно пересекают квадрат решений $\textcircled{1}$ в одной точке $\textcircled{a}$
 одному решению соответствует при $x = 0$. $\textcircled{5}$

Рассмотрим случай $\textcircled{5}$. Тогда из уравнения $\textcircled{1}$ следует, что возможные решения в таком случае: $(0; 0)$ или $(0; -10)$. Подставим в уравнение $\textcircled{4}$:

$$\begin{cases} 12^2 + 5^2 = a & -x=0, y=0 \\ 12^2 + 5^2 = a & -x=0, y=-10 \end{cases} \Rightarrow a = 169. \Rightarrow \sqrt{a} = 13. \text{ Но заменим, получим}$$

прив на график, что в таком случае появятся новые решения, отличные от $(0; 0)$ и $(0; -10)$. Значит, этот случай не подходит. Рассмотрим случай $\textcircled{a}$.



Заметим, что при $\sqrt{a} \neq 7$ окружность с центром Γ (далее и далее - окр. Γ) не пересекается с квадратом; при $\sqrt{a} = 7$ окр. Γ пересекается с квадратом в одной точке; при $\sqrt{a} > 7$ окр. Γ пересекается с квадратом в двух точках в силу симметрии; при $\sqrt{a} > 314$ окр. Γ не пересекается с квадратом.

При $\sqrt{a} < \sqrt{74}$ окружность с центром в B (далее и далее - окр. B) не пересекается с квадратом; при $\sqrt{a} = \sqrt{74}$ окр. B пересекается с квадратом в одной точке; при $\sqrt{74} < \sqrt{a} < \sqrt{514}$ в силу симметрии окр. B пересекается с квадратом в двух точках; при $\sqrt{514} = \sqrt{a}$ окр. B пересекается с квадратом в одной точке; при $\sqrt{514} < \sqrt{a} < \sqrt{314}$ окр. B не пересекается с квадратом. Составим таблицу в клетках таблицы - кол-во пересечений с квадратом.

Значит, совокупное пересечение единственно при $a = 49$ и $a = 514$

	окр. B	окр. Γ
$49 > a$	0	0
$49 = a$	0	1
$74 > a > 49$	0	2
$74 = a$	1	2
$314 > a > 74$	2	2
$514 > a > 314$	2	0
$a = 514$	1	0
$a > 514$	0	0

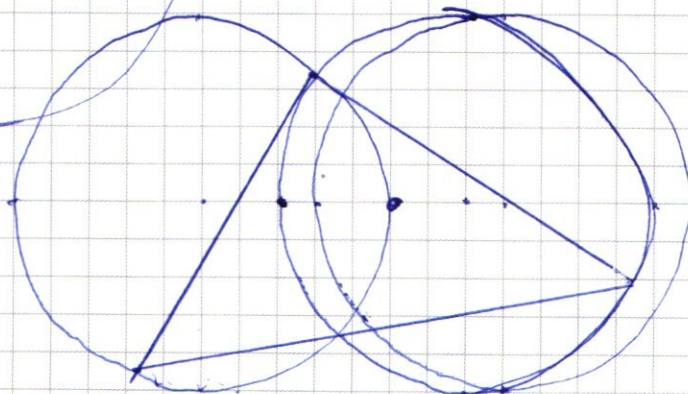
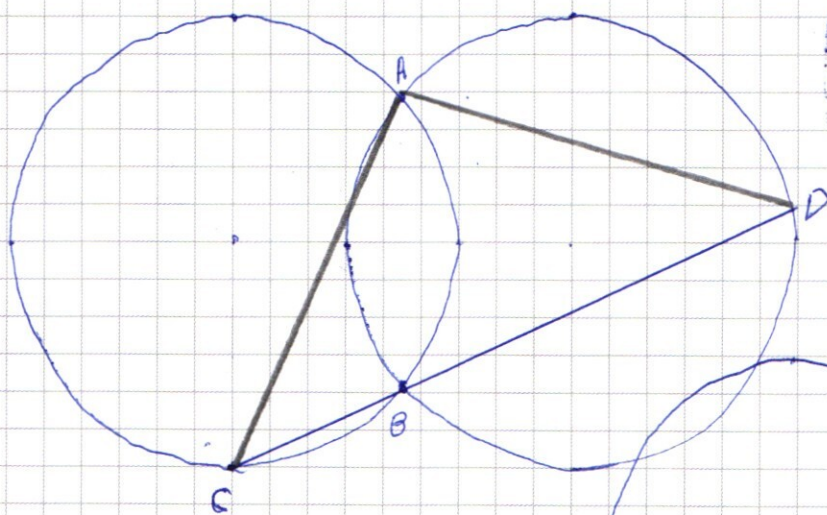
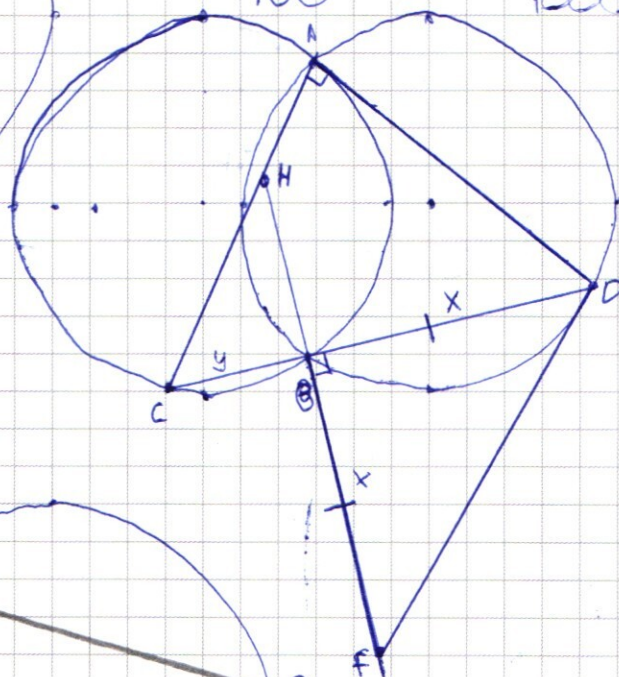
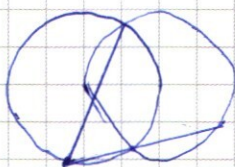
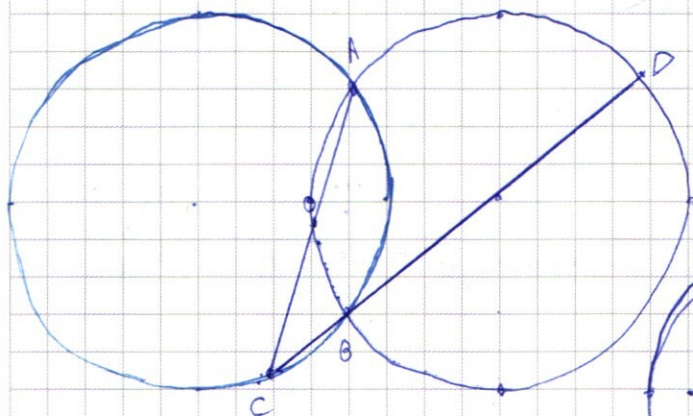
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a^{\log_b a} = b^{\log_b a \cdot \log_b a}$$

$$a^{\log_b a} = b$$

$$10^{\log_{10} 10} = 10$$

$$100^{\log_{10} 100} = 10000$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos 9x &= \cos(5x+4x) = \underline{\cos 5x \cos 4x} - \sin 5x \sin 4x \\ \sin 9x &= \sin(5x+4x) = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \underline{\cos 5x} \\ \cos 5x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x) &= \sqrt{2} \cos 4x = \left(6^{\log_6 a}\right)^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x - 1 = \cos^4 x (\cos^4 x - 1) - \sin^4 x (\sin^4 x - 1) \quad a = 249 \quad b = 9$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(4+x)(y-2x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(y+x-4)(y-2x)=0$$

$$y^2 + xy - 4y - 2xy - 2x^2 + \cancel{8x} = 0$$

$$x+y > 0$$

$$1-x > 0$$

A hand-drawn coordinate system on a grid. The x-axis and y-axis are drawn. Several points are plotted and labeled:

- $x-y$ at $(-1, 1)$
- -5 at $(0, 5)$
- $x+y$ at $(1, 1)$
- -5 at $(0, -5)$
- $x-y$ at $(1, -1)$
- $x+y$ at $(1, 1)$
- $x-y$ at $(-1, -1)$
- $x+y$ at $(1, -1)$
- -5 at $(0, -5)$

$$\log_8 8 = 2$$

$$\text{I. } x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$10 \geq |x+y+5+y-x+5| = |2y+10|$$

II. $x+y+5 - y+x-5=10 \quad 2x=10$

$$x=5 \quad |y+10| + |y| = 10 \quad y = -5, -10$$

III. $-x - y - 5 + y - x + 5 = 0$

$$-2x = 10 \quad x = -5$$

$$|y| + |y+10| = 10 \quad y = -5, -10$$

IV. $-x - y - 5 - y + x - 5 = 0$

$$-2y = 20 \quad y = -10 \quad \text{— не н.д.}$$

$$a^{\log_a a}$$

$$a^x = ?$$

$$x = \log_b a$$

$$b^x = a$$

$$a^x = a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x =$$

$\log_p p^x = x$
 $p^{\log_p p^x} = p^x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261 | 9
- 9

026
- 18

81

1029 | 3
- 9

12
- 12

09

343 | 7
- 28

63

1649
- 149

159

3 · 3 · 3 · 7 · 7 · 7 = 9261

Восьмизначное число состоит из:

3 "3"
3 "7"
2 "1"

8 · 7 · 6
3 · 2 · 1

расставим "3"

5 · 4 · 3
3 · 2 · 1

расставим "7"

2 · 1
2 · 1

на оставшихся местах - 1

8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 8 · 7 · 70 · 360

cos 9x + sin 9x + sin 5x - cos 5x - √2 cos 4x = 0

sin α + sin β = 2 · sin $\frac{\alpha + \beta}{2}$ · cos $\frac{\alpha - \beta}{2}$

cos α - cos β = -2 sin $\frac{\alpha + \beta}{2}$ · sin $\frac{\alpha - \beta}{2}$

2 sin $\frac{9x + 5x}{2}$ · cos $\frac{9x - 5x}{2}$

-2 sin $\frac{9x + 5x}{2}$ · sin $\frac{9x - 5x}{2}$ - √2 cos 4x

2 sin 7x cos 2x - 2 sin 7x sin 2x - √2 cos 4x = 0

sin 7x (cos 2x - sin 2x) - √2 cos 4x = 0

sin 7x (sin 5x - sin 9x) - √2 cos 4x = 0

sin 7x sin 5x - sin 7x sin 9x - √2 cos 4x = 0

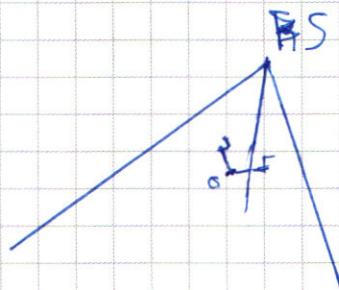
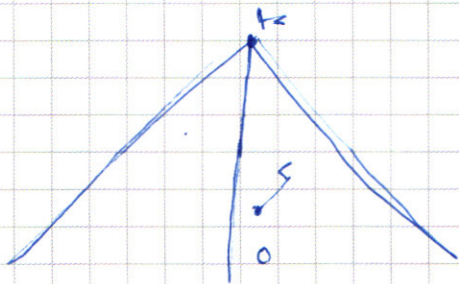
sin 7x cos 2x + cos 5x sin 2x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 2x + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sin 2x

cos 2x (sin 5x - sin 9x) + sin 2x (sin 5x + sin 9x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 2x + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sin 2x

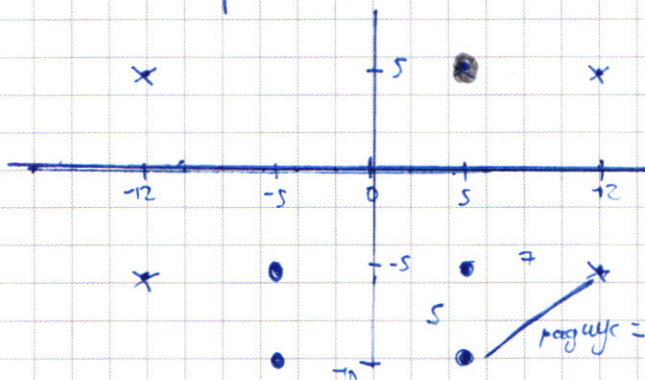
2 sin 7x cos 2x - 2 sin 7x sin 2x - √2 cos 4x = 0

$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} = y^{\ln y - \ln x^2} = y^{\ln y - 2 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$

$\frac{(y^7)^{\ln x}}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y} \left(\frac{y^7}{x^2} \right)^{\ln x} = y^{\ln y} \left(\frac{y^7}{x^2} \right)^{\ln x}$



x - диаметр окружн.



Синий круг и 1 точка-решения.

при $a > 5$ касание каждой окр. с прямой будет в двух точках

$a = 5$: решений 2:

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 34$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2 \cdot 34 + 2(2^{32} - 1)x > y \geq 2^x + 3 \cdot 34$$

$$2 \cdot 34 + 2 \cdot 2^{32} x > 2^x + 2 + 2$$

$$2 \cdot 34 + 2^{33} x > 2^x + 2$$

$$2 \cdot 34 + 2^{33} x > 2^x + 2$$

$$2 \cdot 34 + 2^{33} (x - 2) > 2^x - 2^{33} (2 + \frac{x}{2}) > 2^x$$

$$2 \cdot 34 + 2^{33} (\frac{x}{2} - 6) > 2^x$$

$$2 \cdot 34 + 2^{34} (x - 12) > 2^x$$

$$2^6 + k(x - 6) > 2^x$$

$k > 2^{32} \Rightarrow$ при $x \leq 6$ все плохо
 $x = 6$ не может
 $x = 2$ выр.

при $x \leq 12$ все плохо.

при $x = 13$ все норм

при $x = 28$ все еще норм.

при $x = 41$ опять плохо, при большем - еще хуже.

$$76 + (2^{33} - 2)x > y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34}$$

$$76 = kx > 2^x = 6k + 12$$

$$2^6 = 64 + k(x - 6) > 2^x$$

Точка равенства = 6. Считаем производные