МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\overline{abcdefgh}$; $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 9261$

$9261 = 21^3 = 3^3\cdot 7^3$

Допустимы 2 варианта:

1) 333 777 11 (цифры будут меняться местами)

Перестановки можно найти с помощью умножения сочетаний C_8^3 („3"), C_5^3 („7"), C_2^2 („1")

$$C_8^3\cdot C_5^3\cdot C_2^2 = \frac{8!}{3!\,5!}\cdot\frac{5!}{3!\,2!}\cdot 1 = 560$$

2) 93777111 (так как $3^2 = 9$

C_8^3 („1"), C_5^3 („7"), C_2^1 („3"), C_1^1 („9")

$$C_8^3\cdot C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_1^1 = 560\cdot 2 = 1120$$

Всего восьмизначных: $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

2. $\cos 9x \overset{(1)}{-} \cos 5x + \sin 9x \overset{(2)}{+} \sin 5x = \sqrt{2}\cos 4x$

1) $\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x\cdot \sin 2x$

2) $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x\cdot\cos 2x$

$$2\sin 7x\,(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\,(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin 7x = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x + \sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n,\ n\in Z \\ 7x = \pi - \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5},\ n\in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9},\ n\in Z \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in Z \end{array}\right.$

3. $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} = y^{\ln y - 7\ln x} \quad (2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (1) \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0; ~~x \neq 1~~; \\ y > 0 \end{cases}$

1) $y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 - 4(2x^2 - 8x) = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y_1 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$

$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2} = -x+4$

2) $\frac{y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}}{y^{7\ln x}} = 1$

$y^{\ln y - 3\ln x} \cdot x^{2\ln x} = 1$

$x^{2\ln x} = \cancel{y^{\ln}} \frac{y^{\ln x^3}}{y^{\ln y}} = \left(\frac{x^3}{y}\right)^{\ln y}$

Пусть $y = 2x$, тогда:

$x^{2\ln x} = \left(\frac{x^3}{2x}\right)^{\ln 2x} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\ln 2x} = \frac{x^{2\ln 2x}}{2^{\ln 2x}}$

$\cancel{x^{2(\ln 2 + \ln x}}$ $x^{2(\ln 2 + \ln x) - 2\ln x} = 2^{\ln 2x}$

$x^{2\ln 2} = 2^{\ln 2x}$

$2^{2\ln x} = 2^{\ln 2x}$

$\ln 2x - 2\ln x = 0$

$\ln 2 = \ln x$

$x = 2;\ y = 4$

Если $y = -x + 4$, то: $x = 2;\ y = 2$

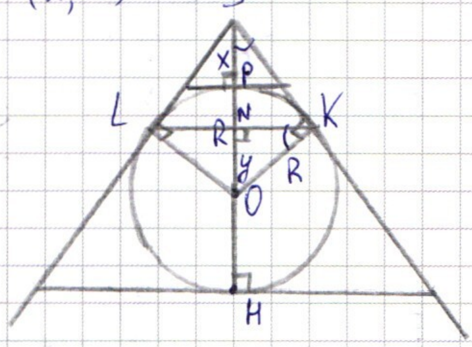
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При проверке выходит, что оба ответа удовлетворяют условию:

$2^{-6\ln 2} = 2^{-6\ln 2}$; $2^{-10\ln 2} = 2^{-10\ln 2}$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$

№4.



$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \frac{1}{16}$

~~sin~~ $\angle KSO$ — ?

S_{ABC} — ?

$S_{A_1B_1C_1} = 1$

$S_{A_2B_2C_2} = 16$

Пусть $SP = x$, ~~раду~~ радиус окр. $= R$

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4} = \frac{SP}{SH} = \frac{x}{x+2R}$

$4x = x + 2R$; $x = \frac{2R}{3}$

$\sin\angle KSO = OK : SO = \frac{R}{x+R} = \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5}$; $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$

Пусть KN — высота, провед. к $SO \Rightarrow \angle KSO = \angle NKO$

$\frac{ON}{OK} = \sin\angle NKO = \frac{3}{5}$; Пусть $ON = y \Rightarrow \frac{y}{R} = \frac{3}{5}$; $y = \frac{3}{5}R$

$SN = x + R - y = \frac{2R}{3} + R - \frac{3}{5}R = \frac{16}{15}R$

$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SP}{SN}\right)^2 = \left(\frac{2R\cdot 15}{3\cdot 16R}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$ ($\triangle ABC$ — сечение трёхгранного $\angle$ плоскостью KLM)

$S_{ABC} = \frac{64}{25} = 2{,}56$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$; $S_{ABC} = \frac{64}{25} = 2{,}56$

5. $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

Замена: $t = y+5$

$|x+t| + |t-x| = 10$

1) $x \leq -t$

$-x-t+t-x = 10$

$x = -5$

$y \leq 0$

2) $-t < x \leq t$

$x+t+t-x = 10$

$t = 5$

$y = 0$

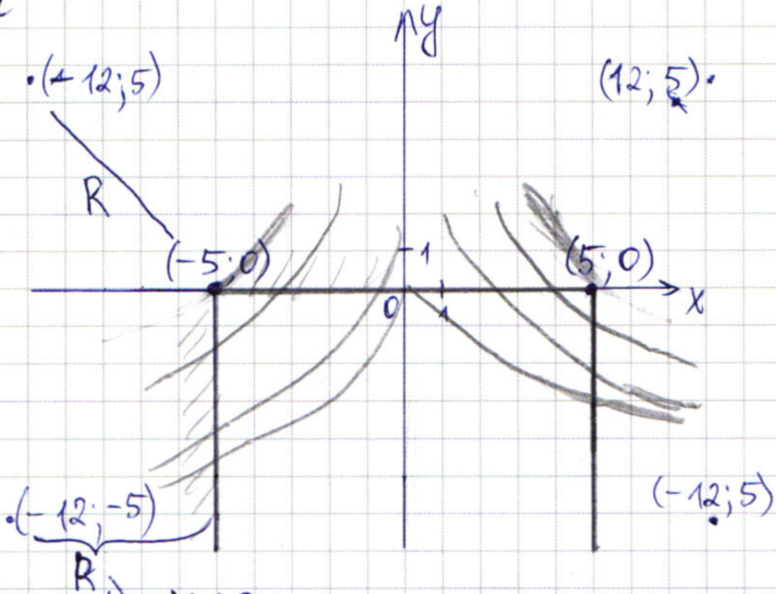
$-5 < x \leq 5$

3) $x > t$

$x+t+x-t = 10$

$x = 5$

$y < 0$



1) $x \leq 0,\ y \leq 0$

$x_0 = -12$

$y_0 = -5$ ~~$a_1 = 314,\ a_2 = 144$~~

~~$a_1 = (-12-5)^2 + (-5)^2 = 314$~~

~~$a_2 = (-12+5) + (-5)^2 = 74$~~

~~$a \in [144; 314)$~~, ~~$a \in [74; 314)$ нет такого a~~

2) $x \leq 0,\ y \geq 0$

$x_0 = -12$

$y_0 = 5$

нет такого a

3) $x \geq 0,\ y \leq 0$

$x_0 = 12$

$y_0 = -5$

4) $x \geq 0,\ y \geq 0$

$x_0 = 12$

$y_0 = 5$

а) $(-12+5)^2 + 5^2 = 74$

~~144~~ $49 = (-12+5)^2 < 74$

$(-12)^2 + 25 = 169$

$a \in [74; 169]$

б) $a \in [-169; -74]$

Ответ: $a \in [-169; -74] \cup [74; 169]$

$\frac{yx}{R} =$ $\frac{\cancel{2}R\cancel{\cdot 15}5}{\cancel{3}\cdot\cancel{16}R_8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$ $\cancel{1,3}$ $1,6$

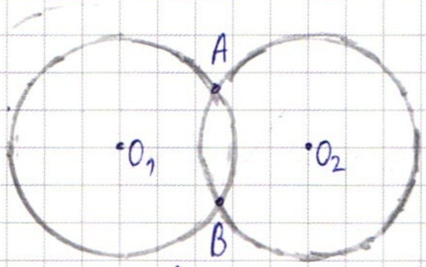
$\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ $1,5$

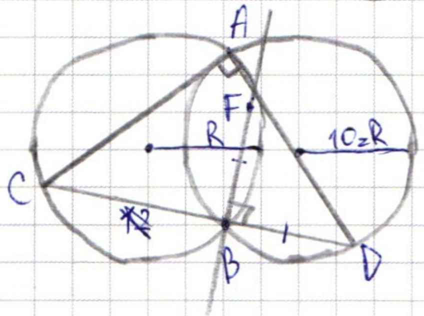
$$\begin{array}{r|l} 64 & 25 \\ \hline -50 & 2,56 \\ 140 & \\ -125 & \\ 150 & \end{array}$$

$2,56$

C D

5.





5. $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

1. $\cancel{x<0, y>0}$ $\cancel{x = -(5+y)}$

$x \le -5-y$ $x = 5+y$

Зам: $(5+y) = t$

$|x+t| + |t-x| = 10$

$x = \pm t$

$-t$ 0 t

1. $x \le -t$

$-x - \cancel{t} + \cancel{t} - x = 10$ $-2x = 10$

$x = -5$ $\cancel{y=0}$

$5+y < 5$

$y \le 0$

$\cancel{-5-y \ge -5}$

$y \le 0$

$y \le 0$
$x = -5$

$\cancel{-5} < \cancel{-5}-y$

2. $\cancel{x > t}$ $-t < x < t$

$\cancel{x}+t+t-\cancel{x} = 10$

$t = 5$

$\cancel{-5}$ $y = 0$

$-5 < x \le 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $x > t$

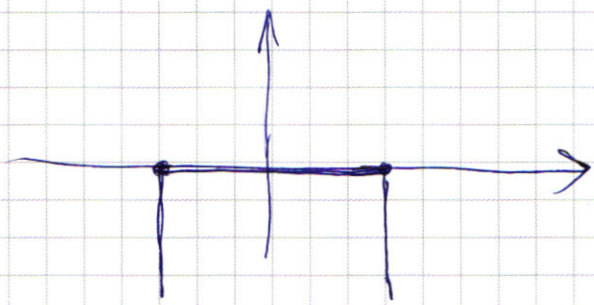
$x+t+x-t=10$

$x=5$

$x> 5+y$

$5>5+y$

$y<0$



$x \leqslant -5-y$

$y \geqslant 2^x+3\cdot 2^{34}$

$y<76\cdot 2^{33}x-2^x$

$(+x+12)^2+(+y+5)^2=a$

$x_1=-12$

$y_1=-5$

17^2+25

$x<0,\ y<0$

$x<0,\ y=0$

$x_2=-12$

$y_2=5$

$$\begin{array}{r} 289 \\ +\ \ 25 \\ \hline 314 \end{array}$$

-7^2

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 25 \\ \hline 74 \end{array}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\overline{abcdefgh}$

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261$

$9261 : 9 = 1029$, $1029 : 3 = 343$

18 : 3 : 9

12 : 3

$49 \cdot 7 = 343$

$343 = 7^3$

$343 \cdot 27 = 9261$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \cancel{240}\ 560$

2) $9 \cdot \cancel{1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = 1120$

$123 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{2!}{1!} \cdot 1$

$3 \cdot 1$

$112 = 2 \cdot 1$

$2 \cdot 1 = 2$

121

211

$1 \quad C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

$C_1^1 = \frac{1!}{1!0!}$

1112

1121

1211

2111

$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

$\frac{2!}{2!0!}$

$C_2^1 = \frac{2!}{1!1!}$

$\frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2}$

$80 \cdot 7$

$16 \cdot 5 \cdot 7 = \cancel{240}\ 560$

$16 \cdot 35 = 560$

$560 \cdot 2 = 1120$

$\frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 = 1120$

$1120 + 560 = 1680$

$560 \cdot 3 = 1680$

$\cancel{\cos 9x + \sin 9x}$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x$

$2\sin 7x\cos 2x - 2\sin 7x \sin 2x = \sqrt{2}\cos 4x$ $\qquad (\cos 2x + \sin 2x)$

$2\sin 7x\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)} = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \sqrt{2}\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}$

$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$\left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{4} + \cancel{2x} + 2\pi n \\ 9x = \pi - \frac{\pi}{4} - \cancel{2x} + 2\pi n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \end{array}\right.$

$\frac{3\pi}{4 \cdot 9} = \frac{\pi}{12}$

$e^{z^2} = \sqrt{y}$ $\quad y^2$

3. $(x^2 y^4)^{\frac{1}{\ln x}} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$\frac{y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}}{y^{7\ln x}} = 1$ $\qquad y^{\ln x^3}$

$y^{\ln y - 3\ln x} \cdot x^{2\ln x} = 1$ $\qquad x^{3\ln y}$

$x^{2\ln x} = \frac{y^{\ln x^3}}{y^{\ln y}} = \frac{x^{3\ln y}}{y^{\ln y}} = \left(\frac{x^3}{y}\right)^{\ln y}$

$144 + 25 = 169$

$x^{2\ln x} = \left(\frac{x^3}{y}\right)^{\ln y}$

$3^2 - 8 = 24$

$(3x-4)^2$

$y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 + 4(2x^2 - 8x) = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y_1 = \frac{x + 4 + 3x - 4}{2} = 2x$

$y_2 = \frac{x + 4 - 3x + 4}{2} = \frac{-2x + 8}{2} = 4 - x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x^{2\ln x} = \left(\frac{x^3}{2x}\right)^{\ln 2x} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\ln 2x}$

$\frac{3^3}{3^2} =$

$2^{-6\ln 2} = 2^{-6\ln 2}$

$\frac{x^{2\ln 2x - 2\ln x}}{2^{2\ln 2x}} = 1$

$2^2 \cdot 2^8$

$2^{-10\ln 2} =$

$= 2^{-10\ln\frac{2^2}{2^7}} = 2^{-5}$

$x^{\cancel{2\ln x + 2\ln x - 2\ln x}}$

$x^{2\ln 2^2 + \cancel{2\ln x} - \cancel{2\ln x}} = 2^{2\ln 2x} = 4^{\ln 2 + \ln x}$

$4^{\ln x} = 4^{\ln 2 + \ln x}$

$2^{-6\ln 2} = 2^{\ln\frac{1}{2^6}}$

$\ln x = \ln 2 + \ln x$

$\cancel{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^6}$ $\ln(2)^{-6} = -6\ln 2$

2) 1) $x^{2\ln x} = \frac{x^{2\ln 2x}}{2^{\ln 2x}}$

$x^{2\ln 2x - 2\ln x} = 2^{\ln 2x}$

$x^{2\ln 4 + \cancel{2\ln x} - \cancel{2\ln x}} = 2^{\ln 2x}$

$4 - x = e$

$x = 4 - e$

$4^{\ln x} = 2^{\ln 2x}$

$2^{2\ln x} = 2^{\ln 2x}$

$2\ln x = \ln 2x;$ $\ln 2x - 2\ln x = 0;$ $\ln 2 + \ln x - 2\ln x = 0$

$\ln 2 = \ln x$

$x = 2;\ y = 4$

2) $x^{2\ln x} = \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{\ln(4-x)};$ $x^{3\ln(4-x)^3 - 2\ln x^2} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$\cancel{x^{3\ln e - 2\ln(4-e)} = e}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{x^{\ln e^3}}$ $x^{\ln\frac{(4-x)^3}{x^2}} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$\frac{(4-x)^3}{x^2}^{\ln x} \cancel{\ln} = 4-x^{\ln(4-x)}$

$\cancel{x^{2\ln x - 3\ln y}}$ e^-

$x^{3\ln y^3 - 2\ln x^2} = y^{\ln y}$

$x^{\ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right)} = y^{\ln y}$

$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} = y^{\ln y}$

$\left(\frac{4^3}{4}\right)^{2\ln 2} = 4^{\ln 4}$

$\frac{(4-x)^3}{x^2}^{\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^{3\ln 3} = 1^{\ln 1}$

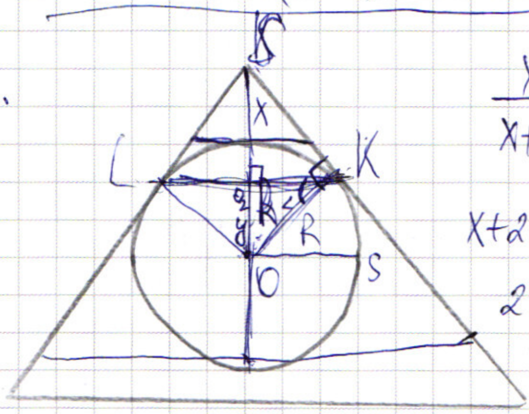
$\log_e x = \frac{1}{\log_x e}$

$x^{2\ln x} = y^{\ln x^3 - \ln y} = y^{\ln\frac{x^3}{y}}$

$x^{2\ln x} = (4-x)^{\ln \cancel{4-x} \frac{x^3}{4-x}}$

$\sin\angle KSO = \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5}$

5.4.



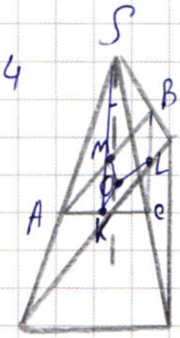
$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{\cancel{16}4}$

$x+2R = 4x$

$2R = 3x$

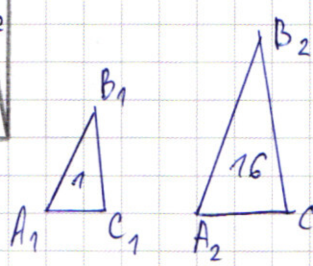
$x = \frac{2R}{3}$

$l = \frac{5R}{3}$



$\frac{10R}{15} - \frac{9R}{15} + \frac{15R}{15}$

S_{ABC}, $\cancel{SKO}$ $\angle KSO$



$S = \frac{1}{2}h\cdot a$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1h_1}{a_2h_2} = \frac{1}{16}$

$\frac{KO}{SO} = \sin$

$a\cdot b\cdot c$

$R = \frac{3x}{2}$

$\cancel{R = \frac{3x}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)