

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Разложим число 9261 на простые: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Если цифры дают в произведении такое число, то это могут быть только цифры 1, 3, 7, 9. Рассмотрим цифры (сколько 9^{ов} среди этих чисел)

1° 0 девяток

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 10 = 560$$

(сначала расставляем 3^{ов}, потом 7^{ов})
оставшиеся — единицы

2° 1 девятка

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 4 = 8 \cdot 35 \cdot 4 = 1120$$

(сначала ставим девятку, потом семерки, за ними оставшиеся тройки)
оставшиеся — единицы

3° Больше одной девятки быть не может, т.к. тогда 3 будет в четвертой степени.

Итого: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел

⑦
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) x \end{cases}$$

т.к. $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow x > 0$

Посмотрим при каких значениях x будет вообще выполняться условие $76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

Пусть $t = 2^{32}$

$$76 + 2(t-1)x > 2^x + 12t$$

$$2t(x-6) + 76 > 2^x + 2x$$

✓

$$2^{\uparrow}(x-6) + 76 > 2^x + 2x$$

Очевидно, что $x \geq 6$, иначе не выполняется

$$1^{\circ} x=6 \quad 76 > 2^6 + 12 \Leftrightarrow 76 > 64 + 12 \quad \text{не выполняется}$$

$$2^{\circ} x=7 \quad 2^{\uparrow} + 76 > 2^7 + 14 \quad \text{выполняется (начало выполняется)}$$

Теперь при увеличении x левая часть будет расти относительно медленнее, чем правая, т.к. слева линейная зависимость, а справа логарифмическая. Осталось найти последнее значение которое удовлетворяет, тогда все значения больше 7 и меньше равные ему будут удовлетворять

$$1^{\circ} x=37 \quad 76 + 2^{\uparrow} \cdot 31 > 2^{37} + 74$$

$$76 + 2^{32} \cdot 62 > 2^{32} \cdot 32 + 74 \quad \text{верно (выполняется)}$$

$$2^{\circ} x=38 \quad 76 + 2 \cdot 2^{32} \cdot 32 > 2^{38} + 76 \quad \text{перестало выполняться}$$

$$76 + 2^{38} > 2^{38} + 76$$

последнее удовлетворяющее значение, это $x=37$

Количество подходящих y для каждого x это разность возможных граничных значений

$$\sum_{x=7}^{x=37} 2^{\uparrow}(x-6) + 76 - 2^x - 2x = 12^{\uparrow} \cdot (37-6) + 76 \cdot (37-6) + \sum_{x=7}^{x=37} 2^{\uparrow}x - 2^x - 2x =$$

$$= 372^{\uparrow} + 2356 + 2^{\uparrow} \cdot \sum_{x=7}^{x=37} x - \sum_{x=7}^{x=37} 2^x - 2 \cdot \sum_{x=7}^{x=37} x = A$$

$$\text{т.к. } - \sum_{x=7}^{x=37} 2^x = - \sum_{x=0}^{x=37} 2^x + \sum_{x=0}^{x=6} 2^x = -(2^{38} - 1) + 2^7 - 1 = -2^{38} + 128$$

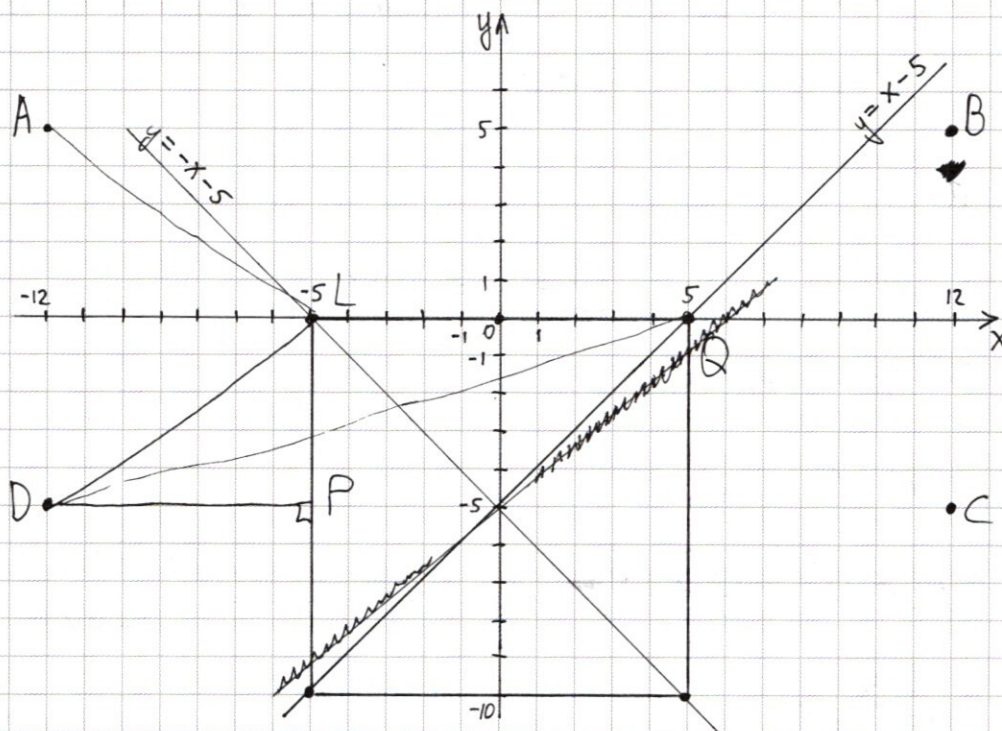
$$\sum_{x=7}^{x=37} x = \frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} = 703 - 21 = 682$$

$$A = 372^{\uparrow} + 2356 + 2 \cdot 682^{\uparrow} - 2^{38} + 128 - 2 \cdot 682 = 4 \cdot 93 \cdot 2^{32} + 2356 + 4 \cdot 341 \cdot 2^{32} - 2^{38} + 128 - 1364 = 2^{34} \cdot (93 + 341 - 16) + 1110 = 418 \cdot 2^{34} + 1110$$

Ответ: $418 \cdot 2^{34} + 1110$ пар чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$1^{\circ} \quad x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 \geq 0$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 2y+10 = 10 \Rightarrow y=0$$

$$2^{\circ} \quad x+y+5 > 0; \quad y-x+5 < 0$$

$$x+y+5 - y-x-5 = 2x = 10 \Rightarrow x=5$$

$$3^{\circ} \quad x+y+5 < 0; \quad y-x+5 \geq 0$$

$$-x-y-5 + y-x+5 = -2x = 10 \Rightarrow x=-5$$

$$4^{\circ} \quad x+y+5 < 0; \quad y-x+5 < 0$$

$$-x-y-5 - y-x-5 = -2y-10 = 10 \Rightarrow y=-10$$

П.о. мы получили квадрат,
~~который~~ который на
рисунке.

Второе уравнение
 $((x|-12)^2 + (y|-5)^2 = a$
соответствует четырем
окружностям с центрами
в точках A, B, C, D и
радиусами $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) НО!

для каждой из этих окружн.

мы берём только часть, лежащую в той же четверти
только один возм. радиус
Получаем 2 возможных радиуса этих окружностей DP
(D, P, L, Q - обозначены на рисунке)

Таким образом ответ следующий:

$$a_1 = (-5 - (-12))^2 = 49$$

$$a_2 = \cancel{(-5 - (-12))^2} =$$

Заметим, что радиусы DL и DQ не подходят, т.к. решение тогда будет не 2, а 4 (во всех углах квадрата)

Ответ: $a = 49$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (x^2 y^4)^{\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \underline{(x > 0)} \Rightarrow y > 0$$

$$a) : y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{(x+4) \pm \sqrt{x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x}}{2} = \frac{(x+4) \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ -x+4 \end{cases}$$

$$(1) : (x^2 y^4)^{\ln x} \cdot y^{\ln(\frac{y}{x^2})} = 1$$

$$\frac{x^{\ln x^2} \cdot y^{\ln x^4} \cdot y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}} = 1 \Leftrightarrow x^{\ln x^2} \cdot y^{\ln x^4} \cdot y^{\ln y} = y^{\ln x^2}$$

$$x^{\ln x^2} \cdot y^{\ln y} = y^{\ln x^2}$$

$$y^{\ln(\frac{x^2}{y})} = x^{\ln x^2} (*)$$

1° $y = 2x$ подставим в (*):

$$(2x)^{\ln(\frac{x^2}{2x})} = x^{\ln x^2} \Leftrightarrow (2x)^{\ln \frac{x^2}{2}} = x^{\ln x^2} \Leftrightarrow 2^{\ln \frac{x^2}{2}} = x^{\ln 2}$$

т.к. одна из функций показательная а другая лог., то решение только одно, несложно видеть, что это $\underline{x=2} \Rightarrow \underline{y=4}$

$$2^\circ y = -x+4$$

$$(4-x)^{\ln(\frac{x^2}{4-x})} = x^{\ln x^2}$$

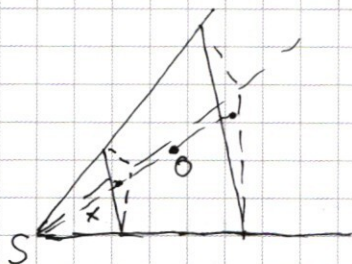
т.к. $x > 0$ то при этом $4-x > 0 \Rightarrow x \in (0; 4)$

Идентично предыдущему рассуждению равно одно решение и это $\underline{x=2} \Rightarrow \underline{y=2}$

Ответ: $\{(2; 2); (2; 4)\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

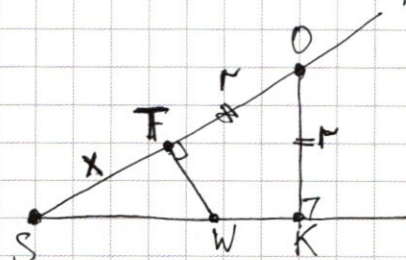
4



Заметим, что одно сечение переводится в другое гомотетией с центром в S $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ отношение площадей — это отношение линейных пропорций

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{x}{x+2r}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{x+2r} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = x+2r$$

$$x = \frac{2r}{3}$$



TW — н-м сечения

$$OK = OT = r$$

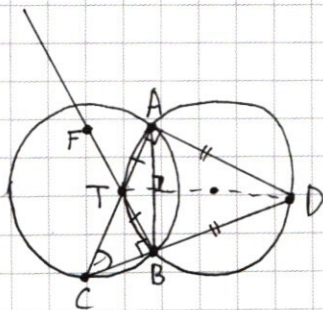
Вычисляем угол $\angle OSK$

$$\sin \angle OSK = \frac{r}{r+x} = \frac{r}{r+\frac{2r}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

~~$\cos 9x = \cos 5x = 2 \cos 4x \cos 5x + \sin 9x \sin 5x = 0$~~

6



$$FB = BD \quad TD = 2r = 20$$

$$\triangle CBT \sim \triangle CAD :$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{TB}{AD} = \frac{CT}{CD}$$

Поскольку ответ г.д. одинаковым при всех
положениях T (т.к. условие общее), то мы можем
расположить T так, чтобы $AB \perp TD$

$$\Downarrow$$

$$AD = BC, \quad AT = TB$$

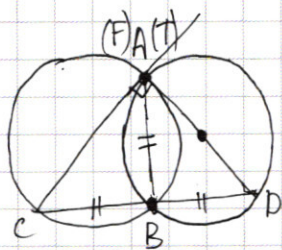
$$S = \frac{abc}{4R} \quad \Downarrow \quad \text{для опис. окружности}$$

$$AB \cdot BC \cdot AC = AD \cdot BD \cdot AB' \Rightarrow BC \cdot AC = BD^2$$

$$CF^2 = CB^2 + CB \cdot AC = CB \cdot (CB + AC)$$

✓

✓
Это верно и если T совпадает с A



В этом случае получаем, что A совпадает ещё
и с F

$$AB = CB = BD \Rightarrow CF = 2r = 20$$

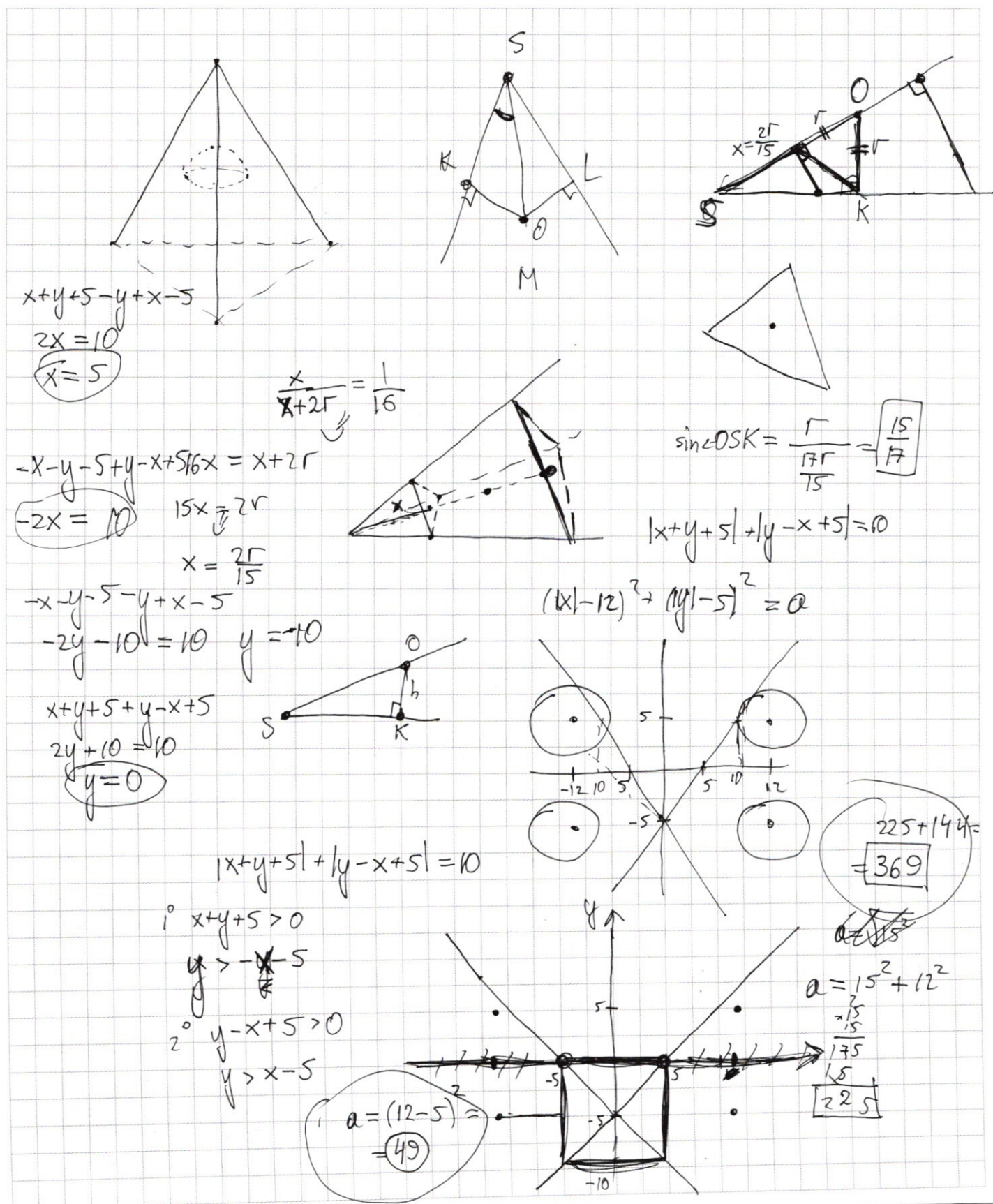
Ответ: 20

Проанализируем результат: при движении T по окружности
получаем, что $CB^2 + BD^2$ не меняется — это верно

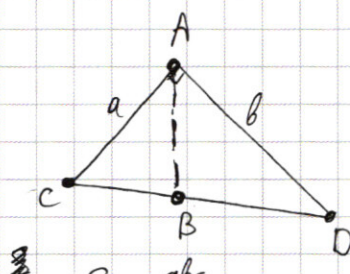
Результат не зависит от положения — верно

Ответ: 20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Geometric diagram showing two intersecting circles with centers F and D . A line segment AD is drawn, and a perpendicular line segment is dropped from A to the line segment CD , meeting it at B . The distance from A to the line CD is labeled as $\sqrt{100 - x^2}$. The distance from C to A is labeled as $\sqrt{(x+y)^2 + 100 - x^2}$. The distance from C to D is labeled as $\sqrt{y^2 + 2xy + 100}$.



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{a, b, c,}{4R}$$

$$\begin{array}{r} 2356 \\ - 1364 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 992 \\ 128 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$x = 38$

$$2 \cdot 2^{32} \cdot 32 + \cancel{76} \cdot 2 + \cancel{76} = 2^{38}$$

$$700 - 18$$

682

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 682 \\ \hline 1364 \end{array}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$
$$y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)X$$

$$1 + 2 + 2^2$$

$$38 \overline{) 2}$$

$$15 + 4 = 19$$

$$t = 2^{32}$$

$$37 - 16 = 21 \text{ omb}$$

$$2^x + 12t < 76 + 2(t-1)x$$

$$2^x + 12t < 76 + 2tx - 2x$$

$$2(x-16) - 2x - 2^x + 76 > 0$$

$$2^{\uparrow}(x-16) + 76 > 2x + 2^x$$

$$x = 16$$

$$76 > 32 + 2^{16}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 31 \\ \hline 12 \\ 36 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$682 \overline{) 12341}$$

$$2 \cdot 2^{37} \cdot 21 + 76 > 74 + 2^{37}$$

42 25 = 32

$$\begin{array}{r} 372 \overline{) 4} \\ 36 \overline{) 93} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 341 \\ 93 \\ \hline 434 \\ - 16 \\ \hline 418 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

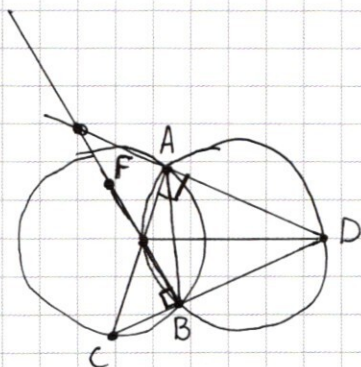
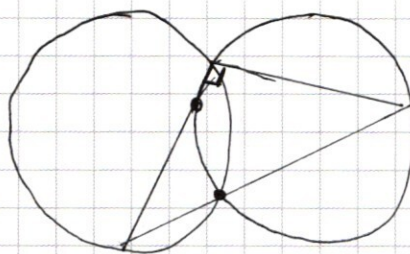
$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

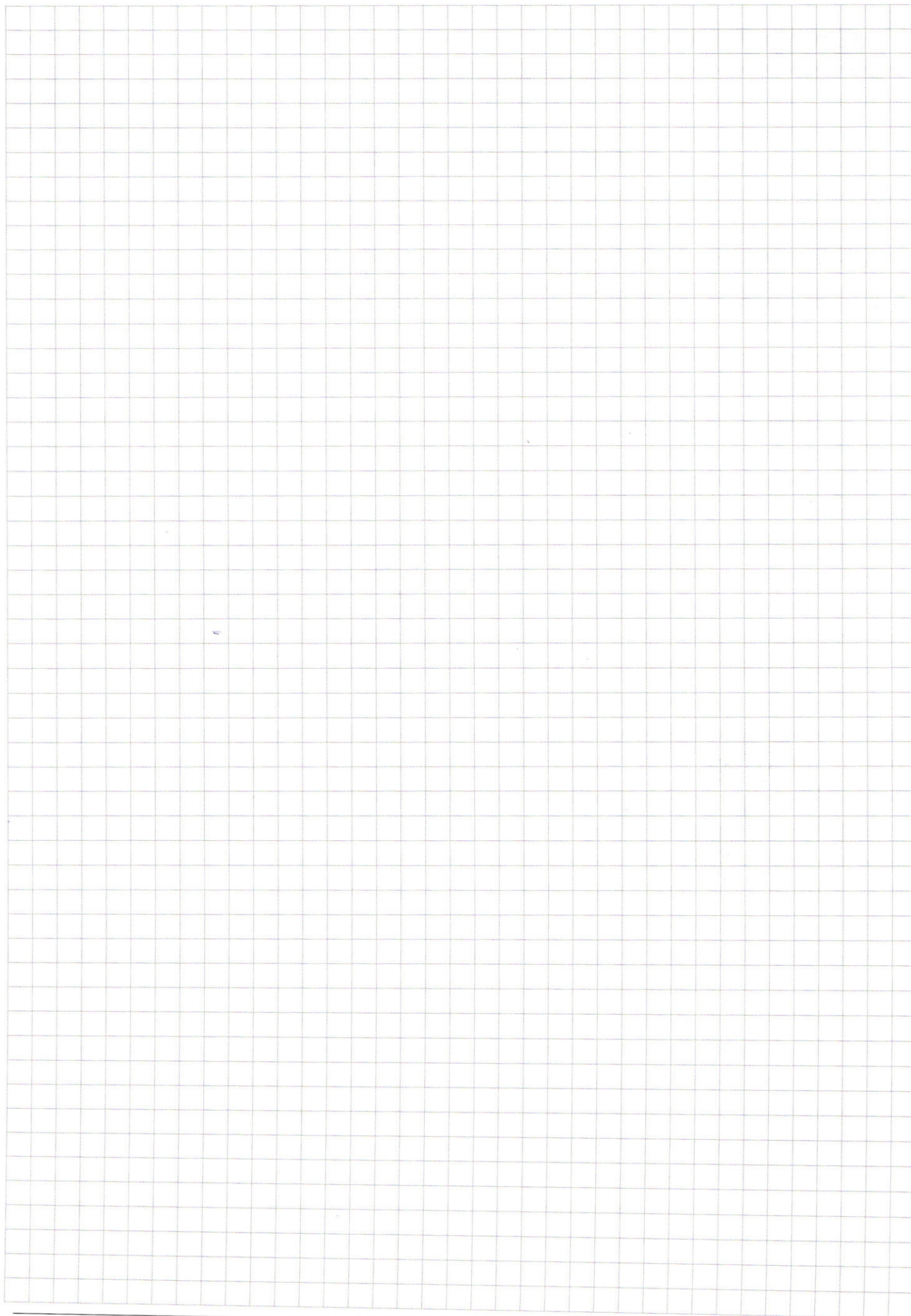
$$-2\sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot (1 - 2\sin^2 2x) + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x \cdot (\sin 2x - \cos 2x) + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 261} \\ 24 \overline{) 261} \\ 21 \overline{) 261} \\ 1 \overline{) 35} \\ 32 \overline{) 35} \\ 70 \overline{) 105} \\ 1120 \overline{) 1120} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 343} \\ 63 \overline{) 28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 3 \overline{) 137} \\ 3 \overline{) 137} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \\ 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \\ 11 \cdot \frac{35}{32} \\ 170 \cdot \frac{105}{1120} \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 56 \cdot 10 = 560$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2x^2 - 8x$$

$$2 \sin x \cdot (\sin 2x - \cos 2x) - \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\begin{cases} (x^2y) - \ln x &= y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y &= 0 \end{cases}$$

$$cy - 2e^{\ln(\frac{2e}{e^3})} \cdot e^{\ln e^2} = 1$$

$$y^2 - xy - x^2 = x^2 + 8x - 4y$$

$$1. \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2) \left(y = \frac{x+4 \pm \sqrt{3x-4}}{2} \right)$$

$$y^{\ln(\frac{y}{x^4})} \cdot (x^2 y^4)^{\ln x} = 1$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x(x-4) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{(x+4) \pm \sqrt{x^2 + 8x + 16}}{2x^2 - 32x}$$

$$\frac{x+4 \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{(3x-4)^2}$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{3x-4}}{2}$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{2} \\ y = \frac{-2x+8}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4) \ln x} = y \ln \left(\frac{x^2}{y^4} \right) \Rightarrow y \ln y \cdot x \cdot y \ln x \cdot \ln \left(\frac{x^2}{y^4} \right) + \dots$$

$$76 + 2(2^{37}-1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2x - 2x - 2 - 3 \cdot 2^{34}$$

$$(38 - 2^5 - 12)$$

$$\frac{x \ln x^2}{x \ln \left(\frac{x^2}{2} \right)} = 2$$

$$x^{\ln 2} = 2 \Rightarrow x = e \Rightarrow y = 2e$$

$$\frac{y \ln y \cdot x \ln x^2 \ln x^4}{y \ln x^7} = 1$$

$$y \ln y \cdot x \ln x^2 \ln x^4 = y \ln x^7$$

$$y \ln y \cdot x \ln x^2 = y \ln x^3$$

$$y \ln \left(\frac{x^3}{y} \right) = x \ln x^2$$

$$(2x) \ln \left(\frac{x^3}{2x} \right) = x \ln x^2$$

$$(2x) \ln \left(\frac{x^2}{2} \right) = x \ln x^2$$

$$x \ln \left(\frac{x^3}{4x} \right) = x \ln x^2$$

$$2 \ln \left(\frac{8}{2} \right) = 2$$

$$2e \ln \left(\frac{e^3}{2e} \right) = e \ln e^2$$

$$(e^2 \cdot 16e^4) \cdot (2e)$$

$$16e^6 \cdot 2 \cdot \ln \frac{2}{e^6} \cdot \ln \frac{2}{e^6}$$

$$\frac{32}{e^6}$$

$$\ln \frac{2}{e^6} = 5$$

$$2 \cdot \frac{2e}{e^7} \cdot e$$

$$\ln \frac{2e}{e^7} \cdot \ln \frac{2}{e^6}$$

$$\ln 2 - 6$$

$$\ln \left(\frac{x^3}{-x+4} \right)$$

$$x=2, y=4$$

$$2 \ln x^2 = (2x) \ln 2$$

$$4 \ln x = (2x) \ln 2$$

$$\ln x^2 = 2 \ln 2 \cdot x \ln 2$$

$$\frac{\ln \left(\frac{x^3}{2} \right)}{2} = x$$

$$\frac{2 \ln x^2}{2 \ln 2} = x \ln 2$$