

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}) \wedge y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x)\}| =$$

$$= |\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2(2^{32} - 1)x \leq y \leq 0\}| = P$$

Обозначим $f(x) = 2(2^{32} - 1)x + 76 - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$
тогда (обозначим исковое количество пар = P)

тогда $P = \sum_{\{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \geq 0\}} [f(x)]$. Однако, $f(x)$ — строго
выпукла вверх, следовательно, (-2^x) — строго выпукла
вверх, $2(2^{32} - 1)x$ — выпукла вверх $76 - 3 \cdot 2^{34}$ — константа
(тоже выпукла вверх). Кроме того,

$$f(0) = 0 = f(38) \text{ поэтому } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 38]$$

$$\text{Обозначим } x - 0 = n. \text{ Тогда } x \in [0, 38] \Leftrightarrow n \in [0, 32]$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$$

поэтому

$$P = \sum_{\{n \in \mathbb{Z} \mid n \in [0, 32]\}} [f(n+0)] = \sum_{n \in \mathbb{Z} \mid n \in [0, 32]} (2(n(2^{32} - 1) - 3 \cdot 2^{34})) =$$

$$f(n+0) = 2(2^{32} - 1)(n+0) + 76 - 2^{n+0} - 3 \cdot 2^{34} =$$

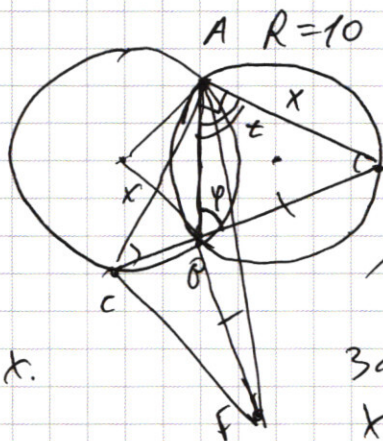
$$= 2(n(2^{32} - 1) - 3 \cdot 2^{34})$$

$$= 2((2^{32} - 1) \cdot 16 \cdot 33 - 3 \cdot 2(2^{33} - 1)) = 2(33 \cdot 2^{36} - 3 \cdot 2^{34})$$

$$= 2((2^{32} + 1) \cdot 16 \cdot 33 - 3 \cdot 2(2^{33} - 1)) = 33 \cdot 2^{36} + 1120$$

$$= 2(2^{36} \cdot 29 + 560) = 2^{37} \cdot 29 + 1120$$

ЗАДАЧА 5



равны. Окружности равны
 $\Rightarrow$ равны углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$
 как опирающиеся на равные
 хорды в равных окружностях.

- 9x.

Значит $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$. Обозначим
 $x = AD$, $\varphi = \angle APD$, $\epsilon = \angle PAD$.

$$\text{По теореме синусов: } CF^2 = CP^2 + PD^2 = (CB + PD)^2 - 2(CB \cdot PD) =$$

$$= (\sqrt{2}x)^2 - 2(2R \sin \epsilon)(2R \sin \frac{\pi}{2} - \epsilon) = 2x^2 - 2(4R^2 \sin \epsilon \cos \epsilon)$$

$$= 2x^2 - 4R^2 \sin 2\epsilon. \text{ Но! } \sin 2\epsilon = \sin(2(\pi - \frac{\pi}{4} - \varphi)) =$$

$$= \sin(\frac{3\pi}{2} - 2\varphi) = -\cos 2\varphi = 2\sin^2 \varphi - 1. \text{ Кроме того}$$

$$2R \sin \varphi = x. \text{ Тогда } CF^2 = 2x^2 - 4R^2 \sin 2\epsilon =$$

$$= 2x^2 - 2x^2 + 4R^2 = 4R^2 \Rightarrow \boxed{CF = 2R = 20}$$

ОТВЕТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

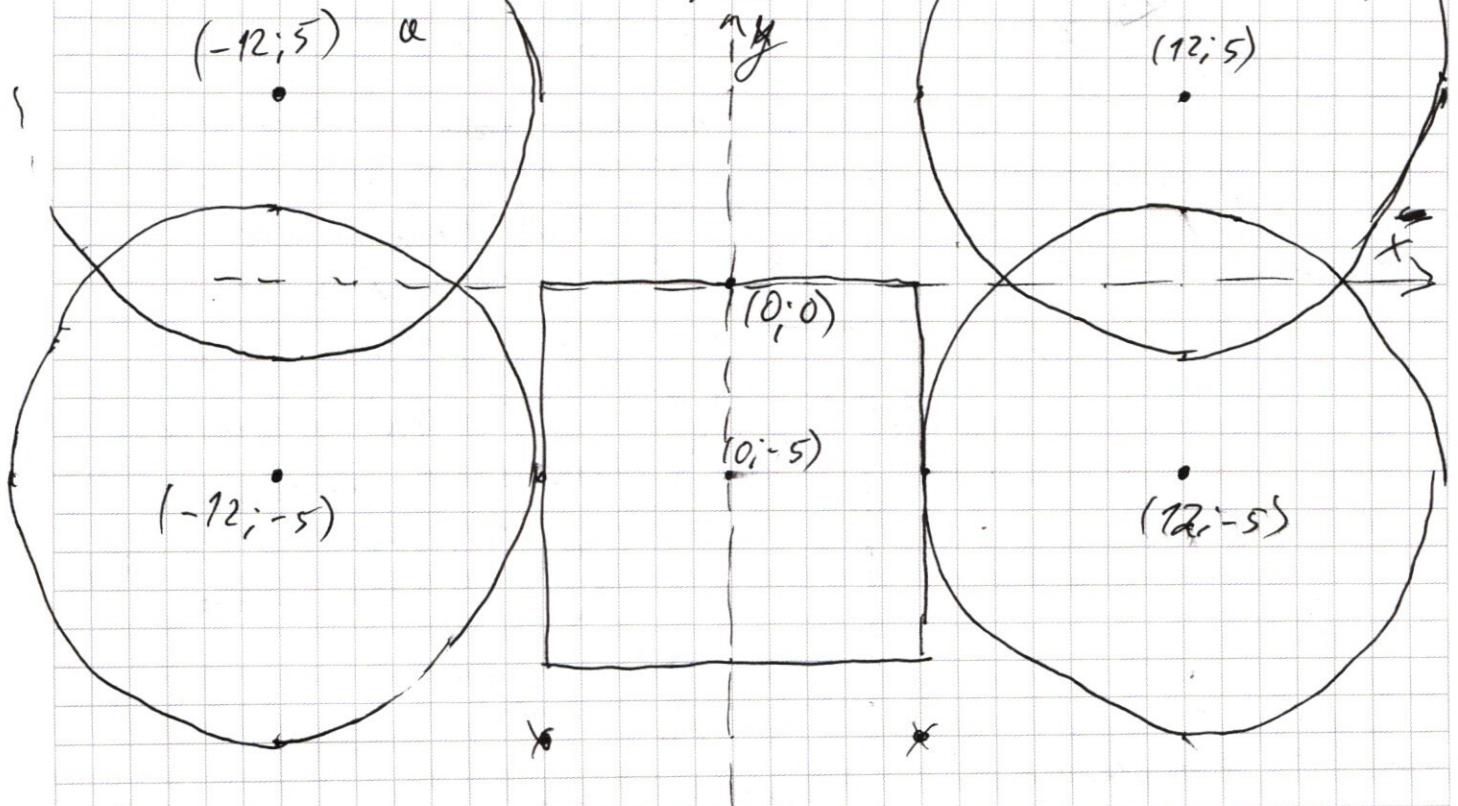
Зр. графическом

ЗАДАЧА 5

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$ будет являться квадрат
с центром в точке $(0; -5)$, сторонами
длиной 10, параллельные осям координат.

А графиком $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ будет являться

симметричный относительно осей координат,

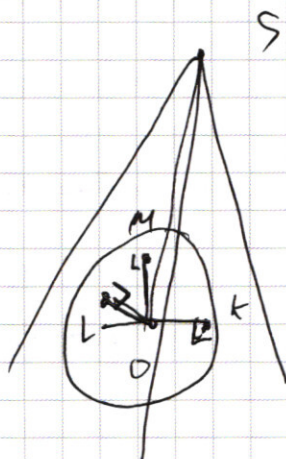


a в I координатной четверти будет находиться
показательство окружности с центром в $(12; 5)$
и радиусом $\sqrt{a}$. (Если $a < 0$, то окружности нет)
Задача 5. Если в показателе a входит точка
окружности, если, и только если она четная...

... по похитительству кувшины. Только
 Ясно что радиус равен 2 корня
 "окружности" касающейся квадрата. $\Rightarrow$
 происходит при $a = 49$. (радиус = 7)

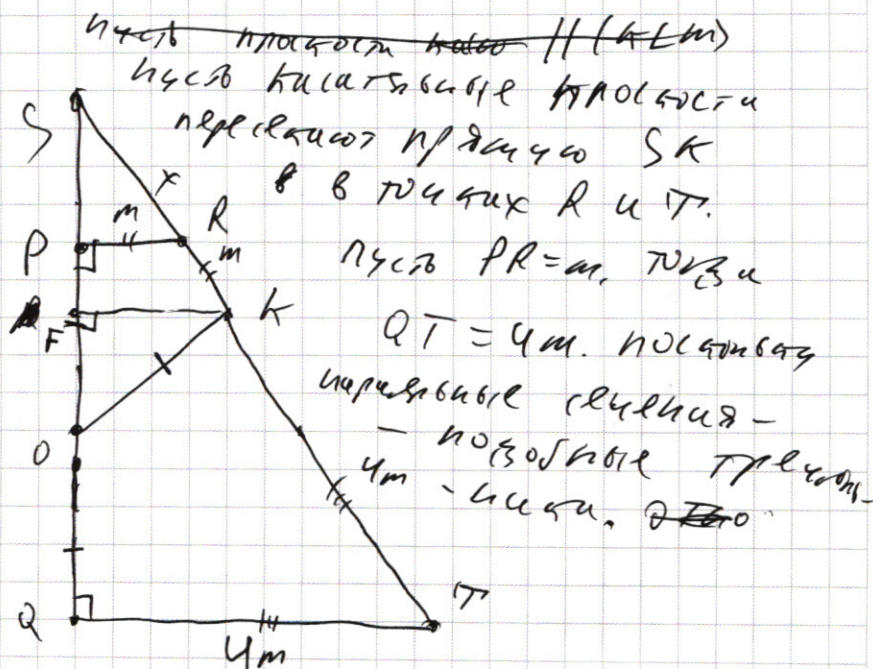
Ответ: ~~$a = 7$~~ . $a = 49$

ЗАДАЧА 4



Рассмотрим точку
 Пусть точка касания плоскости
 цилиндра (KLM) со сферой
 $\Rightarrow$ P и Q. рассмотрим
 плоскость (SKO)

Точки P и Q
 будут лежать
 на прямой SO



и их площади относятся как корни из
 отстояний площадей. Пусть $SR = x$ тогда

$$\triangle SPR \sim \triangle QRT \Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{x+5m}{4m} \Rightarrow x = \frac{5}{3}m$$

Пусть (KLM) пересечет ~~SO~~ SO в точке F
 тогда $FK = \frac{x+m}{x}$, $m = \frac{8}{5}m$. Значит отстояние
 площадей сечений (KLM) и сечения содержащего точку

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

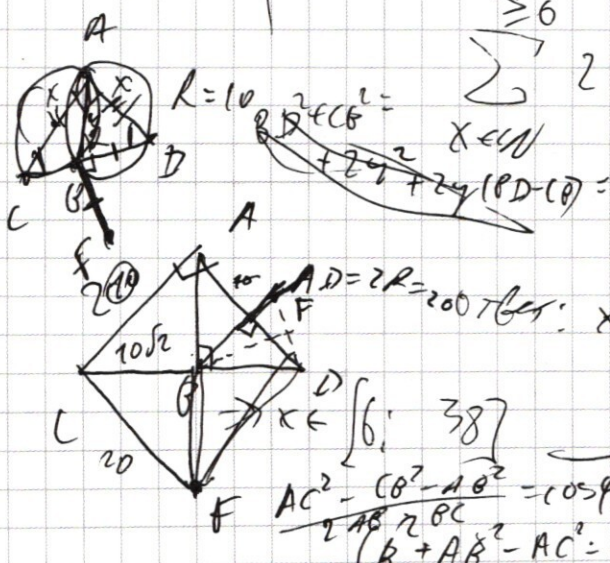
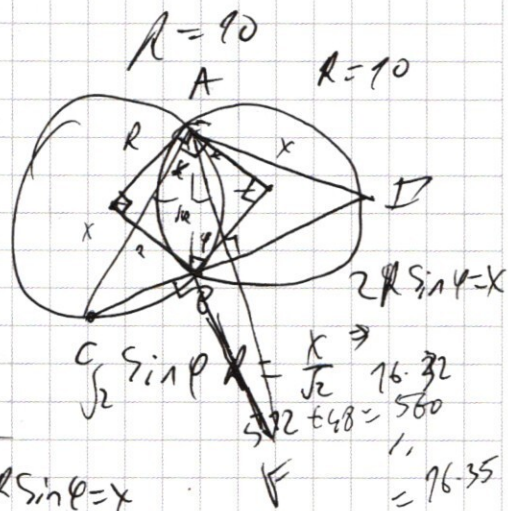
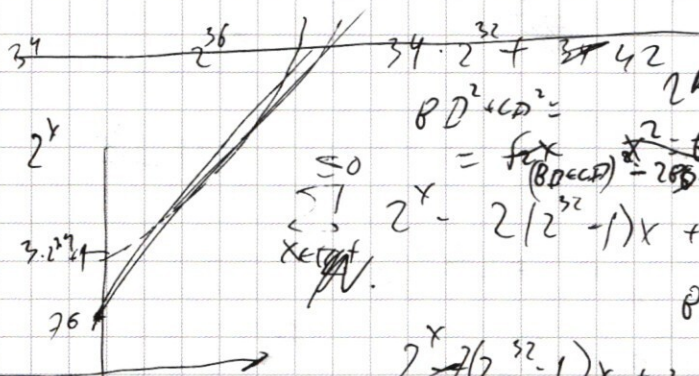
$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + (2^{32} - 1)x$$

$1/4 \cdot 85 \in \mathbb{Z}^2 91$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + (2^{32} - 1)x$$

$x \in \mathbb{Z}, 6 \in \mathbb{Z}$



$$BD^2 + CD^2 = 2R^2 \sin^2 \phi = x^2$$

$$2^x - 2(2^{32} - 1)x + 3 \cdot 2^{34} - 76 \leq 0$$

$$2^x - 2(2^{32} - 1)x + 3 \cdot 2^{34} - 76 \leq 0$$

$$2^x - 2(2^{32} - 1)x + 3 \cdot 2^{34} - 76 \leq 0$$

$$(2^{32} - 1) \cdot 10 - 32(2^{32} - 1 - 33) = 2(10 - (2^{32} - 1)32)$$

$$(2^{32} - 10) \cdot 33 - 32(2^{32} - 1 - 33) = 2(10 - (2^{32} - 1)32)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{CP \cdot AP \sin \varphi} + \frac{1}{2} CP \cdot PF + AP \cdot PF \cos \varphi$$

~~AC \cdot CB~~

$$X \cdot CP \frac{1}{2\sqrt{2}} + CP \cdot PF \frac{1}{2} + PF \cdot AP \cos \varphi \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{X \cdot PC}{\sqrt{2}} + \frac{PC \cdot PF}{x^2 - 2R^2} + \frac{AP \cdot PF \cdot \cos \varphi}{\sqrt{2}R} \right)$$

$$PF = \frac{x^2 - 2R^2}{PC}$$

$$\cancel{AP} \quad AP = \sqrt{2}R \quad PF \cos \varphi = \frac{x^2 - 2R^2 - PC^2}{2\sqrt{2}R \cdot PC}$$

$$\frac{X \cdot PC}{\sqrt{2}} + \frac{x^2 - 2R^2}{PC} = \frac{y}{PC} \cdot \left(\frac{y}{PC} - PC \right)$$

$$PC = \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}R \cos \varphi$$

~~CPA~~

$$-\cos \varphi = \sqrt{2}R \cos \varphi \cdot \frac{1}{PC} \quad \cancel{AP^2} \quad \frac{AP^2 + PC^2 - x^2}{PC}$$

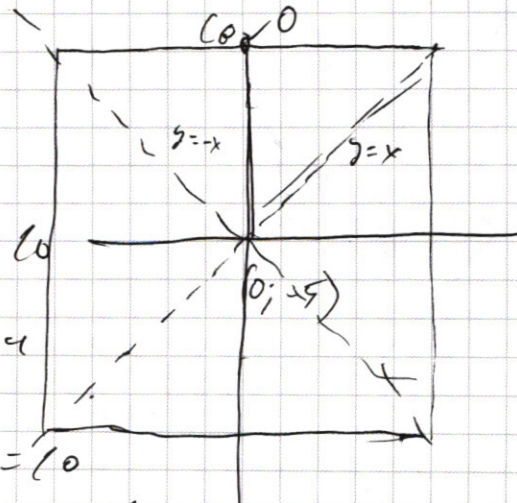
$$PC = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2R^2}{AP^2 + PC^2 - x^2}$$

$$PC^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{2R^2}{2R^2} + PC^2 - x^2$$

$$-x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{2R^2}{2R^2} = 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

CPV
PFV
COP



$$|x+y-5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = 4$$

$$|x+5-5| + |y+5-5| = 10$$

$$y' = y + 5$$

$$|y+5| + |y-x| = 10$$

$$y+x+y = 10$$

$$|x+5| + |x-5| = 10$$

$$y \geq x; -x$$

$$y+x = 10$$

$$-x = 5 - 2x = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА 2

$$\cos 9x + \sin 9x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

или

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos 4x$$

$$= 2 \sin 7x$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$7x = 2x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$7x + 2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \\ x = \frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{2}{9}\pi n - \frac{\pi}{36} \end{cases}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$$

$$x = \frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{20}$$

$$x = \frac{2}{9}\pi n - \frac{\pi}{36}$$

ЗАДАЧА 1

$$826! = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2 \Rightarrow \text{все такие числа}$$

то представляют собой 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7. Все это представляет

$$8! : (3! \cdot 3! \cdot 2!) = 560 \quad \text{Ответ: } 560$$

Точка P равно:

$$\frac{8}{5} = \left(\frac{8}{5} \right)^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5} \text{ или } \pi - \arcsin \frac{3}{5}$$

Значит площадь (сечения) (KLM) равно $\frac{64}{25} = 2,56$.

ОТВЕТ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$ или $\pi - \arcsin \frac{3}{5}$
 Площадь сечения (KLM) = 2,56

ЗАДАЧА 3

$$(x^2 y^4)^{\ln x} = y^{\ln(4/x^2)} \Rightarrow x^{-2 \ln x} y^{4 \ln x} = y^{\ln 2 - 2 \ln x}$$

$$\Rightarrow x^{-2 \ln x} y^{4 \ln x} = y^{\ln 2 - 2 \ln x}$$

$$\ln y^{\ln 2 - 2 \ln x} = \ln x^{-2 \ln x} \Rightarrow \ln y^{\ln 2 - 2 \ln x} = -2 \ln x \ln y$$

$$\Rightarrow y^{\ln 2 - 2 \ln x} = (x^2)^{\ln y - \ln x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ x > 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y > 0 \\ y = x^2 > 0 \end{cases}$$

нужно убедиться, что это является решением уравнения.

$$y^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (y+x+4)(y-2x)$$

$$\text{или } x=y>0: \quad (y+x+4)(y-2x)$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\text{или } x=y=x^2>0 \Rightarrow x=2=y$$

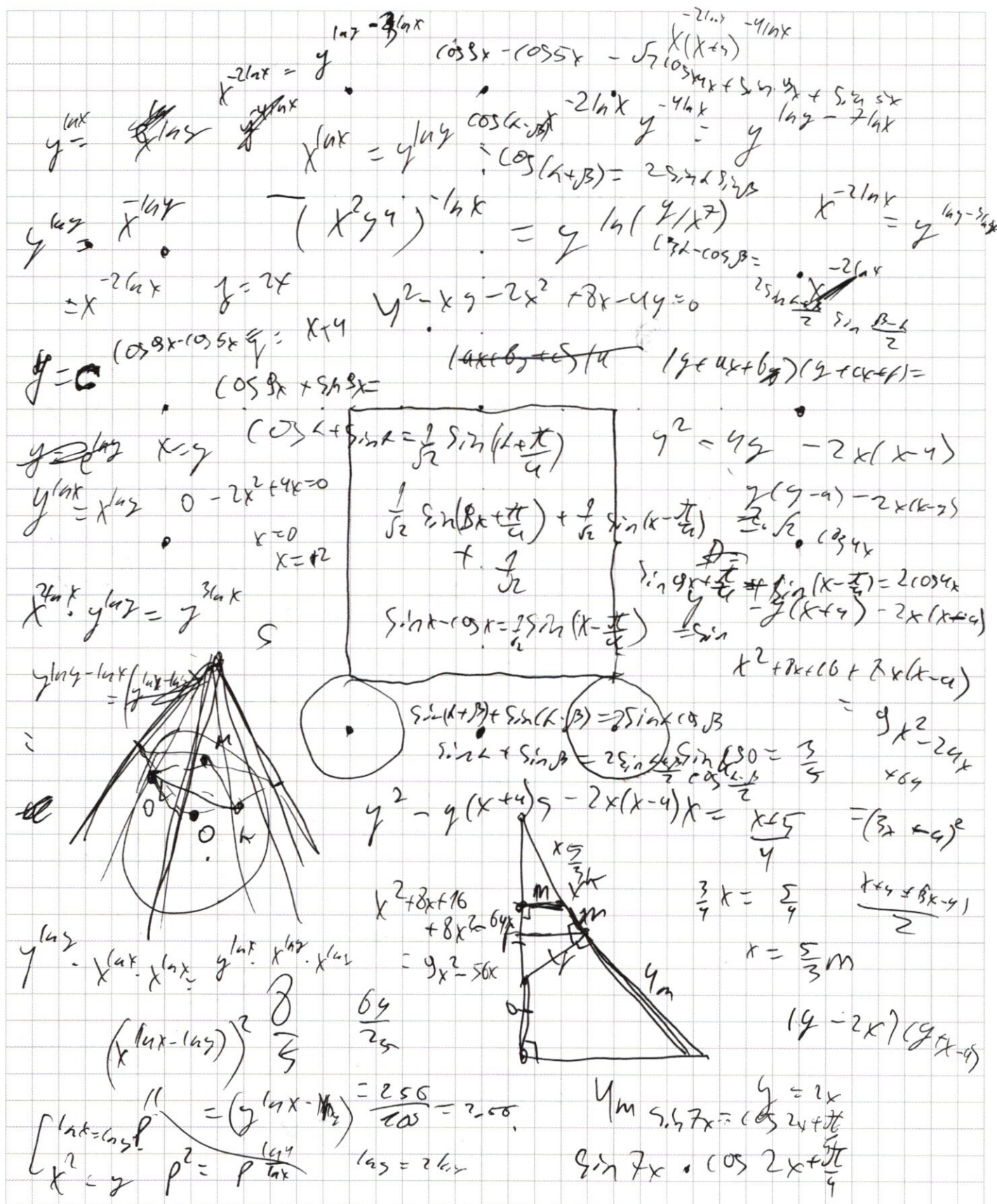
$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x=2=y \\ x=2, y=4 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2, y=4 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x &= -2 \sin 7x \sin 2x & \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \\ \sin 9x + \sin 5x &= 2 \sin 7x \cos 2x & \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin 2x \end{cases} \\ &\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$2x^2 - 2(x^2 - 2x^2) \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (0.8\pi) = x - 2x$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \quad (2x - 0)(0) = x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned} &x^2 - \cos 2x - 2x^2 = 0 \\ &2x = 2x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \\ &5x = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{5} \pi n$$

$$8261 = 9 \cdot 1029 = 27 \cdot 3^3 \cdot 43$$

$$9 \cdot 3^3 \cdot 343$$

$$8261$$

$$16 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 1^2$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$