

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; Т.е. $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

Теперь какие-то из цифр мы можем сгруппировать. Но только тройки, т.к. любые два числа дадут уже двузначное число. После группировки мы расставим эти цифры по некоторым местам.

Т.к. макс. кол-во цифр равно 6 (всего 6 сотен тысяч), то останутся — единицы. Минимальное кол-во сотен тысяч равно 5 (мы можем «склеить» только одну цифру тройки), а максимальное — 6. Рассмотрим 2 случая:

1) Занято 5 мест: тогда это цифры 9, 3, 7, 7, 7.

Выберем два места для 9 и 3: $C_5^2 \cdot 2!$ (т.к. их можно менять местами). Для семерок: C_3^3 . Всего $C_5^2 \cdot 2! \cdot C_3^3$

2) Занято 6 мест: тогда это цифры 3, 3, 3, 7, 7, 7.

Для троек: C_3^3 , для семерок: C_3^3 , всего $C_3^3 \cdot C_3^3$ (остальные цифры — единицы)

$$\text{Всего } 2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 + C_3^3 \cdot C_3^3 = 8 \cdot 2 \cdot 20 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} \cdot 10 =$$

$$= 56 \cdot 20 + 56 \cdot 10 = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680

$$(2) \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 9x + \sin 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

Воспользуемся формулой суммы синусов:

$$(\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}):$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\text{Заметим, что } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \pi k \text{ — решение}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi k \text{ — решение,}$$

т.к. косинус $\textcircled{1}$ обнуляется и $\cos 4x$ обнуляется

$$\text{Пусть } \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \neq 0: 2 \sin 7x = \frac{\cos 4x}{\cos(2x + \frac{\pi}{4})} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 7x = \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x - \sin 2x)}$$

$$\text{При этом } \cos 2x \neq \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sin 7x = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Отсюда либо } 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ либо } \pi - 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\text{Получаем } x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{9}, t \in \mathbb{Z}$$

Это удовлетворяет $(*)$. Не забудем и про самое первое решение.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{9}, t \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3.} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(4/x^2)} & \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Рассмотрим ур-ние $\textcircled{2}$ как квадратное, относительно y : $y^2 - y(x+4) + 2x(4-x) = 0$. Тогда видно, что корни $y = 2x \vee y = 4-x$ (легко видеть, применив т. Виета) Получаем, что $\textcircled{2} \Leftrightarrow (y-2x)(y-4+x) = 0$

Теперь $\textcircled{1}$: $x > 0$, т.к. присутствует $-\ln x$, сразу же $y > 0$, т.к. есть $\ln(4/x^2)$. Сделаем замену: (с учетом $x > 0, y > 0$)

$x = e^n, y = e^m$; Система примет вид:

$$\begin{cases} (e^{2n} - e^{4m})^{-\ln e^n} = e^{m \cdot \ln e^{m-2n}} = e^{m^2 - 2mn} \\ (e^m - 2e^n)(e^m - 4 + e^n) = 0 \end{cases}$$

из первого: $-2n^2 - 4mn = m^2 - 2mn \Leftrightarrow m^2 - 3mn + 2n^2 = 0$
легко угадываются корни: $m = 2n$ и $m = n$,
 ~~$m = 2n$ и $m = n$~~ Пусть (первый случай) $m = 2n$:

Тогда $(e^{2n} - 2e^n)(e^{2n} + e^n - 4) = 0$

$$\Downarrow$$

$$e^n(e^n - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n = \ln 2$$

$$m = 2n = \ln 4$$

это кв. ур-ние
если сделать замену
 $t = e^n$, то $t^2 + t - 4 =$

не имеет корней
 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, один отриц.

Тогда $n = \ln \frac{1+\sqrt{17}}{2}$
 $m = 2n = \ln \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$

Тогда получим пары решений: $x=2, y=4$
и $x = -\frac{1+\sqrt{17}}{2}, y = \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$.

Второй случай: $m=n$:

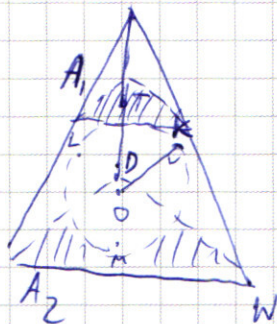
$$(e^m - 2e^m)(e^m + e^m - 4) = 0$$

Откуда $e^m = 2$, значит $m=n = \ln 2$,

т.е. $x=y=2$

Ответ: $(2, 4)$
 $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2\right)$
 $(2, 2)$

④ Поскольку сечения касаются сферы и перпендикулярны прямой, то они параллельны. картинка будет выглядеть, как тетраэдр, в который вписана сфера:



Поэтому точки K, L, M — центры вписанных окружностей соотв. треугольников.

Сечения обозначены как A_1 и A_2 .

Они, очевидно, подобные треугольники с коэфф. подобия $\frac{1}{4}$ (площади относятся как 1:16)

$SO \perp A_1$, значит проходит через точку касания A_1 со сферой. Аналогично и SO проходит через т. касания A_2 со сферой. Получается, что высота падает в центр треугольника основания, поэтому наш тетраэдр правильный. Т — точка касания. $ST=y$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда из подобия $TM = 3y$, а значит радиус сферы равен $OK = 1,5y$. Тогда $SD = ST + OT = 2,5y$. Следовательно $\sin \angle KSO = \frac{1,5y}{2,5y} = 0,6$. $\angle KSO = \arcsin 0,6$.

Понимая о том, что K, L, M — центры, проведем через M прямую, параллельную стороне нижнего шара (смотри на рис. ближе к нам) через точки K и L проведем прямые, параллельные SD . В сечении получим прямоугольник.

Одна из его сторон равна $\frac{1}{2}$ стороне основания, которую можно найти из площади: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = \frac{64}{\sqrt{3}}$

Найдём SD . Из теоремы Пифагора: $SD = \sqrt{MO^2 + SM^2}$. $R = MO$ — радиус опис. окружности $\frac{a^3}{4R} = 16 \Rightarrow R = \frac{a^3}{64}$; $SM = 4y$, $MO = WM = WK$ (как касательные) $= 2y$

Тогда $SW = SD = \sqrt{20}y$; т.к. $2y = \frac{a^3}{64}$, то $y = \frac{a^3}{128}$

Поэтому $SD = \sqrt{20} \cdot \frac{a^3}{128}$;

В конечном итоге, получим $\frac{SD}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot a^4}{4 \cdot 128} = \frac{64^2}{3 \cdot 4 \cdot 128} \cdot \sqrt{20}$
 $= \frac{64 \cdot 2\sqrt{5}}{3 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{16\sqrt{5}}{3}$

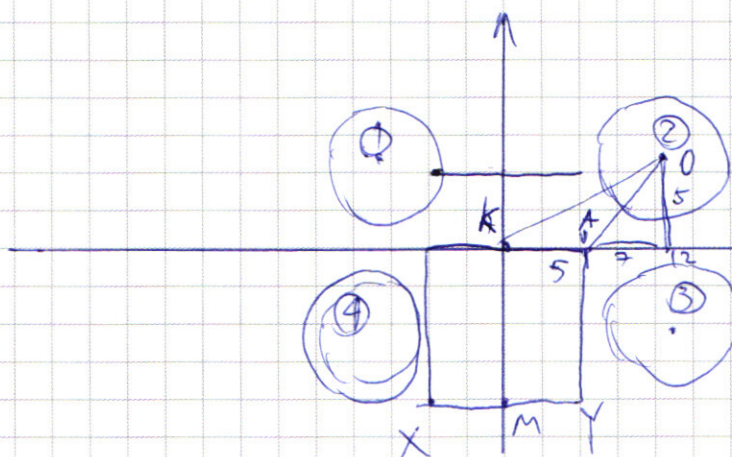
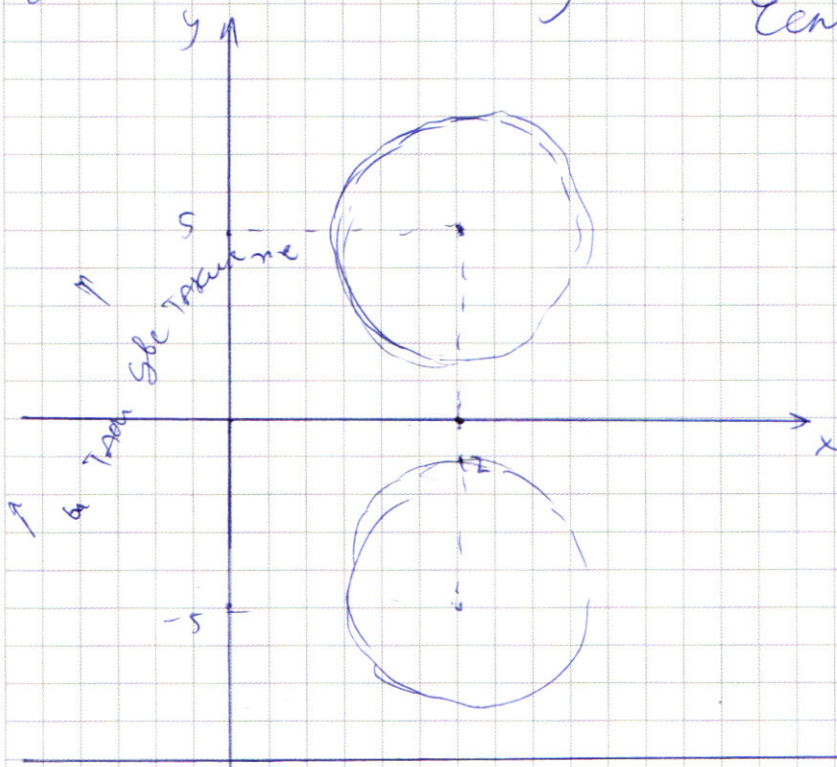
Ответ: $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ и
 $\angle KSO = \arcsin 0,6$

$$\textcircled{5.} \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

первое ур-ние задает на плоскости xOy квадрат со стороной 10 и центром $(0, -5)$.

Второе уравнение зависит от того, что задает второе уравнение. Это четыре окружности симм. относительно x и y :

Если радиус больше 5, то окружности будут пересекаться.



четыре окружности
① и ② касаются
квадрата (они касаются
в серединах сторон)
Тогда достаточно показать,
что OA больше радиуса

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ и ④ касаются квадрата, когда их радиусы равны 7. Поэтому $a = 49$.

$OA = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} > \sqrt{7}$. Поэтому $a = 49$ подходит. Но также, 2 решения могут быть, если ④ и ③ пересекают квадрат в точках K и M. Тогда радиус равен $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, но тогда ① и ② будут тоже пересекаться в точке K, но они будут пересекаться еще и левую сторону. Этот случай не подходит.

Остается последний случай: ① и ② касаются квадрата в точках X и Y. Число, что ④ и ③ будут достаточно большими и будут целиком содержать квадрат в себе. $OX = \sqrt{(12+5)^2 + (5-(-10))^2} = \sqrt{17^2 + 225} = \sqrt{514}$

Тогда $a = 514$.

Ответ: $a = 49$
 $a = 514$

7.) Для этого можно найти площадь фигуры, ограниченной кривой $2^x + 3 \cdot 2^{34}$ и прямой $76 + 2(2^{32} - 1)x$. А затем найти максимальную площадь многоугольника который может содержаться внутри этой фигуры и найти целочисленные координаты вершин. Площадь такого многоугольника можно оценить по формуле Пика.

Т.е. если площадь фигуры S , то $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1$;
Нас интересует значение $B + \Gamma$

x не может быть как слишком большим, так и слишком маленьким. Пусть $1 \leq x \leq 8$,
Тогда $76 + 2x \cdot 2^{33} - 2x < 76 + 2 \cdot 3 \cdot 2^{33} - 6 =$
 $= 70 + 2^{34} \cdot 3$, но $70 + 2^{34} \cdot 3 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$.

Если $x < 0$, то ясно, что второй y отриц.
А первый неотрицательный. Получается,
что положительное меньше отрицательного,
противоречие.

Если $x \geq 3$ и $x \leq 3$, то $x = 3$ подходит.

Тогда $y \in [8 + 3 \cdot 2^{34}, 70 + 3 \cdot 2^{34}]$ этого
63 числа.

Если $x \geq 3$, то $x <$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 43 = 3^3 \cdot 43$$

как только ~~разработчик~~

Число Макс. кол-во занятых позиций

Вз. Минимальное: 3.

→ Если задано z , то это значит g, z, y_3

В каком-то направлении, чем 4,70 $\approx$ 3,33 м³

$$9261 = 9 \cdot 1029$$

$$= 27 \cdot 343$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad 1.2.3.4.5.6$$

$$\cos(5x+4x) - \cos(5x) - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x \quad 8.5$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x = \cos 5x -$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(-5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

8.7.6.5.4.3.2

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \sin \beta =$$

$$2 \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$2 \cos \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2}$$

$$2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cos 7x - \cos 4x = 0$$

$$= \cos x - \sin x \cdot 2 \sin 2x (\cos 7x - \sin 2x) - 2 \sin(2x) \cos 7x - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(2x) \cos 7x + \cos^4 x = 0$$

$$\cancel{\cos^2 2x} = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$\begin{cases} (x^3 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^3)} \\ y^2 - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$y^{\ln y} = y^{\ln y} \cdot (y^7)^{-\ln x}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y}$$

$$y^2 - y(x+4) + 2x(4-x)$$

$$y^2 - y(x+4) + 8x - 2x^2 = 0$$

$$2 \sin \quad 2x(4-x)$$

$$\begin{cases} (y-2x)(y-4-x) = 0 \\ k=2 \end{cases}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$y = x^{\frac{\ln(y/x^3)}{\ln(x/y)}}$$

$$(e^{2n} e^{4m})^{-n} = e^{m \cdot \ln e^{m-7n}}$$

$$e^{-2n^2 - 4mn} = e^{m^2 - 7mn}$$

$$-2n^2 - 4mn = m^2 - 7mn$$

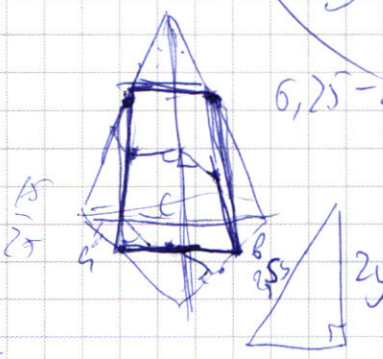
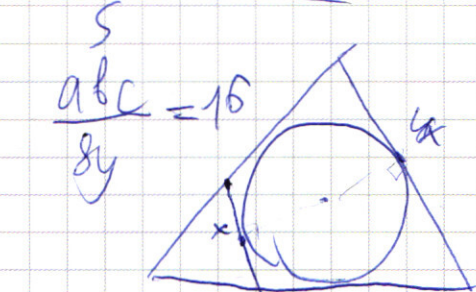
$$m^2 - 3mn + 2n^2 = 0$$

$$C = \frac{16 \cdot 8y}{3ab}$$

$$y = \frac{a^3}{8 \cdot 16}$$

$$\frac{a^3}{8y} = 16$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} e^m = 2e^n \\ e^m = e^n - 4 \end{cases}$$

$$(m-2n)(m-n) = 0$$

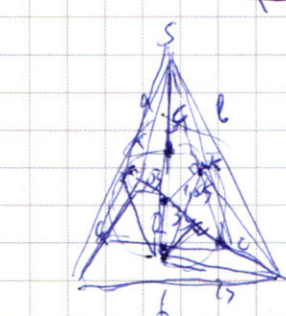
$$\text{или } m=2n \text{ или } m=n$$

$$e^{2n} = 2e^n$$

$$(e^n)(e^n - 2) = 0$$

$$\text{т.е. } e^n = 2 \Rightarrow n = \ln 2$$

$$\text{или } e^{2n} = e^n - 4$$



$$\arcsin \frac{1,5y}{2,5y} = \arcsin 0,6$$

$$2y$$

$$1$$

$$\sqrt{20}y$$

$$t^2 + 7t + 6 = 0$$

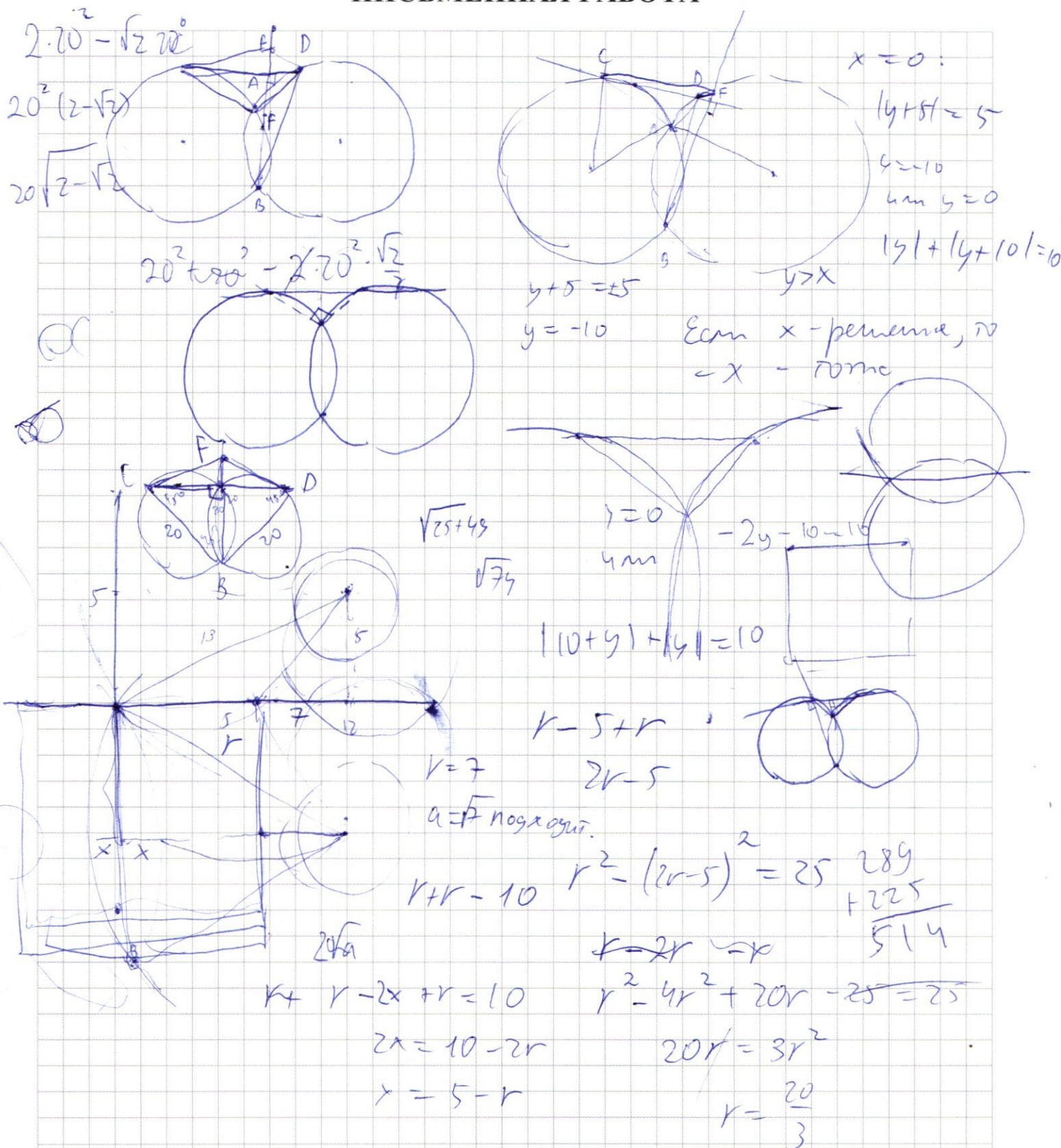
$$t = 1$$

$$\text{случай 2) } m=n$$

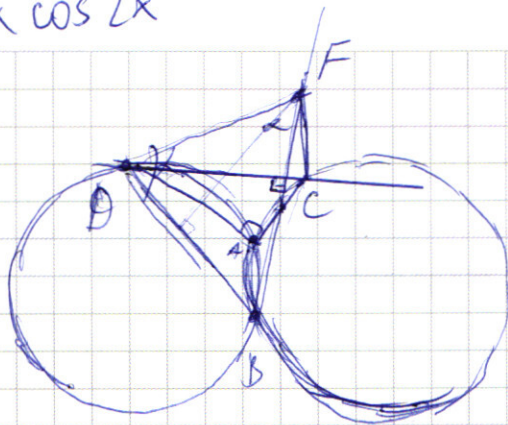
$$\text{тогда } e^m = 2e^m - \text{неи р.}$$

$$2^8 - 16 + 76 \quad 2^8 + 5 \cdot 2^3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2\cos 7x \cos 2x$$



$$\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x$$

$$\cos 9x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x = \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \sin(5x + \frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \sin(5x + \frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$2\sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2\sin 7x = \frac{\cos 4x}{\cos(2x - \frac{\pi}{4})} = \frac{2\cos 4x}{\sqrt{2}(\sin 2x + \cos 2x)}$$

$$\sin 7x = \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\sqrt{2}(\sin 2x + \cos 2x)}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x \cos 5x$$

$$\sin 7x = \sin(-2x + \frac{\pi}{4})$$

$$7x = -2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$9x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{36}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x >$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33} x - 2x + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k = 9x$$