МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

   Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7=9261$

$343\cdot27$: 2401, 686, 9261

$2100+280+21$

-------- – 8 цифр

$C_8^3\cdot C_5^3$ – где все по 1 (3 тройки, 3 семерки и 2 един.

Еще можно как

9, 3 и 7 7 7

$8\cdot7\cdot C_6^3$

$C_8^3\cdot C_5^3+56C_6^3=n$

$\cos9x-\cos5x-\sqrt2\cos4x+\sin9x+\sin5x=0$

~~$\cos9x+\sin9x$~~

$\cos9x-\cos5x=\cos\frac{18x}{2}-\cos\frac{10x}{2}=\cos\frac{14x+4x}{2}-\cos\frac{14x-4x}{2}=$

$=\cos\frac{14x}{2}\cos\frac{4x}{2}-\sin\frac{14x}{2}\sin\frac{4x}{2}-\cos\frac{14x}{2}\cos\frac{4x}{2}-\sin\frac{14x}{2}\sin\frac{4x}{2}=-2\sin7x\sin2x$

$\sin9x+\sin5x=\sin\frac{18x}{2}+\sin\frac{10x}{2}=\sin\frac{14x+4x}{2}+\sin\frac{14x-4x}{2}=\sin\frac{14x}{2}\cos\frac{4x}{2}+\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{14x}{2}$

$+\sin\frac{14x}{2}\cos\frac{4x}{2}-\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{14x}{2}=2\sin7x\cos2x$

$2\sin7x\cos2x-2\sin7x\sin2x-\sqrt2\cos4x=0$

$2\sin7x(\cos2x-\sin2x)-\sqrt2\cos4x=0$

$2\sin7x(\cos2x-\sin2x)-\sqrt2(\cos^22x-\sin^22x)=0$

$2\sin7x(\cos2x-\sin2x)-\sqrt2(\sin2x+\cos2x)(\cos2x-\sin2x)=0$

$(\cos2x-\sin2x)(2\sin7x-\sqrt2(\sin2x+\cos2x))=0$

$\cos2x=\sin2x \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}}$

$2\sin7x=\sqrt2(\sin2x+\cos2x)$

$\sqrt2\sin7x=\sin2x+\cos2x$???

~~$2\sin^27x=1+\sin4x$~~

~~$2^{\ln(2/x)-6\ln2\ln x}=x^{-6\ln x}\cdot x^{-6\ln2\ln x}$~~

$2^{-6\ln2\ln x+4\ln x}=x^{-6\ln x+6\ln2\ln x}$

$2^{\ln x(-6\ln2+4)}=x^{\ln x(-6+6\ln2)}$

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)}\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0\end{cases}$$

$(y+x-4)(y-2x)=0$

$(16x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln(2/x^6)}$ $-\ln2\ln x$ $\ln2x=\ln2\cdot\ln x$

$2^{-4\ln x}\cdot x^{-6\ln x}=2^{\ln(2/x^6)}\cdot x^{\ln(2/x^6)}$ $\ln(y/x^7)=\ln y-7\ln x$

$(y+x-4)(y-2x)=0$

$$\left[\begin{array}{l}y=2x\\ y+x=4\end{array}\right.$$

~~$2^{-4\ln x}=2^{\ln(2/x^6)}=x^{-6\ln x}$~~ $-6\ln2\cdot x$

~~$y^2-3xy+xy-2x^2-4y+8x$~~

$\log_2 2^4=-2\log_2 2$

$\log_2(2\cdot4)=3$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$ $2^{-6\ln 2}$ 2^{-} $x^a + x^b \neq x^{a+b}$

$\log_x a + \log_x b = \log_x a+b$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$ $y = 2x$, $\ln y = \ln 2x = \ln 2 + \ln x$

$x^{-2\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} \cdot x^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x} \cdot x^{\ln 2 - 6\ln x}$

$x^{-6\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x} \cdot x^{\ln 2 - 6\ln x}$

$x^{\ln 2} = 2^{\ln 2 - 2\ln x}$

$x = 2^{\log_2 x}$ $4 = 2^{\log_2 4}$

$2^{\ln 2 \cdot \log_2 x} = 2^{\ln 2 - 2\ln x}$

$\ln 2 \cdot \log_2 x = \ln 2 - 2\ln x$

$\ln 2(\log_2 x - 1) = -2\ln x$ $\log_e x = \frac{\log_2 x}{\cancel{\log_2 e}} \cdot \ln_2$ $\log_2 \cancel{8}\,16 = \frac{\log_4 16}{\log_4 2}$

$\ln_2(\log_2 x - 1) = -2\frac{\log_2 x}{\log_2 e}$

$\ln_2 \log_2 x + \frac{2\ln_2}{\cancel{\log_2 e}} \log_2 x = \ln_2$

$\log_2 x = \frac{\ln_2}{3\ln_2} = \frac{1}{3}$ $\log_2 x = \frac{1}{3}$ $\boxed{x = \sqrt[3]{2} \quad y = 2\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}}}$

$\frac{15\sqrt{17}}{\sqrt{15^2+17^2}} = \sqrt{2}$ $\log$

$4 = \frac{2}{1/2}$

$576 \mid 4$

$576 : 4 = 144$

при $a = 49$

$a = 36$

$(12;1)$

$2^{2/3} \cdot 2^{\frac{16}{3}} = 2^{\frac{18}{3}} = 2^6$ $2^{4/3} \cdot 2^{-\frac{7}{3}} =$

$(2^6)^{-\ln\sqrt[3]{2}}$ $2^{-6\ln 2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-2\ln 2}$ $(2^{\frac{4}{3}})^{\ln 2^{-1}} = 2^{-1}$ $2^{-\frac{4}{3}\ln 2}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$ окр рад $\sqrt{a}$

4 окр. с ц. в $(12;5)$

$|y+x+5| + |y-x+5| = 10$ $x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$|(y+5)+x| + |(y+5)-x| = 10$

$y+5+x \geq 0$ $y+5-x \geq 0$

$y \geq -x-5$ $y \geq x-5$

$y+5+x+y+5-x = 10$ $y+x+5-y+x-5 = 10$

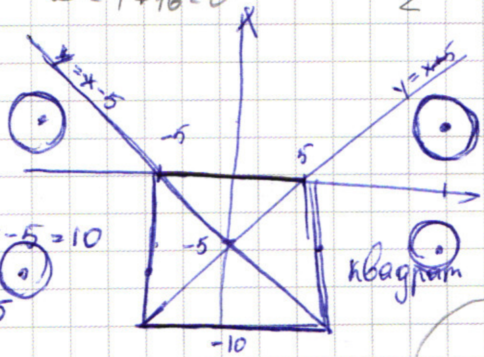
$y = 0$ $2x = 10$ $x = 5$

$-y-5-x-y-5+x = 10$

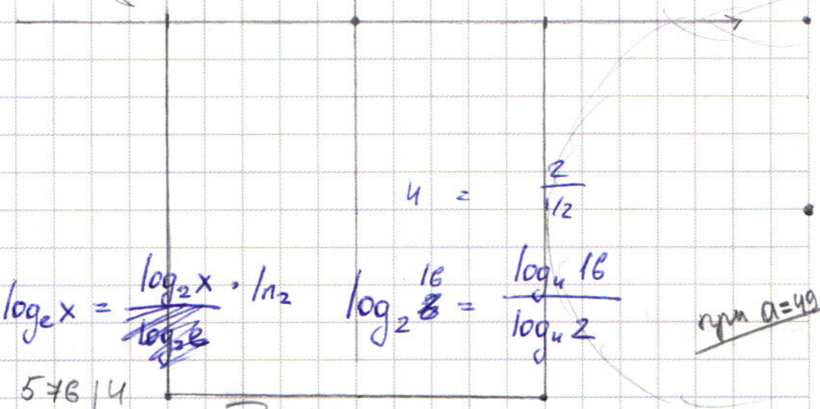
$-2y = 20$ $y = -10$

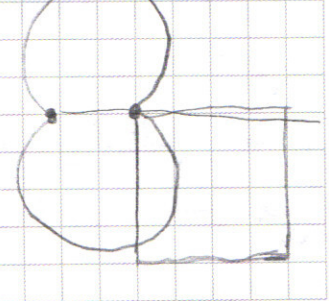
$|-5+5-5| + |-5+5+5| = 10$

$5 + 5 = 10$



квадрат 10×10

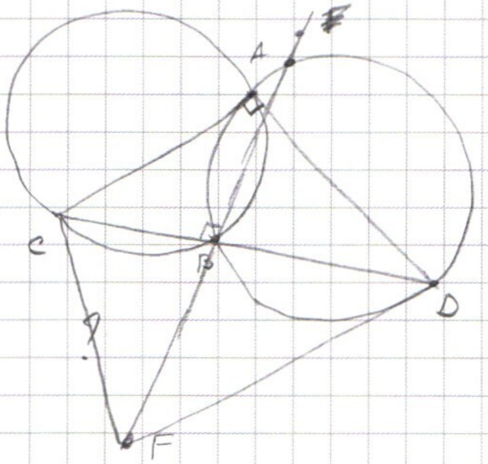


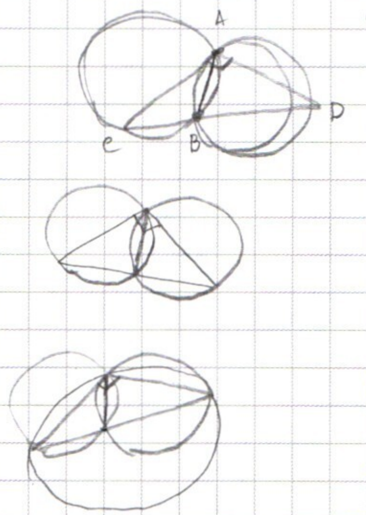


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

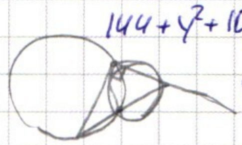




$CD^2 = AC^2 + AD^2$

$144 + (y+5)^2 = a$

$144 + y^2 + 10y + 25 = a$



$y^2 + 10y + 169 - a = 0$

$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a^2 =$

$= (x+12)^2 + (y+5)^2$

$(x-12)^2 = (x+12)^2$

$x^2 - 24x + 144 = x^2 + 24x + 144$

$x = 0$

$x^{\ln 2} = 2^{2\ln x - \ln 2}$

$x = 2^{\log_x 2}$

$2^{\ln 2 \cdot \log_x 2} = 2^{2\ln x - \ln 2}$

$\ln 2 \cdot \log_x 2 = 2\ln x - \ln 2$ $\quad \ln x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 e} = \log_2 x \cdot \ln 2$

$\ln 2 \cdot \log_x 2 = 2\ln x \log_2 x - \ln 2$

$\ln 2 = (2\ln x - \ln x) \log_2 x$

$\log_2 x = 1$ $\quad \boxed{x = 2 \quad y = 4}$

$2^2 \cdot 2^8 = 2^{10}$ $\quad 2^{-10\ln 2}$ $\quad 2^{2\ln(2^{-5})} = 2^{-10\ln 2}$

$\cancel{x^2 y^4}$ $\quad (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$ $\quad \ln a + b$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$ $\quad y = 4 - x$ $\quad -2\ln x = \log_x^2(4-x) \cdot \ln x - 3\ln x \cdot \log_x(4-x)$

$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x}$??? $\quad x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$ $\quad y = 4-x$

$\ln(4-x) = \dfrac{\log_x(4-x) \cdot \ln x}{\cancel{\log_x 2}}$ $\quad x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x}$

$-2\ln x = \ln(4-x) \cdot \log_x(4-x) - 3\ln x \log_x(4-x)$ $(4-x) = x^{\log_x(4-x)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.е. цифры в числе должны быть $3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1$ или $9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1$ (если распределять по-другому – одна из ~~то~~ „цифр" будет > 10) Вариантов расположения этих цифр в 8ми-значном числе в первом случае $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 10 = 560$ (сначала кол-во вар. расставить тройки, потом семерки), во втором случае их $8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 56 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 56 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 56 \cdot 20 = 1120$ (сначала выб. место для 9, потом для 3, потом для 7).

Итого $1120 + 560 = 1680$. Ответ: 1680.

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2} = -2\sin 7x \sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x \cos 2x$

Заменим:

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cancel{\sin}\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{array}\right.$$

В первом случае: $\cos 2x = \sin 2x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}}$

Во втором: $2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)$...

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}\\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0\end{cases}$$

ОДЗ: $x>0$, $y>0$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y-2x)(y+x-4)$, т.е. из второго ур-я следует $\left[\begin{array}{l} y=2x \\ y+x=4. \end{array}\right.$

Преобразуем 1е ур-е:

$(x^2y^4)^{-\ln x} = x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x}$

$y^{\ln(y/x^7)} = y^{\ln y + \ln(x^{-7})} = y^{\ln y - 7\ln x}$ $\qquad x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

(или $x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$)

Пусть $y=2x$. Подставим:

$x^{-2\ln x}\cdot(2x)^{-4\ln x} = (2x)^{\ln 2x - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x}\cdot 2^{-4\ln x}\cdot x^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 + \ln x - 7\ln x}\cdot x^{\ln 2 + \ln x - 7\ln x}$

$x^{-6\ln x}\cdot 2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x}\cdot x^{\ln 2 - 6\ln x}$

$x^{\ln 2} = 2^{2\ln x - \ln 2}$ $\qquad$ Заменим: $x = 2^{\log_2 x}$

$2^{\log_2 x\cdot\ln 2} = 2^{2\ln x - \ln 2}$ $\qquad$ осн. равны => показ. степени равны

$\log_2 x\cdot\ln 2 = 2\ln x - \ln 2$ $\qquad \ln x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 e} = \log_2 x\cdot\ln 2$

$\log_2 x\cdot\ln 2 - 2\log_2 x\ln 2 = -\ln 2$

$\ln 2 = \log_2 x\cdot\ln 2 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$ – один ответ

Нужно подст. $y = 4-x$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x}$

$$(4-x) = x^{\log_x(4-x)}$$

$$x^{-2\ln x} = x^{\log_x(4-x)(\ln(4-x)-3\ln x)}$$ Осн. равны => показ степени равны

$$-2\ln x = \log_x(4-x)\ln(4-x) - 3\log_x(4-x)\ln x$$

$$\ln(4-x) = \frac{\log_x(4-x)}{\log_x e} = \log_x(4-x)\cdot\ln x$$

$$-2\ln x = \log^2_x(4-x)\ln x - 3\log_x(4-x)\ln x$$ Сокр. на $\ln x$ ($\ln x > 0$)

$$-2 = \log_x^2(4-x) - 3\log_x(4-x) \qquad \log_x(4-x) = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t^2 - t) - (2t-2) = 0$$

$$t(t-1) - 2(t-1) = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0, \text{ т.е. } \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_x(4-x) = 1 \\ \log_x(4-x) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4-x \\ x^2 = 4-x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.,$$

но $x > 0$, т.е. подх. только $x = 2$ и $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, т.е. реш. ур-я есть $(x=2, y=2)$ и $\left(x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Ответ: $(x=2, y=4)$; $(x=2, y=2)$; $\left(x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

$\boxed{№5}$

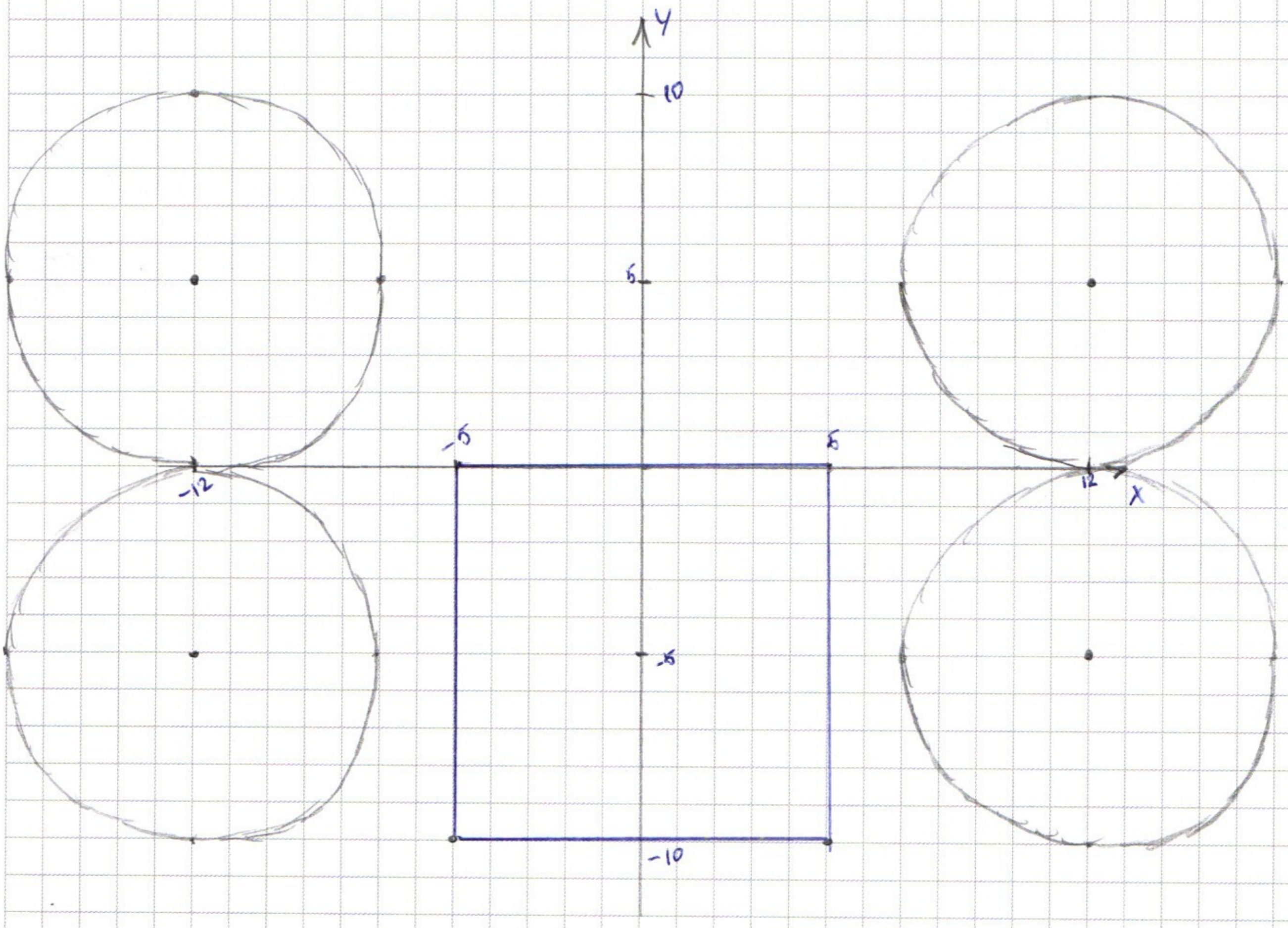
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Первое ур-е задает на коорд. пл-ти квадрат с центром в точке $(0;-5)$ и стороной 10 (можно получить раскрытием модулей, см. черновик)

Второе ур-е задает на пл-ти окр. рад $\sqrt{a}$ без модулей (каноническ. вид ур-я окр.), однако с участием модулей

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

из множ. подходящих точек исчезают точки с $x<0$ и $y<0$ и появл. точки $(-x;-y)$, $(-x;y)$ и $(x;-y)$ при подх. ур-ю без модулей (x,y), т.е. часть окр-ти „отзеркаливается" отн. O_x и O_y. (при замене x на $-x$ или y на $-y$ ур-е не теряет истинности). Получаем:



Есть только 2 реш., когда две нижние окр. кас. сторон квадрата ($\sqrt{a} = 12-5=7$, $\underline{a=49}$) Или когда точка пересеч. двух нижних окр. лежит на оси O_y и $y \in (0;10)$ - иначе их либо нет, либо больше двух. Найдем a для 2го случая:

$$\begin{cases}(x-12)^2+(y+5)^2=a\\(x+12)^2+(y+5)^2=a\end{cases}$$ (т. пересеч. 2 нижних окр.)

(вычли)

$$\begin{cases}(x-12)^2-(x+12)^2=0\\(x-12)^2+(y+5)^2=a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\144+y^2+10y+25-a=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\y^2+10y+169-a=0\end{cases}$$

$$D=100-4(169-a)=4a+100-676=4a-576=4(a-144)$$

$$y=\frac{-10\pm2\sqrt{a-144}}{2}=-5\pm\sqrt{a-144}$$

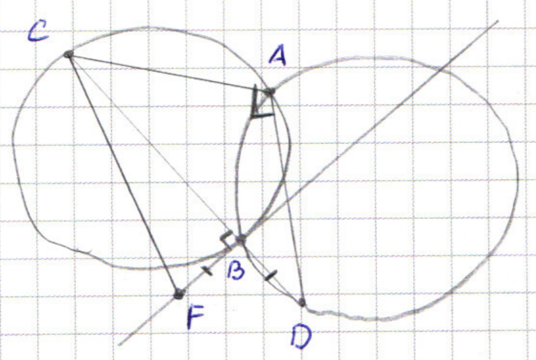
Ответы симм. отн. -5, т.е. обе т. пересеч. равноуд. от т. $(0;-5)$. Подходит только вариант, когда треб. подходят т. $(0;0)$ и $(0;-10)$, т.е. $a=12^2+5^2=144+25=\underline{169}$.

При $a<49$ пересеч. нет, при $a\in(49;169)$ пересеч. минимум 4 (обе нижние окр. пересек. квадрат в 2 точках), при $a>169$ пересеч. нет.

<u>Ответ:</u> $a=49$, $a=169$.

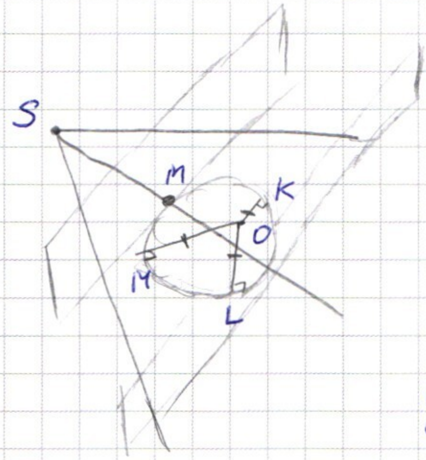
$\boxed{№6}$

$CF-?$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$



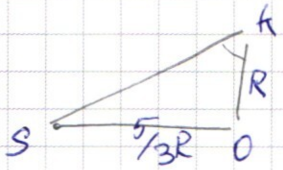
Треуг. – сечения подобны с коэф k

$k^2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{1} \Rightarrow k = 4.$

Рассм. от т. S до 1й пл-ти ~~в~~ меньше диаметра сферы в 3 раза, т.е. $3SM = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow SM = \frac{2}{3}R$, M – т. кас. ~~сф. и с~~ сферы и 1й пл-ти, R – рад. сферы

$SO = R + SM = \frac{5}{3}R$, $OK = R$



$tg\, KSO = \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5}$, $\angle KSO = arctg\left(\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: $\angle KSO = arctg\left(\frac{3}{5}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)