

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 3087 \overline{) 3} \\ 1029 \overline{) 3} \\ 343 \overline{) 7} \\ 49 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 7} \\ 11 \end{array}$$

W1
9261 = 3³ · 7³ Вам нужно в значке числа
а цифр только 6 ⇒ в числе будет еще
две 1

В числе также содержится: три - 7
три - 3

Тогда количество таких чисел равно: две - 1

$$N = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{48} = 2240$$

W2

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \quad \text{взв}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad \text{ДЗ: } x > 0; y > 0$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}} \quad (\text{логарифмируем})$$

$$\ln x \cdot (-2\ln x) + \ln y \cdot (-4\ln x) = \ln y \cdot \ln y - \ln y \cdot 2\ln x$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0 \quad (: \ln^2 x)$$

$$\frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 1 \Rightarrow \ln y = \ln x \Rightarrow y = x$$

$$t_2 = \frac{3-1}{2} = 2 \Rightarrow \ln y = 2\ln x \Rightarrow y = x^2$$

$$1) \quad y = x \quad ; \quad y^2 - xy^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y \cdot (y - 2) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad y = 2 = x$$

$$2) \quad y = x^2 \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x \cdot (x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 6x \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ -4x + 8 \\ \underline{-4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$x \cdot (x-2) \cdot (x^2 + x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{— } \emptyset$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{(\sqrt{17} - 1)^2}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ (к задаче №3): $(x; y) = (2; 2); (2; 4);$
 $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4})$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 0 \end{cases}$$

График второго уравнения будет представлять 4 окружности с центрами в точках $O_1(12; 5), O_2(-12; 5), O_3(12; -5), O_4(-12; -5)$ и радиусом 5.

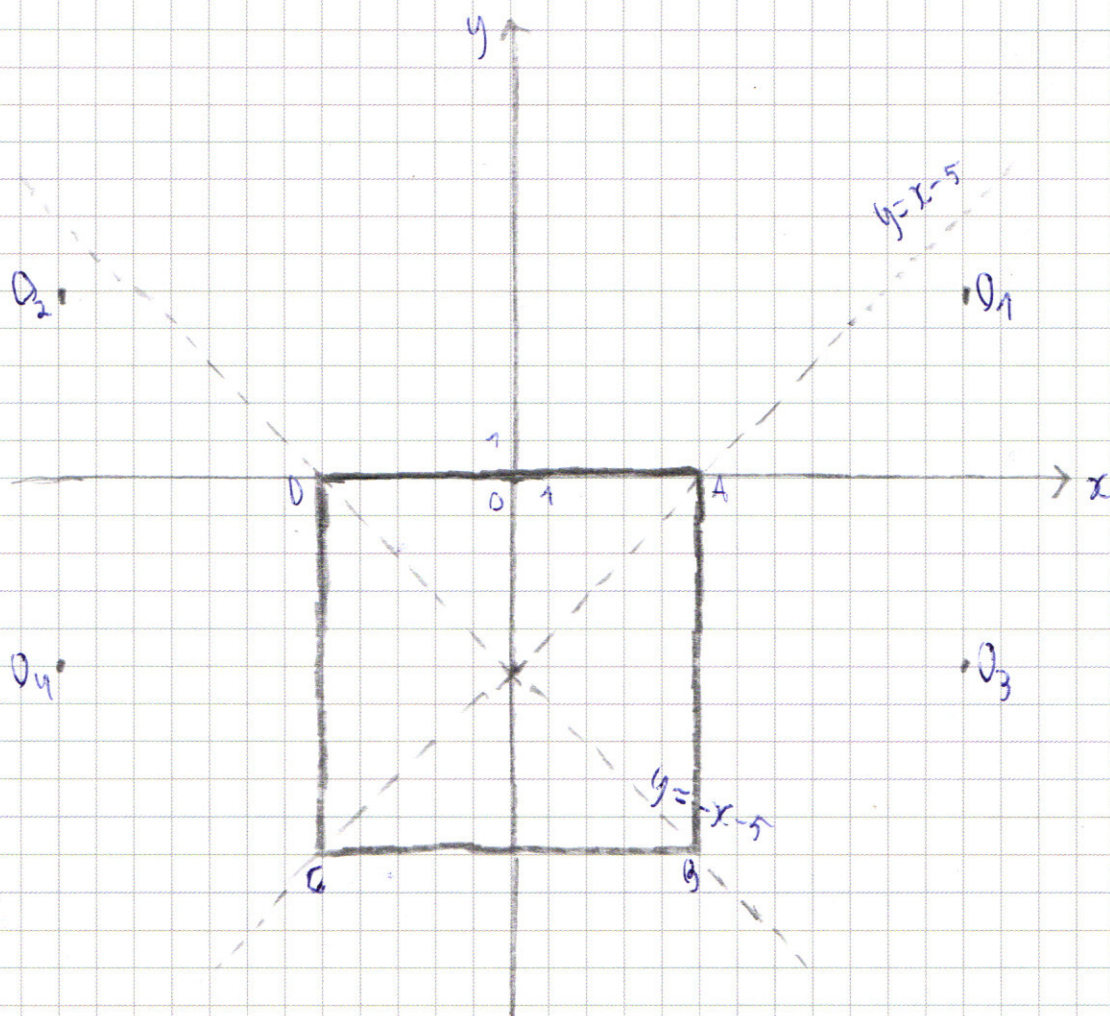
Изобразим график первого уравнения:

$$\begin{aligned} 1) ++: & \quad x+y+5+y-x+5=10 \\ & \quad 2y=0 \\ & \quad y=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) +-: & \quad x+y+5-y+x+5=10 \\ & \quad x=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) -+: & \quad -x-y-5+y-x+5=10 \\ & \quad x=-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) --: & \quad -x-y-5-y+x-5=10 \\ & \quad y=-10 \end{aligned}$$



Если мы сможем найти систему имеет два решения.
 Это будет в двух ~~случаях~~ случаях.

$$g(O_3; AB) = \sqrt{a} \quad \text{и} \quad g(O_1; C) = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{(12-5)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{a}$$

$$a = 49$$

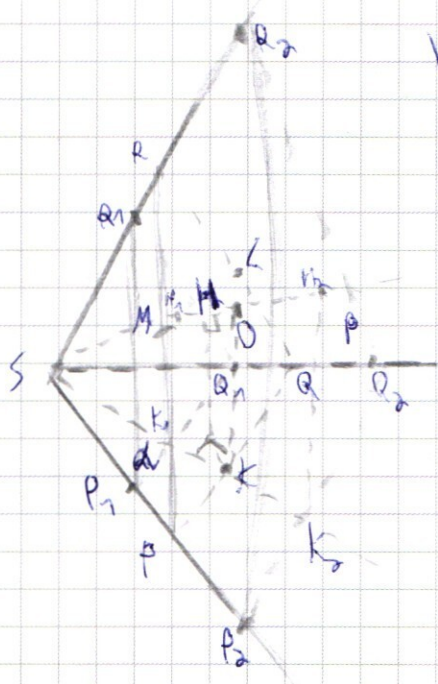
$$\sqrt{(12+5)^2 + (5+10)^2} = \sqrt{a}$$

$$17^2 + 15^2 = a$$

$$a = 514$$

Ответ: ровно два решения при $a = 49$; 514

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: $\angle SPQR$

сфера ω касается SO в точке K , $SO \perp \omega$

PQR - сечение ω , $\angle SPQR$ искомого (KLM)

$P, Q, R \perp SO$ и касаются сферы

$P_1Q_1R_1$ - сечение ω искомого α

$P_2Q_2R_2$ - сечение ω искомого β

$$S(P_1Q_1R_1) = 1$$

$$S(P_2Q_2R_2) = 16$$

Найти: $\angle KSO = ?$

$$S(PQR) = ?$$

Решение:

Доп. построение: $SK \perp P_1Q_1 = M, K_1$; $SK \cap P_2Q_2 = K_2$;

$K_1H_1 \perp SO$; $K_2H_2 \perp SO$; $KH \perp SO$; ~~$SK \perp PQR$~~

$\alpha, \beta \perp SO \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

$$(SPQ): \Rightarrow P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \Rightarrow \frac{SQ_1}{SQ_2} = \frac{SP_1}{SP_2} \quad (\text{по теор. Фалеса})$$

$$\angle PSQ = \alpha$$

$$\Delta SP_1Q_1 \sim \Delta SP_2Q_2 \Rightarrow \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{SQ_1}{SQ_2}$$

$$\text{аналогично: } \frac{P_1R_1}{P_2R_2} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} = \frac{SQ_1}{SQ_2} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} \Rightarrow \Delta P_1Q_1R_1 \sim \Delta P_2Q_2R_2$$

$$\frac{S(P_1 Q_1 R_1)}{S(P_2 Q_2 R_2)} = \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow \frac{R_1 Q_1}{R_2 Q_2} = k = \frac{1}{4} = \frac{SH_1}{SH_2}$$

$$SH_2 = 2r + SH_1$$

$$4SH_1 = 2r + SH_1$$

$$r = 1,5 SH_1 = OK$$

$$\cos(\angle KSO) = \frac{OK}{SH} = \frac{r}{r + SH_1} = \frac{1,5 SH_1}{2,5 SH_1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin(\angle KSO) = \frac{4}{5}$$

$$KH \perp SO \Rightarrow \angle H = 90^\circ \Rightarrow \angle KSO = \angle KSO = \frac{SH}{SK} = \frac{3}{5}; \sin(\angle KSO) = \frac{SK}{SO} = \frac{4}{5}$$

$$SK = \frac{4}{5} SO \Rightarrow SH = \frac{12}{25} SO = \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{2} \cdot SH_1 = \frac{6}{5} SH_1$$

$$\Delta(P_1 Q_1 R_1) \sim \Delta(P_2 Q_2 R_2) \text{ следовательно } \Delta(P_1 Q_1 R_1) \sim \Delta(PQR)$$

$$\frac{P_1 Q_1}{PQ} = \frac{SH_1}{SH} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S(P_1 Q_1 R_1)}{S(PQR)} = \frac{25}{36} \Rightarrow S(PQR) \cdot \frac{36}{25} = 1 = 1,44$$

$$\angle KSO = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\text{ответ: } \angle KSO = \arccos\left(\frac{3}{5}\right); S(PQR) = 1,44$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 \overline{) 3087}$$

$$3087 \overline{) 102913}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ -28 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 307 \\ -28 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \\ -49 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$7^3 \cdot 3^3 \cdot 1^2$$

$$\frac{8!}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3} = 240$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) - (\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(4x+3x) = \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x =$$

$$2 \sin 2x \cos 2x (4 \cos 3x - 3 \cos x) + (3 \sin x - 4 \sin 3x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$(2 \cos 2x - 1) (2 \sin 2x \cos 2x \cos x - \sin x (\cos 2x - \sin 2x))$$

$$2 \sin 2x \cos^2 x \cos 2x - 2 \sin x (\cos 2x + \sin x)$$

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x + \sin 2x (1 - 2 \sin^2 x) = \sin 2x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos x (2 \cos 2x - 1)$$

$$100 + 149 + 140 = 289$$

$$100 + 25 + 100 = 225$$

$$514$$

$$\ln x (x^2 y^4)^{-\ln x} = x^{-2 \ln x} y^{-4 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2 \ln x}}$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln y \cdot \ln y - 2 \ln x \cdot \ln y$$

$$-2 \ln x (\ln x + 2 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$-2 \ln x + 3 \ln x \ln y - \ln^2 y = 0$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$

$$y = x$$

$$y = x^2$$

$$-2a^2 + 3ab - b^2 = 0 \quad a^2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{b}{a} + 2 = 0 \quad \frac{b}{a} = 1$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = 1 \quad \frac{\ln y}{\ln x} = 2$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$2 - 9 - 8 = 1$$

$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$$

$$-2y \cdot (y - 2) = 0$$

$$y = 0 \quad y = 2$$

$$(2^6)^{-\ln 2} = 2^{-\ln 2^6} = (2^6)^{\ln 2} \quad \checkmark$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 6x = 0$$

$$x \cdot (x^3 - x^2 - 6x + 6) = 0$$

$$8 - 4 - 12 + 6$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline x^2 - 6x + 8 \\ -x^2 - 2x \\ \hline -4x + 8 \end{array}$$

$$y = \sqrt{\frac{5 \pm 1}{2}}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x \sin 5x = \cos 2x - \sin 2x$$

$$\cos 2x \cdot (\sqrt{2} \sin 5x - 1) + \sin 2x \cdot (\sqrt{2} \cos 5x - 1)$$

$$\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 2x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$5x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

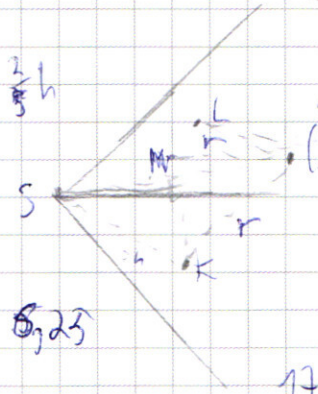
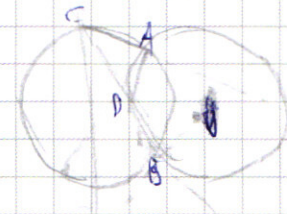
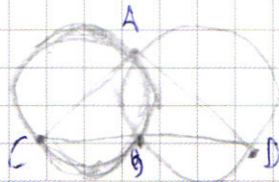
$$x = \frac{\pi}{10}$$

$$\frac{4}{5} \quad \frac{2}{5} h$$

$$\frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$$

$$S = \frac{2.5}{4} = 0.625$$



$$r = \frac{1}{3} h$$

$$3.5h^2 = 3.5h^2$$

$$\frac{25 - 9}{4} = 2h$$

$$17^2 + 5^2 = \frac{25 - 9}{4} = 2h$$

$$(5; 0), (12; 5)$$

$$(5; 0), (-12; -5)$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y = 0$$

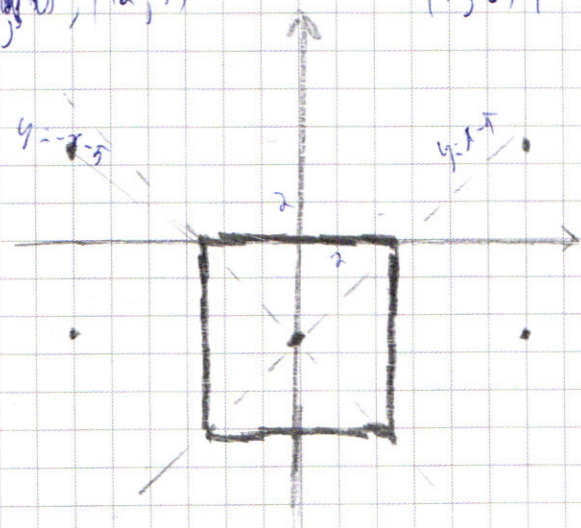
$$x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-x = 5$$





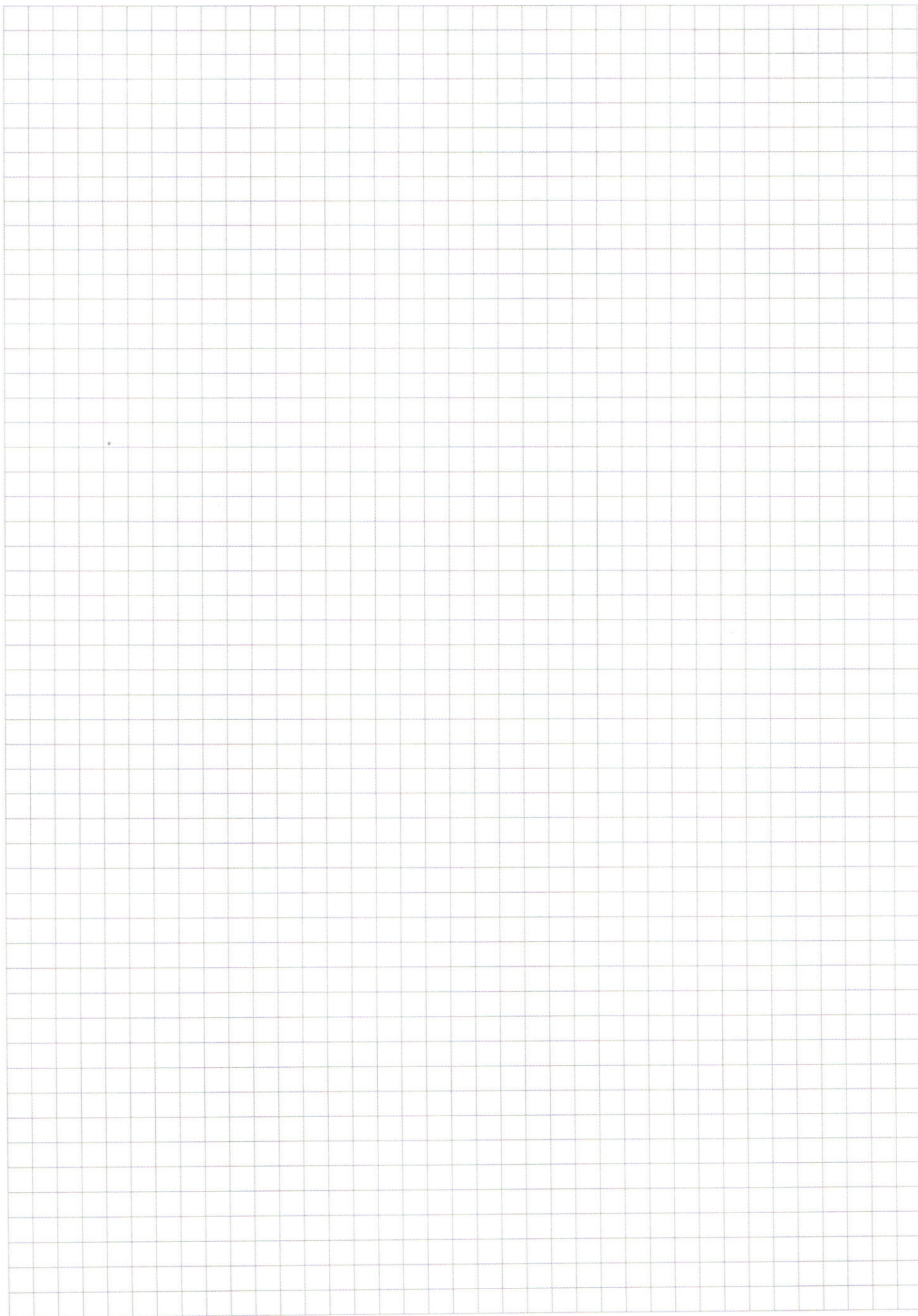
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)