

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (2) как уравнение относительно y :

$$y^2 - (x+4)y + (8x - 2x^2) = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

всегда ≥ 0 значит промежуток от 0 до 1 .

176 Th Buena:

$$y = 2x$$
$$y = -x + 4$$

Теперь обратимся к (1):

~~$x^{-2} \cdot y^{-4} \ln x = y^{\ln(y)} - \ln(x^7)$~~
 ~~$x > 0$~~
 ~~$y/x^7 > 0 \Rightarrow y > 0$~~ ~~no way represent polynomials.~~
 ~~$x^{-2} \cdot y^{-4} \ln x = \frac{y^{\ln(y)}}{y^{\ln(x^7)}}$~~
 ~~$x^{-2} \cdot y^{-4} \ln x = y : x^{-2} \cdot y^{3 \ln(x)} \neq y$~~

$$x^{-2 \ln x} \cdot y = 4 \ln x = y^{\ln(y)} \cdot y = \ln(x^2)$$

$x \geq 0$
 $y \geq 0$ $\Rightarrow y > 0$, тогда равенство равносильно:

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln(x)} = y^{\ln(y)}$$

$$x^{-2 \ln(x)} \cdot \ln(x)^4 \cdot 3 \ln(x) = \ln(x)^4 \ln(y)$$

Тогда т.к. e^x монотонна, то

$$-2 \ln x + \frac{\ln y}{\ln x} \cdot 3 \ln x = \frac{\ln^4 y}{\ln x}$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x + \ln y \cdot 3 \cdot \ln x = \ln^2 y$$

$$\ln^2 y + 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x) = 0$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \ln y = \ln x &\Rightarrow x = y \\ \ln y = 2 \ln x &\Rightarrow y = x^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Получили систему:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ y = x - y \\ y = 2x \end{cases}, \text{ тогда:}$$

$$\begin{aligned} (1) &\begin{cases} y = x \\ y = x - y \end{cases} & (3) &\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - y \end{cases} \\ (2) &\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} & (4) &\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

то ОДЗ лог.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\emptyset$

2) $2x = x \Rightarrow x = 0$ не подходит по ОДЗ

3) $x^2 = x - 4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$, $D = 1 - 16 < 0$, решений нет

4) $x^2 = 2x \Rightarrow x = 2$ $y = 4$
 $x = 0$ $\emptyset$

Подставляем решение. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ Проверим.

$$\left(\frac{2}{2} \cdot \frac{8}{2} \right)^{-\ln 2} = 2^{2(2 \ln 2 - 2 \ln 2)}$$

$$\frac{-10 \ln 2}{2} = \frac{-10 \ln 2}{2} \quad \text{Уравнение}$$

$$16 - 8 + 8 + 16 - 16 = 0 \quad \text{Уравнение}$$

Ответ: $\{x; y\} = \{2; 4\}$

5)



Сфера S касается

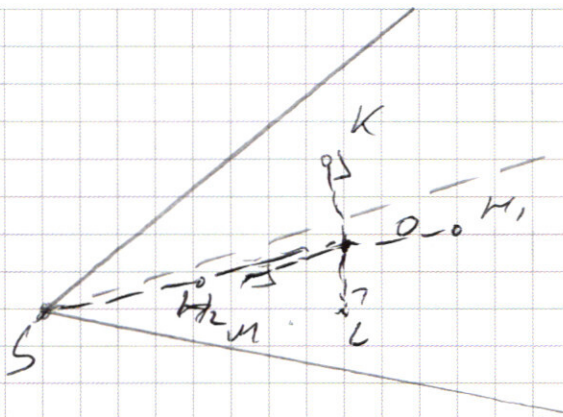
плоскости π в точке O - касательная

сфера S и $\pi \perp SO$;

и следовательно по

опр. 1.12 - нормаль к

π в т.к.



] H_1, H_2 - точки пересечения
сферы (Радиус R) с прямой
SO. α плоскость касания
сферы в некой т. K
 $x \neq H_1, x \neq H_2$

тогда, плоскость $(\alpha) \perp OS$, но еще по усл.
 $\alpha \perp OH_2$, тогда $OS \parallel OH_2$, или $x \neq H_1$,
 $x \neq H_2$, т.е. то что очевидно невозможно
(параллельные прямые пересеклись), тогда
 H_1 и H_2 - точки касания двух плоскостей
с сферой.

Сделаем гомотетию с центром в т. S
 $H_2 \rightarrow H_1$, тогда $\alpha \rightarrow \beta$ (где α - плоскость
касания в H_2 , β - в H_1), по чему:

- т.к. $\alpha \perp OS$, $\beta \perp OS \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
- т.к. $H_2 \rightarrow H_1$, то образ α и ~~образ~~ β
будут касаться в т. K , следовательно.
- образ $\alpha \parallel \alpha$, следовательно, или нет, то
есть одна точка x , то тогда $x' = x \Rightarrow$

$$\frac{SX'}{SX} = 1, \Rightarrow H = id, \text{ но это в нашем случае}$$

очевидно не так.

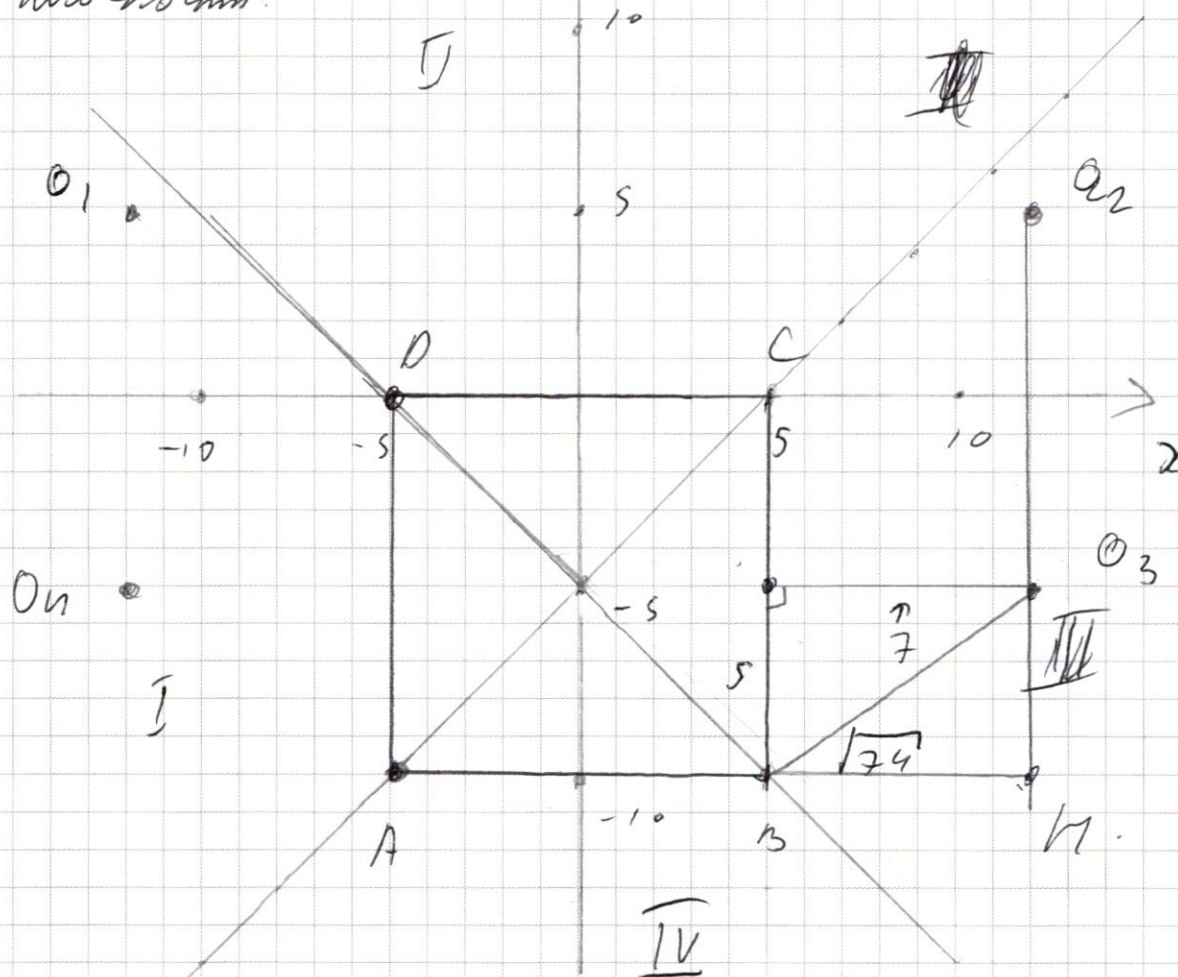
Отсюда значит $\alpha' \parallel \alpha$ $H_1 \in \alpha'$
 $\beta \parallel \alpha$ $H_1 \in \beta$

тогда. $\alpha' = \beta$ (через точку не обязательно на плоскости
проходит одна плоскость $\parallel$ другой) касательная т. H_1 .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ ((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 6) & (2) \end{cases}$$

Построим множество точек задаваемых (1) на координатной плоскости.



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq -5 - x$$

линейные функции.

$$y - x + 5 \geq 0$$

$$y \geq x - 5$$

граничные функции, внутри (область)

или, наоборот, снаружи

отложим, и получим

Среднее значение тригонометрического угла — D ,
найдем коэффициент ~~Гамильтона~~ Гамильтона:

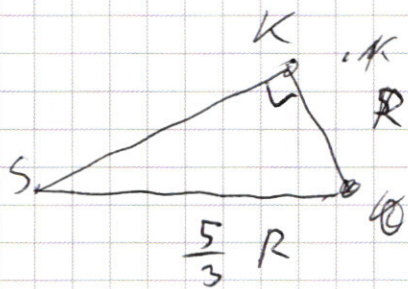
$$k = \frac{S_{H1}}{S_{H2}} = \frac{50 + R}{50 - R}$$

Угол поворота $\Delta \rightarrow \beta$, а тригонометрический
угол перейдет в центр, тогда среднее
перейдет в среднее. Среднее — D , тогда они
попадают и все площади угла считаются, как
попадают коэф. поворота. Тогда

$$k^2 = 16 = \left(\frac{50 + R}{50 - R} \right)^2, \text{ отсюда:}$$

$$\frac{50 + R}{50 - R} = 4; \quad 50 + R = 450 - 4R; \quad 5R = 350.$$

Решим триг. ΔSOK :



$SK \perp OK$, т.к. R радиус
многоугольника.

$$OK = R$$

$$SO = \frac{5}{3} R.$$

$$\text{Тогда } \cos \angle KSO = \frac{R}{\frac{5}{3} R} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Тогда } \angle KSO = \arccos \frac{3}{5}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{3}{5}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что точки $(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$
 $(5; 0)$; $(-5; 0)$; $(5; -10)$; $(5; 10)$
ГМТ принадлежат, значит верно:

$$|5+0+5| + |0-5+5| = 10 \quad (1)$$

$$|-5+0+5| + |0+5+5| = 10 \quad (1)$$

$$|-5-10+5| + |-10+5+5| = |-10| = 10 \quad (1)$$

$$|5-10+5| + |-10-5+5| = |-10| = 10 \quad (1)$$

~~Эти точки~~

Точки $(1), (2) \in \underline{II}$

$(2), (3) \in \underline{I}$

$(3), (4) \in \underline{IV}$

$(4), (1) \in \underline{III}$

, тогда совокупная совокупность
соответствующих точек

прямой принадлежат интересующий нас ГМТ

Теперь найдем locus ГМТ задачи (2)

Это окружность с $R = \sqrt{a}$ и центром в Т.

$(12; 5)$, отсюда отразим относительно
 Ox, Oy , и получим и окружности.

с центрами в Т. $(12; 5)$; $(-12; 5)$; $(12; -5)$;

Эти

Если есть решение, то у заданной есть
прямая, где $a \in [0; 7]$, пересечет т.к.

данный все равно от O_i до стороны AB

7, что видно по рисунку.

При $a = 7$, пересечений ровно 2, одно со стороны O_3 , другое со стороны O_4

O_1, O_2 ещё не "готовы" к соприкосновению

Тогда $a = 7$ подходит.

При $a \in [7; \sqrt{74}]$, окружность с центром O_3 , границей пересечений стороны квадрата, а значит так же постройте и окружность с центром O_4 , тогда a не подходит т.к. количество точек ≥ 4 .

$$AH = 12 + 5 = 17$$

$$O_2 H = 5 \times 10 = 15 \Rightarrow O_2 A = \sqrt{514}$$

При $a \in [\sqrt{74}; \sqrt{514}]$, окр. с центром в т. O_2 имеют ровно 2 пересечения с квадратом, аналогично для т. O_1 , из визуальной геометрической соображений, ясно что полностью совпадения дуга точек не могут иметь, после того как для сторон с которыми пересекаются окр. O_1 не совпадают с набором от окр. $O_4 \Rightarrow$ значит, т. пересечений ≥ 3 , и т.ч. a тоже не подходит.

При $a = \sqrt{514}$, окр. O_3, O_4 не пересекаются с кв. т.к. $O_3 A = \sqrt{5 + 17^2} < \sqrt{592}$, а это значит, противоречие.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

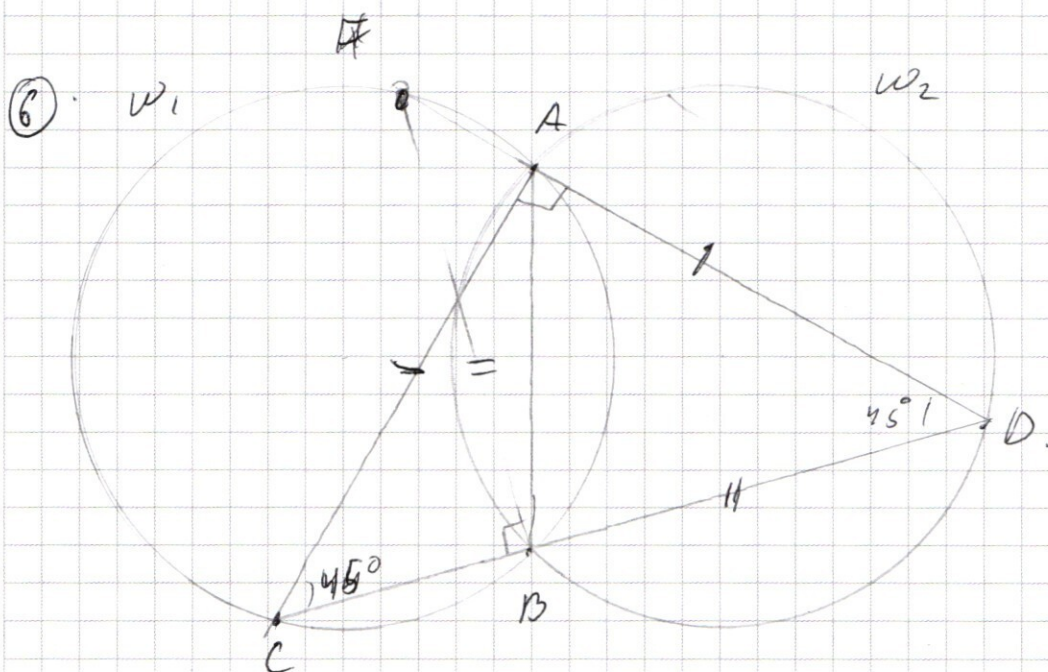
Зато т.А. лежит на Окр. с центром в O_1
и т.В. $\in$ Окр. с центром O ,

Пересечения ровно 2 кас и тред касов
 $a = \sqrt{514}$ - по условию

При $a > \sqrt{514}$ решений не будет т.к.

$\sqrt{514}$ - max расстояние

Отв. $\{7; \sqrt{514}\}$



] $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90 - \alpha$.

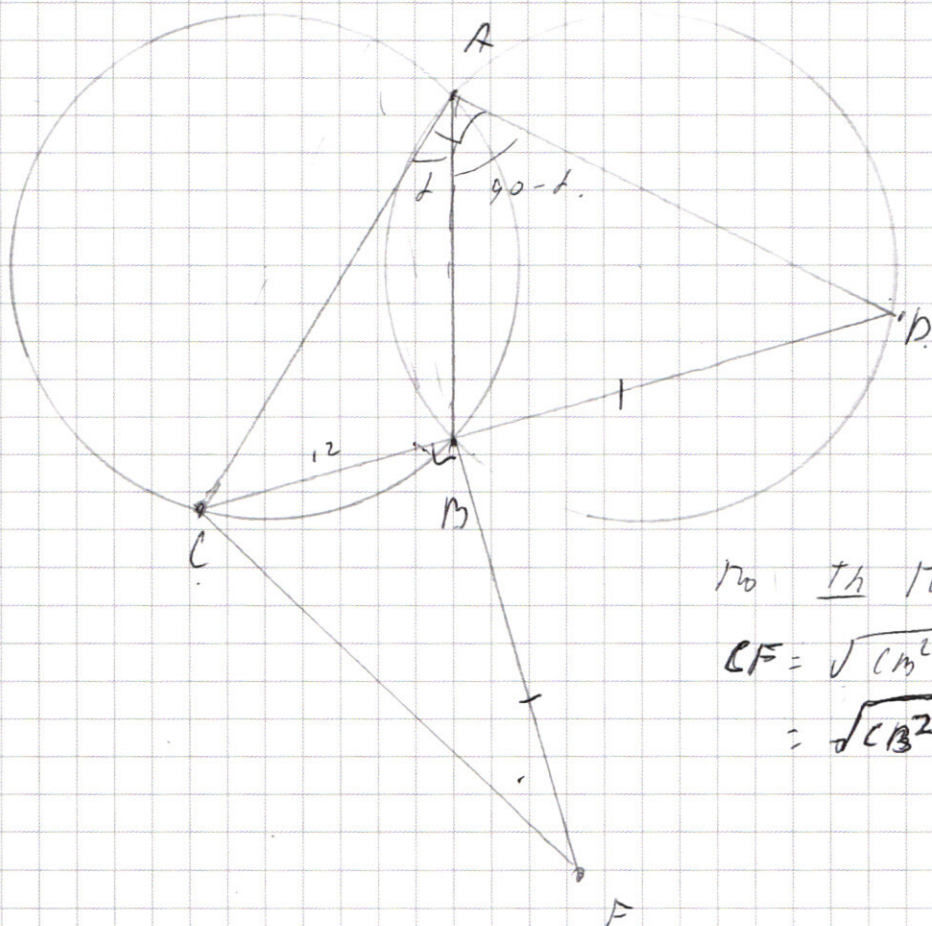
$$R_1 = \frac{AB}{2 \sin \alpha} ; R_2 = \frac{AB}{2 \sin(90 - \alpha)} \quad \text{по Th синусов}$$

По улу $R_1 = R_2$, тогда.

$$\sin \angle = \sin (90 - \angle) = \cos \angle \Rightarrow \angle = 45^\circ$$

Найдем CF:

$$CF = \sqrt{BF^2 + MC^2} = \sqrt{MC^2 + BD^2}, \text{ по укл.}$$



по т. Пифагора:

$$CF = \sqrt{CM^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

] $\angle CAM = \angle$, тогда $\angle BMD = 90 - \angle$

тогда по т. синусов: $\frac{MC}{\sin \angle} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow MC = \frac{AB \cdot \sin \angle}{\sin 45^\circ}$

$$\frac{DM}{\sin (90 - \angle)} = \frac{AB}{\sin (45^\circ)} \Rightarrow DM = \frac{AB \cdot \cos \angle}{\sin 45^\circ}$$

тогда: $CF = \sqrt{\left(\frac{AB}{\sin 45^\circ}\right)^2 (\sin^2 \angle + \cos^2 \angle)} = \frac{AB}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} AB$

Ответ: $\sqrt{2} AB$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $BC = 12$

Тогда по Тх синусов: $\cos \angle = 0,8$

$$\sin \angle = \frac{12}{20} = 0,6, \text{ тогда } AB = 20 \cdot \sin 45^\circ = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$S_{CAB} = \frac{CB \cdot AB}{2} \cdot \sin(135^\circ - \angle)$$

$$S_{CBF} = \frac{CB \cdot BF}{2}$$

$$S_{ABF} = \frac{AB \cdot BF}{2} \cdot \sin(360^\circ - 90^\circ - 135^\circ + \angle)$$

$$\begin{aligned} S_{ACF} &= CB \cdot AB \sin(135^\circ - \angle) + CB \cdot BF + AB \cdot BF \cdot \sin(135^\circ + \angle) = \\ &= 12 \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \angle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \angle \right) + 12 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{16}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \sin(135^\circ + \angle) \end{aligned}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{2}} \left(\frac{10,4}{\sqrt{2}} \right) + 120 + \frac{160}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \angle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \angle \right) =$$

$$= \frac{120 \cdot 10,7 + 120 + \frac{160}{\sqrt{2}} \left(\frac{0,2}{\sqrt{2}} \right)}{2} = 60 \cdot 10,7 + 60 + 50 \cdot 0,1 =$$

$$= 60 \cdot 1,7 + 5 = 107$$

Ответ: 107

$$\textcircled{7} \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} = f(x) \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = g(x) \end{cases}$$

По Транзитивности

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

Если это верно, то y может принимать любое значение из интервала $[f(x), g(x)]$,

Тогда ответом будет $\sum_{g(x)-f(x) > 0} g(x) - f(x)$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= 76 + 2^{33}(x-6) - 2^x - 2^{34} \cdot 3 \\ &= 76 + 2^{34} \cdot 3 + x(2^{33} - 2) - 2^x \end{aligned}$$

При $x < 0$, $x(2^{33} - 2) \leq (2^{33} - 2)$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$

Тогда $g(x) - f(x)$ тоже отрицательно

при $x \in [0; 5]$ $2^{33}(x-6) \leq -2^{33}$, тогда

$$g(x) - f(x) \leq 76 + 2^{33} \cdot 3 - 0 - 0 < 0$$

значит $\forall x \in [0; 5]$ не учитываем.

$x = 6$ равно, т.к. $76 - 12 - 64 = 0$.

Тогда рассмотрим случай $x > 6$

Заметим, что $(g(x) - f(x))' < 0$ очевидно, т.к.

останется только $-2^x \ln 2 \cdot 2^x$, значит функция на каком интервале будет положительна

$[6; 7]$, а потом станет отрицательна, т.к.

$(g(x) - f(x))'$ всегда-то станет < 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $g(x) - f(x)$, при $x = 38$ т.р. отрицательна,
следовательно.

$$76 \times 2^{33} - 76 - 2^{38} = 2^{38} - 2^{38} = 0.$$

при значении $(g(x) - f(x))'$ уже стала < 0 , т.е.
значения при $x = 38 > 0$, тогда и
при всех $x > 38$, $g(x) - f(x)$ отрицательно.
значит мы определили пара границы
справа функции:

$$\sum g(x) - f(x) \quad \varphi(x) = g(x) - f(x)$$

$$6 < x < 38$$

$\{6, 38\}$ не являются т.к. на них значение
 $= 0$.

Ищем сумму, рассмотрим:

$g(x)$

$$\varphi(x) + \varphi(38 - x) = 76 \times 2(2^{32} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} + 76 \times 2(2^{32} - 1)(38 - x) - 2^{38-x} - 3 \cdot 2^{34}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 76 + 4 \cdot 19(2^{32} - 1) - 2^x - 2^{38-x} - 6 \cdot 2^{34} =$$

$$= 76 \times 19 \cdot 2^{34} - 6 \cdot 2^{34} - 2^x - 2^{38-x} =$$

$$= 76 \times 13 \cdot 2^{34} - 2^x - 2^{38-x}$$

Продолжим по всем $x \in [7; 17]$, получим.
 число $\varphi(18)$

Для начала найдем $\sum_{x \in [7; 17]}$:

$$\sum_{x \in [7; 17]} 76 + 13 \cdot 2^{34} - 2^x - 2^{38-x} =$$

$$= 11 \cdot 76 + 11 \cdot 13 \cdot 2^{34} - \sum_{x \in [7; 17]} 2^x + 2^{38-x} =$$

$$= 11(76 + 13 \cdot 2^{34}) - \left(\sum_{x \in [0; 17]} 2^x + 2^{38-x} - \sum_{x \in [0; 6]} 2^x + 2^{38-x} \right)$$

$$= A - (2^0 + 2^{38} + 2^1 + 2^{37} + \dots + 2^{17} + 2^{19}) + (2^0 + 2^{38} + 2^1 + 2^{37} + 2^2 + 2^{36} + 2^3 + 2^{35} + 2^4 + 2^{34} + 2^5 + 2^{33} + 2^6 + 2^{32})$$

$$= A - (1 + 2 + \dots + 2^{38}) + 7(2^0 + \dots + 2^6) + 2^{32}(2^0 + \dots + 2^6) + 2^{18} =$$

$$= A - 2^{39} + 1 + (2^7 - 1)(1 + 2^{32}) + 2^{18}$$

$$\varphi(18) = 76 + 2(2^{32} - 1)18 - 2^{18} - 3 \cdot 2^{34}$$

Тогда:

$$\Sigma = 11(76 + 13 \cdot 2^{34}) - 2^{39} + 1 + 227(2^{32} - 1) + 2^{18} + 76 + 2(2^{32} - 1)18 - 2^{18} - 3 \cdot 2^{34}$$

$$= 12 \cdot 76 + (11 \cdot 13 - 3) 2^{34} + 2(2^{32} - 1)18 + 1 + 227(2^{32} - 1) - 2^{39} =$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 76 + 140 \cdot 2^{34} + 9 \cdot 2^{34} - 36 + 1 + 227(2^{32} - 1) - 2^{39}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= 17 \cdot 76 + 149 \cdot 2^{34} - 35 + 3(2^{32} - 1) + 124(2^{32} - 1) - 2^{39}$$

$$17 \cdot 76 + 149 \cdot 2^{34} + 31 \cdot 2^{34} - 124 - 35 + 3(2^{32} - 1) - 2^5 \cdot 2^{34}$$

$$= 17 \cdot 76 + 180 \cdot 2^{34} - 159 + 3(2^{32} - 1) - 2^5 \cdot 2^{34} =$$

$$= (17 \cdot 76 - 159) + 148 \cdot 2^{34} + 3 \cdot 2^{32} - 3 =$$

$$= (17 \cdot 76 - 162) + 4 \cdot 148 \cdot 2^{32} + 3 \cdot 2^{32} =$$

$$= (17 \cdot 76 - 162) + 2^{32} (3 + 4 \cdot 148) \quad (\equiv)$$

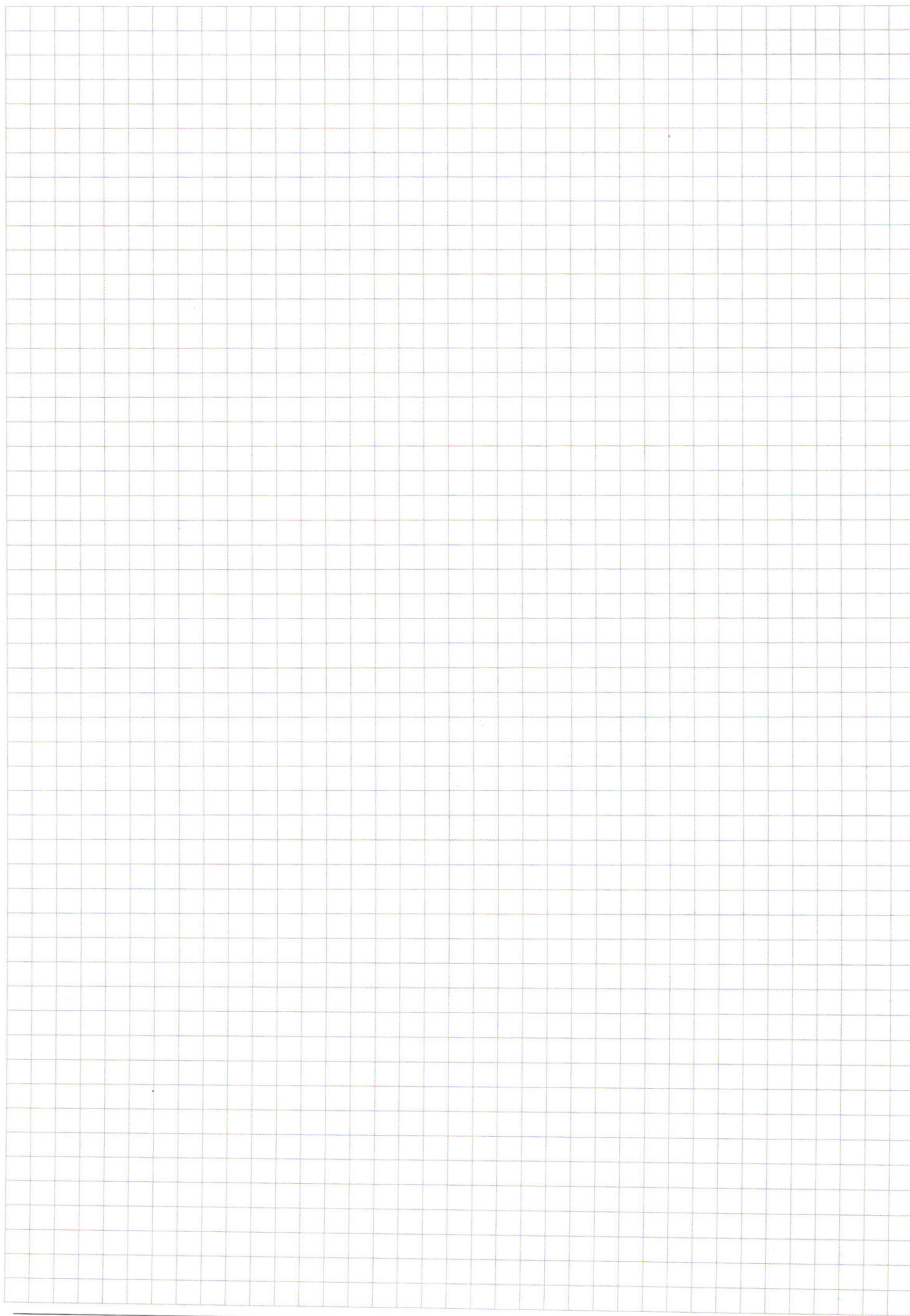
$$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot 76 \\ \hline 102 \\ + 1190 \\ \hline 1292 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1292 \\ - 162 \\ \hline 1130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ \cdot 4 \\ \hline 592 \\ + 3 \\ \hline 595 \end{array}$$

$$1130 + 595 \cdot 2^{32}$$

$$0 + 64m: 1130 + 595 \cdot 2^{32}$$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 15
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①
$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 98} \\ \underline{9} \\ 26 \overline{) 1029} \\ \underline{26} \\ 16 \overline{) 1029} \\ \underline{16} \\ 8 \end{array}$$
 , значит $9261 = 7^3 \cdot 3^3$

Тогда у нашего восьмизначного числа в раз-
ряде есть 3 цифры 7, значит $a_i = 7^3$, но $a_i < 10$, тогда есть 3 $a_i = 7$, но
 $a_i < 10 \Rightarrow a_i = 7$

00000800 C_8^3 - кол-во способов расположить 7.

Теперь расположим 3, либо они попадут в
3 разных разряда, 3, 3, 3, тогда кол-во
способов C_5^3 , либо 2 тройки соседствуют
в одной 9, тогда их выбрать можно 5
способами и оставшиеся 3 - 4. Все остальные
цифры одна или две единицы.

$$C_8^3 \cdot (5 \cdot 4 + C_5^3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(20 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right) =$$

↑ кол-во чисел ↑
поставить 7 1... поставить 3

$$= 8 \cdot 7 (20 + 10) =$$

$$= 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680 таких чисел.

$$2) -\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin(7x) \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$-2 \sin(7x) \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x + \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

Отсюда:

$$\cos 2x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Решаем пока, что (2):

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$2 \sin^2 7x = \cos^2 2x + \sin^2 2x$$

$$2 \sin^2 7x - 1 = \cos 4x$$

$$\cos 14x = 2 \sin^2 7x$$

$$\cos \sin(14x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\cos 44x$$

$$\text{Тогда } 14x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$14x - \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Отсюда } 10x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\sqrt{2}}{4})$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 18

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$18x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{20} + \frac{\sqrt{c}k}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{12 \cdot \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}k}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\cos$ и $\sin$ ограничены, $\sqrt{c} \sin 7x$ и $\sqrt{c} \cos 4x$ тоже ограничены, значит $\sqrt{c}$ тоже ограничен.

Попытка 2:

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) = \sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) = \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Тогда ур-е примет вид:

$$\sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

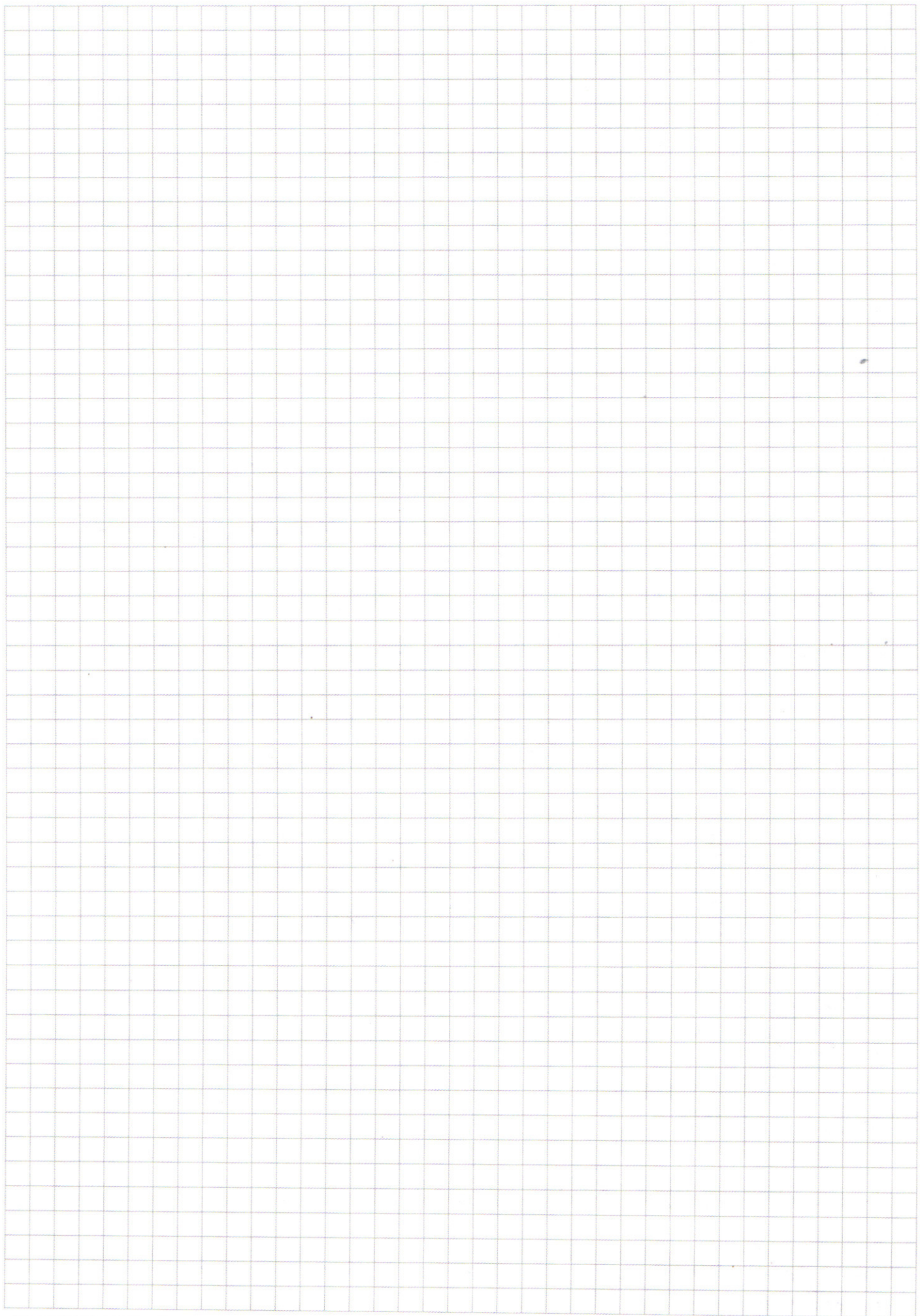
$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

Отсюда, можно получить с помощью формулы суммы синусов:

$$2 \sin 7x \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

Что дальше делать не знаю, чтобы написать окончательного не знаю.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(4x+5x) = \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos \frac{9\pi}{2} = 1014$$

$$2 \cos 4x \cos 5x$$

$$\cos 9x + \sin 9x$$

$$\sin 5x - \cos 5x$$

$$e^{ix}$$

$$\cos x$$

$$\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$e^{4ix} + e^{-4ix}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\cos(2x) - \sin(2x) \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\sin 2x = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \cos 5x + 2 \sin(2x) = 0$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\frac{e^9 + e^{-9}}{2i}$$

$$(3) (x^2 y^4)^{-\ln x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{50 - R}{50 + R} = \frac{1}{16} \quad \begin{cases} 16 \cdot 50 - 16R = 50 + R \\ 75 \cdot 50 = 17R \end{cases}$$

$$\cos 9x = \cos(4x + 5x) = \cos 4x \cos 5x + \sin 4x \sin 5x$$

$$\sin 9x = \sin(4x + 5x) = \sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 4x \sin 5x = \cos 5x$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x (\cos 5x + \sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x) = 0$$

$$\sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \cos 4x (\sin 5x + \cos 5x)$$

$$2 \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

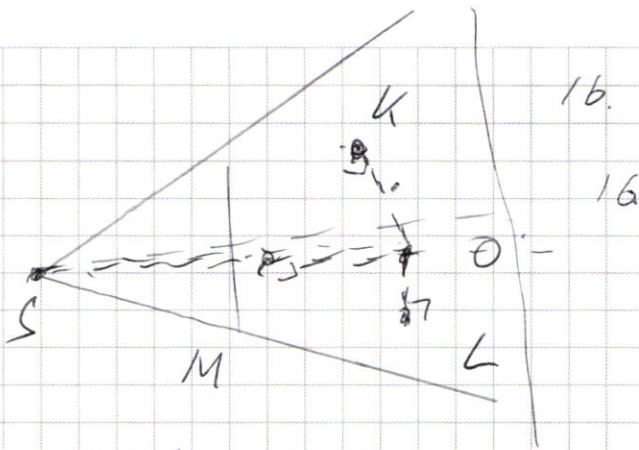
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos$$

$$4 \sin^2 7x = 7 + 2 \sin 4x$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$76 < (2 \cdot 2^{32} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} \geq 0$$

$$76 < 2^{33}(x - 6) - 2x - 2^x > 0$$

$$26 + 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 38 - 2^x - 2^{38-x} - 6 \cdot 2^{34}$$

$$(1, 2) \quad (x = 34)$$

$$2^6$$

$$2 \cdot 2^{32} - 2^x - 2^{38-x}$$

$$x = 38$$

$$76 + 2^{33} \cdot 2^5$$

$$2 \cdot 2^{32} - 2^x - 2^{38-x}$$

$$2 \cdot 38 \cdot 2^{32} - 2^x - 2^{38-x} - 6 \cdot 2^{34}$$

$$19 \cdot 2^{33} \cdot 2^{34} - 2^x - 2^{38-x}$$

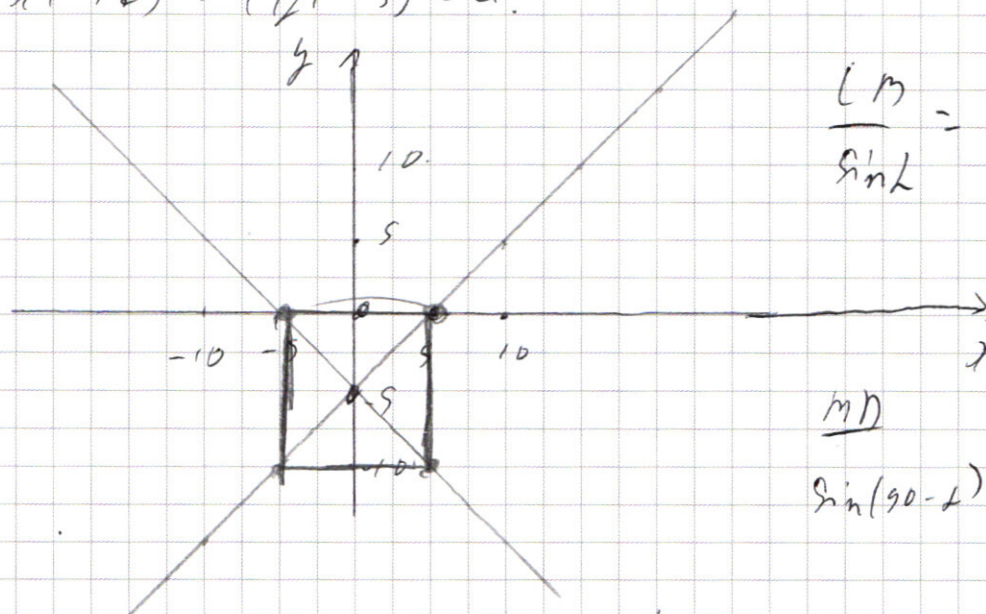
$$76 < 2^{32}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot (38 - x) - 2^{38-x} - 3 \cdot 2^{34}$$

5) $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$(x+1-12)^2 + (y-1-5)^2 = 0$



$\frac{CM}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin 45^\circ}$

$\frac{MN}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AM}{\sin 45^\circ}$

$y+x+5 + y-x+5 = 10$

$y = 0$

$x+y+5 > 0$

$x > y - 5 = -x$

$y-x+5 > 0$

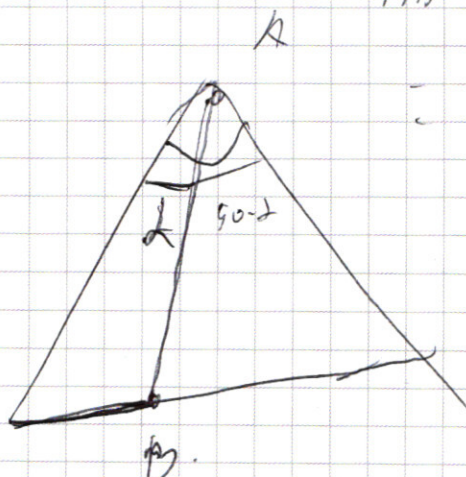
$y > x-5$

$x=5; y=-10$

$MN^2 + CM^2$

$= \frac{AM^2}{2}$

$25 < 49$



$270 - 135$

(135)

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ 2 \\ \hline 414 \\ 12 \\ \hline 189 \end{array}$$

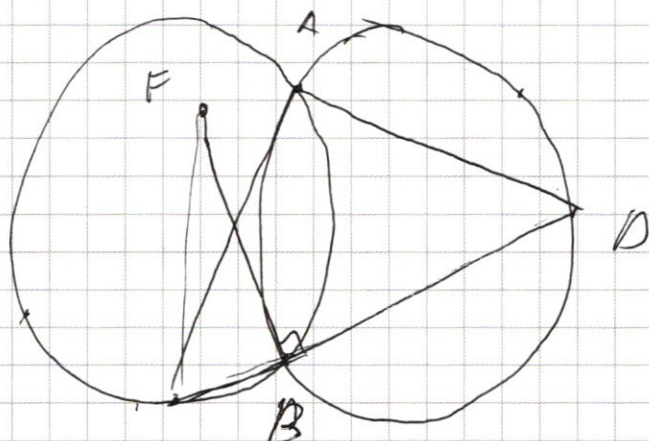
$$\begin{array}{r} 4 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$\frac{MA}{\sin 45} = \frac{CM}{\sin \alpha}$

$CM = \sin \alpha \cdot \frac{MA}{\sin 45^\circ}$

$MN = \cos \alpha \cdot \frac{BA}{\sin 45^\circ}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

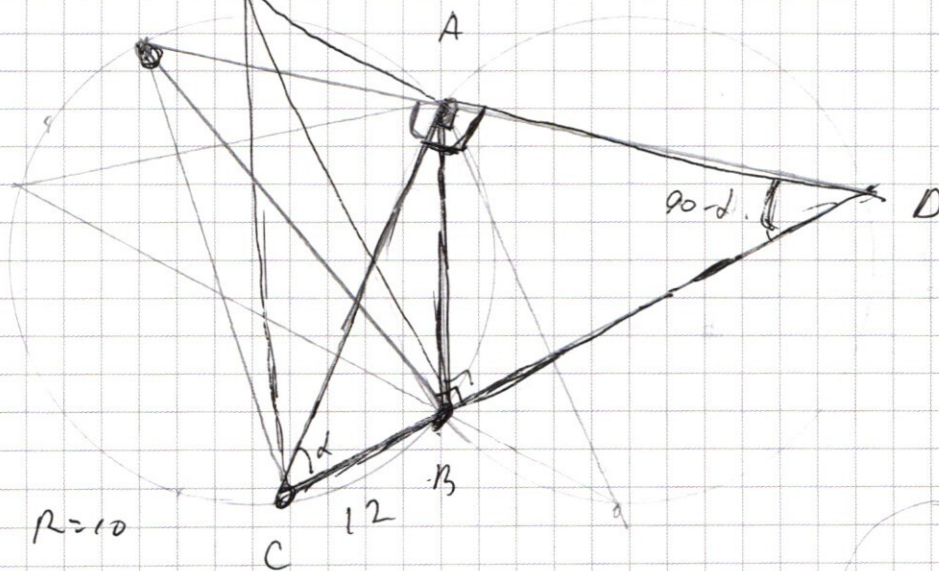


$$CF = \sqrt{FB^2 + CB^2} = \sqrt{BD^2 + CB^2}$$

$$R = 10$$

$$\sqrt{CD^2 - 2CB \cdot BD}$$

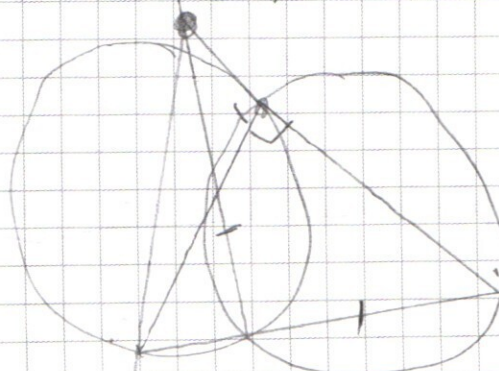
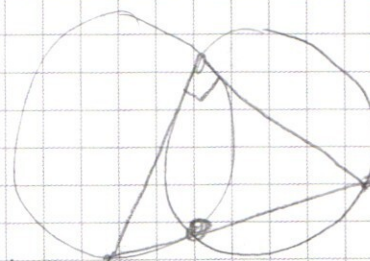
$$\sqrt{CA^2 + AD^2 - 2CB \cdot BD}$$

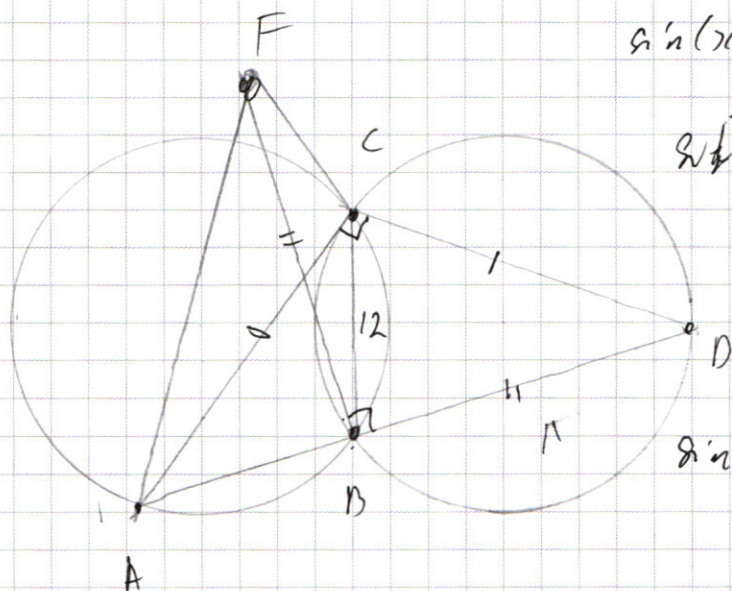


$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = 45^\circ$$

76 + 2/232





~~cos~~

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

" "

a b

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$2 \sin(7x) \cos(2x)$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 026 \\ \underline{18} \\ 81 \end{array}$$

$$1029.9 = -2 \sin(7x) \sin(2x)$$

$$9.3 \cdot 343$$

$$7.49 \cdot 2 \sin(7x) (\cos(2x) - \sin 2x)$$

$$= \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\begin{array}{c} \boxed{3, 7} \\ \swarrow \searrow \\ 00000000 \end{array}$$

$$\boxed{3^3 \cdot 7^3}$$

$$= 2 \cos(7x)$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ \underline{3} \\ 168 \end{array}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{-2} \cdot y^{3 \ln(x)} = y.$$

$$a^{\ln b} = b^{\ln a}.$$

$$a^{\ln a}$$

$$x^2 - 2x^2$$

$$\sin x + \cos x.$$

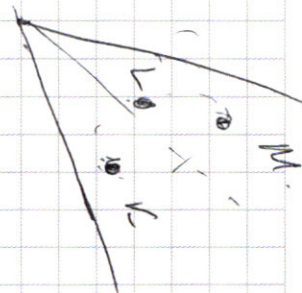
11

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right)$$

x

$$\ln b^c$$

$$a = b = 0.$$



$$\sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 + 3 \ln(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

$$x^{-2} \cdot y$$

$$3 \ln^2(x) = \ln(x) + 2 \ln y$$

$$-2 = \frac{-2 \ln y}{\ln x}$$

$$x^{\ln x}$$

$$-2 \frac{\ln y}{\ln x} + 3 \ln(x) = 1$$

$$3 \ln^2(x) - \ln(x) - 2 \ln(y) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-2 \ln(x^2)}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-2 \ln(x^2)} \quad \parallel \quad \frac{-2 \ln x}{x} \quad \ln y \cdot 3 \ln x \quad \ln y \cdot \ln y = 11$$

$$2. \quad \ln(2x \sin(x + \sqrt{t})) = -2 \ln x + \frac{\ln 4}{\ln x} + 3 \ln x = \ln$$

$$-2 \ln x + 3 \ln y = \frac{\ln y}{\ln x}$$

$$\sin(9x + \frac{\sqrt{t}}{4}) + \sin(5x - \frac{\sqrt{t}}{4}) = \cos 4x \quad -2 \ln^2 x + 3 \ln y \ln x = \ln^2 y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln y \ln x + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x)$$

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$\frac{4x + \frac{\sqrt{t}}{2}}{2}$$

$$\sin x = \sin y$$

$$n = 1 -$$

$$x = y + 2\sqrt{t}$$

$$x = \sqrt{t} - y = 2\sqrt{t}K$$



$$\sin(x) = \sin(\sqrt{t} - x)$$

$$\sqrt{t} \sin(x + \frac{\sqrt{t}}{4})$$

$$\sqrt{t} \sin(9x + \frac{\sqrt{t}}{4})$$

$$\sqrt{t} (\sin(5x - \frac{\sqrt{t}}{4}))$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sin 5x = \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cos 5x$$

$$\sin(5x - \frac{\sqrt{t}}{4})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$x^{-2} y$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2) + \ln x}$$

$$-(2x^2 + 8x)$$

$$-2(x^2 + 4x)$$

$$x^2 y^4 = y^{\ln(y) - 2\ln x}$$

$$y^2 - 4y = 2x^2 - 8x + 4 + xy$$

$$y^2 - 4y + 4 = 2x^2 - 8x + 4 + xy$$

$$(y-2)^2 = (x+2)^2 - xy$$

$$y_1 + y_2 = x + 4$$

$$y_1 \cdot y_2 = 4x - 2x^2$$

$$y_1 = 2x + 4$$

$$y_2 = -x$$

$$(xy - 2)(x + x - 4) - xy = 0$$

$$y^2 - (x+4) \cdot y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x^2 + 4)^2$$

$$x^2 y^{-4 \ln x} = y^{2 \ln x}$$

$$x^{-2} = y^{1-3 \ln(x)}$$

$$y^2 - (x+4)y + (8x-2x^2) = 0$$

$$2 \sin 2x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$D = x^4 + 8x + 16 - 32x + 16x^2 =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16$$

$$(3x-4)^2$$

$$2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + 4 \sin 4x$$

$$2 \sin^2 x = 1 + \sin$$

$$\frac{7124 + 3x - 4}{2}$$

$$\frac{x + 4 - 3x + 7}{2}$$

$$(2x)$$

$$- 7x + 4$$

$$(-x + 4)$$

$$\cos 94x$$

$$\sin(14x + \frac{\pi}{2}) =$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y) - \ln(x^2)}$$

$$y^{\ln(x^2)}$$

$$x^{-2} = y^{1-3 \ln(x)}$$

$$x^2 y$$

$$x^{-2 \ln x}$$

$$y^{-4 \ln x}$$

$$y^{\ln(x^2)}$$

$$= y$$

$$x^2 = y^{3 \ln(x) - 1}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot y^{2 \ln(x) - 4 \ln(x)} = y$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot y^{3 \ln(x)} = y$$

$$x^2 \cdot (x)^{-3 \ln(x)} = x$$

$$x^{-2} \cdot y^{3 \ln(x)} = y$$