

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $abcdefghi = x$
 $abcdefghi = 9261$

$9261 \div 3 = 3087$
 $3087 \div 3 = 1029$
 $1029 \div 3 = 343$
 $343 \div 7 = 49$
 $49 \div 7 = 7$
 $7 \div 7 = 1$
 $1 \div 1 = 1$

$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

$27 \cdot 49 \cdot 7$

$49 \times 27 = 1323$
 $1323 \times 7 = 9261$

$3 \leftarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $7 \leftarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$
 $1 \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$1 \ 1 \ 2 \ 3$
 $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$

$4!$

$a^{\log_a b} = b$

2) $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 2 \ln x}$

$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$

$\frac{x^{-2 \ln x}}{y^{2 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$
 $y^2 - (x+4)y - (2x^2 - 8x) = 0$
 $D = (x+4)^2 + 4(2x^2 - 8x) =$
 $= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$
 $= 9x^2 - 24x + 16$

1 ч. 2 ч. 3 ч. 4 ч. 5 ч. 6 ч. 7 ч. 8 ч.

3 вар. 3 вар. 3 вар. 3 вар. 3 вар. 3 вар. 3 вар. 3 вар.

1 3 вар. 2 вар.

7 7 7 3 3 3 1 1

$$35 \overline{) 17,5}$$

Плюс 1-я единица:

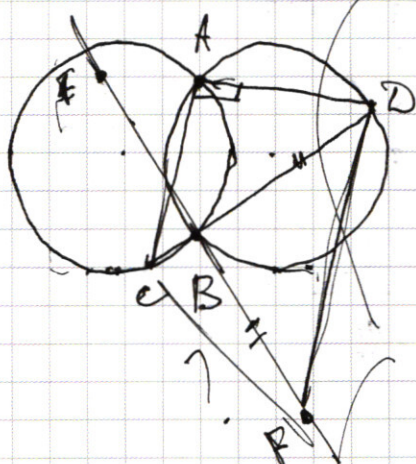
если 2-я единица: 7 вариантов.

$$2 \cdot \overbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}$$

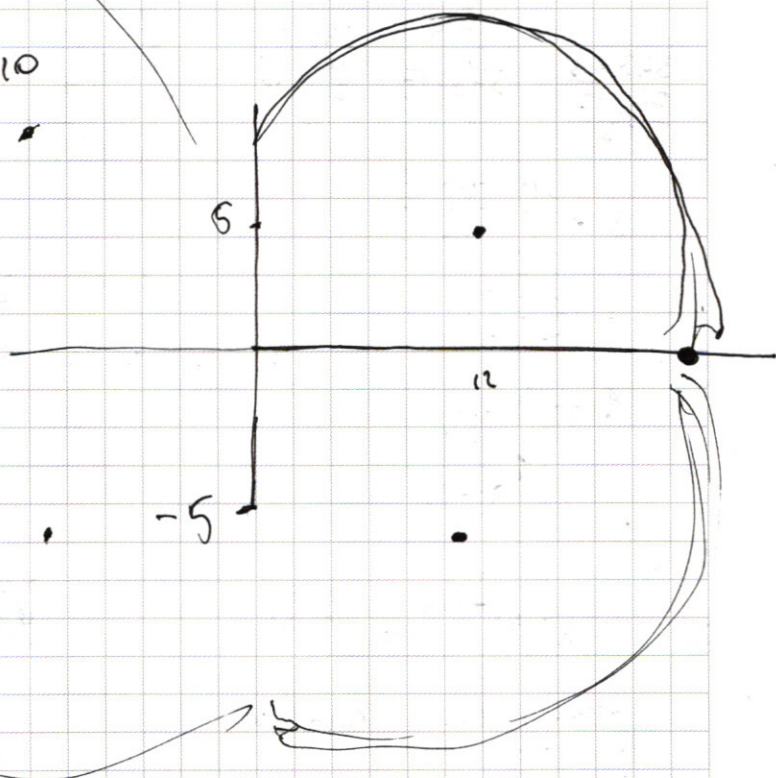
$$56 \cdot 30 \cdot 4 = 56 \cdot 120$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 120 \\ \hline 112 \\ + 56 \\ \hline 6720 \end{array}$$

(18)



$r=10$



$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

или

$$y=0$$

$$144 + 25 = 169$$

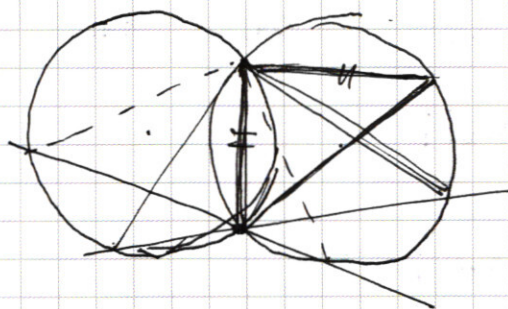
или

$$x+y \geq 5$$

$$y-x \geq -5$$

$$y \geq 5-x$$

$$y \geq x-5$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x$$

$$2^x =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos 9x - \cos$$

$$c9x - c5x - \sqrt{2}c4x + s9x + s5x = 0$$

$$\frac{c4}{b} \cdot \frac{c5}{a} - \frac{s4}{d} \cdot \frac{s5}{c} - \frac{c5}{a} - \sqrt{2} \frac{c4}{b} + \frac{s5c4}{d} + \frac{c5s4}{a} + \frac{s5}{c} = 0$$

$$ab - cd - a - \sqrt{2}b + bc + ad + c = 0$$

$$a(b+d+\frac{c}{a}) - c(d-b+\frac{a}{c})$$

$$(xy^2)^{-2\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(xy^2)^{-2\frac{\log y x}{\log e}} = x^{\frac{2\log y x}{\log e}} \cdot \left(y^{\log y x}\right)^{\frac{-4}{\log e}}$$

$$\frac{-2\ln x}{\ln(\frac{y}{x^2})} = \frac{y}{xy^2} = \frac{1}{xy}$$

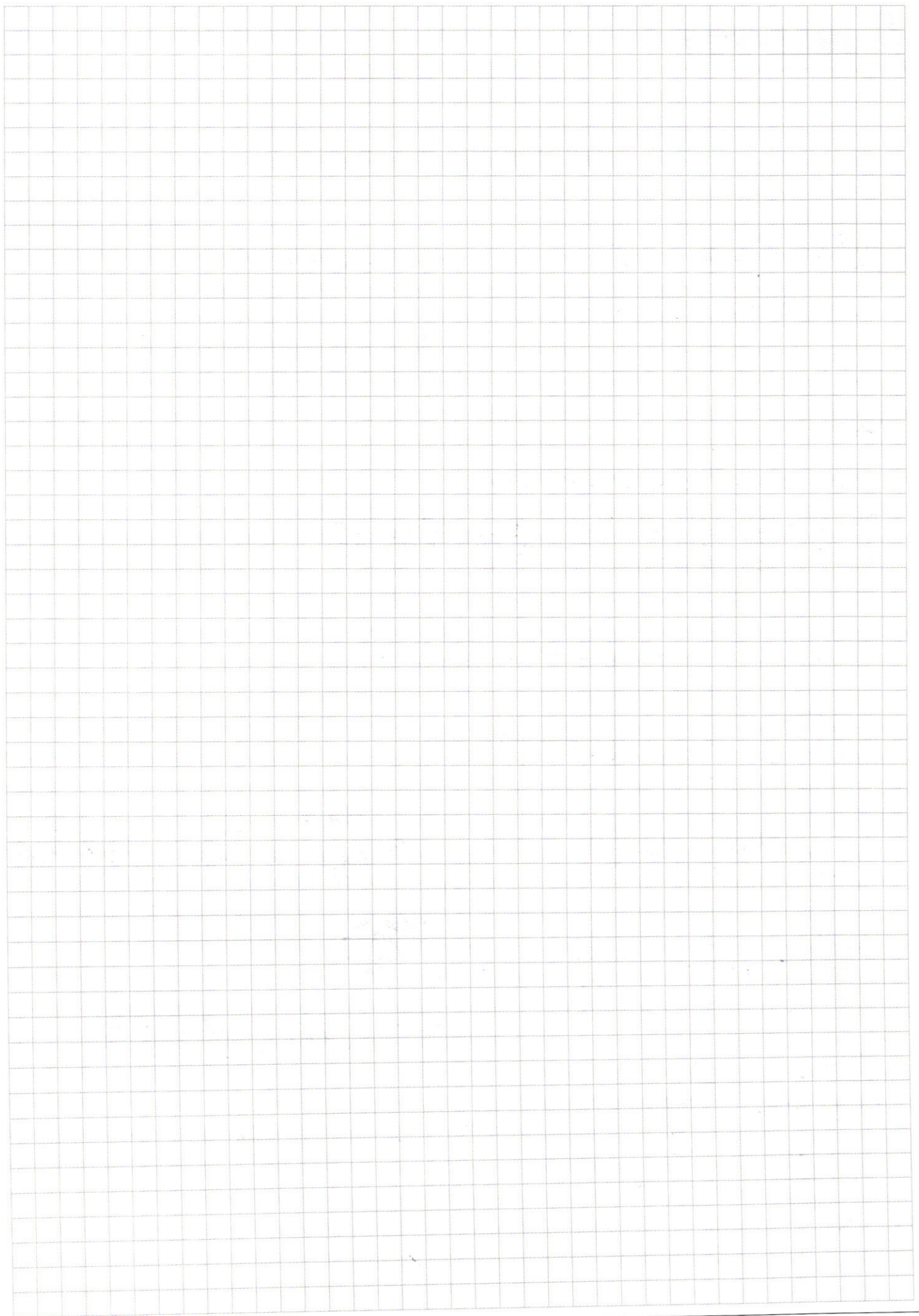
$$= x^{\frac{-2\log y x}{\log e}} \cdot x$$

$$x^{-2\ln x} \cdot x^{\frac{-4}{\log e}} = x^{-2\ln x} \cdot x^{-4\ln y}$$

$$\frac{-2\ln x}{\ln y - 7\ln x} = \frac{1}{xy}$$

$$\frac{x^{-2\ln x}}{x^{4\ln y}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$$x^{-2\ln x - 4\ln y} = y^{\ln y - 7\ln x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y = -5 \quad y-x = -5$$

$$y = -x-5 \quad y = x-5$$

$$x-y+5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$x = 5$$

$$-x-5$$

y

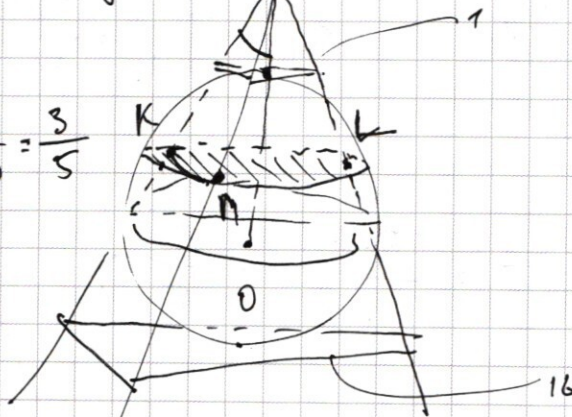
$$y = x+5$$

$$\sqrt{2 \cdot 100 \cdot 2} = 20$$

$$BF = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

сн

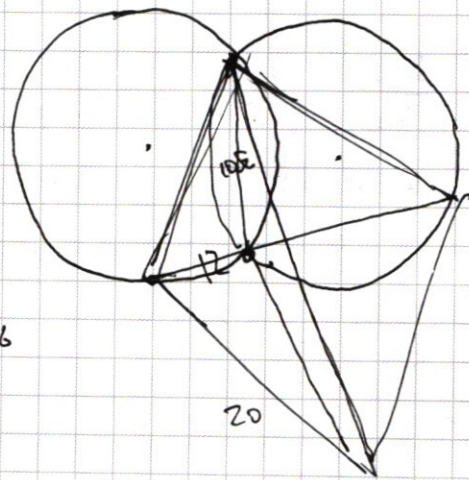
$$\cos DCF = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right) = \cos DCF = \frac{3}{5}$$

$$ACF = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3}{5} \quad \arcsin \frac{4}{5}$$

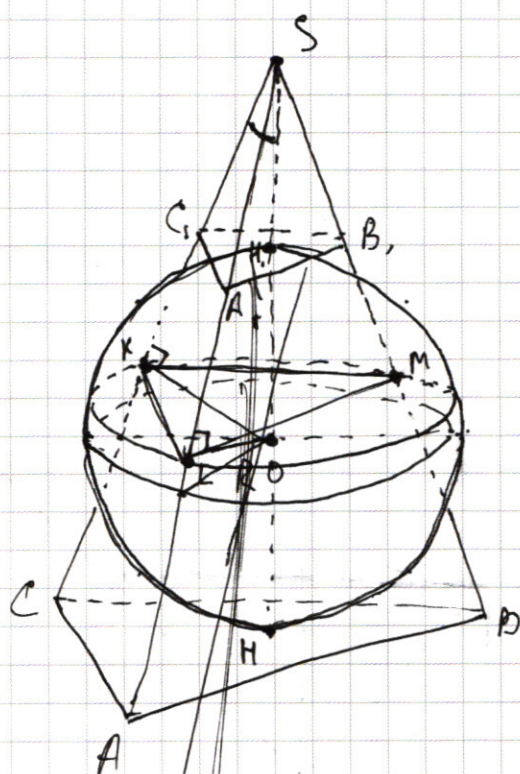
$$\sin ACF = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{4}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5}$$



$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 7 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{1}{10} \cdot 1452 \cdot 752 =$$

$$14 \cdot 7 \cdot 2 = 28 \cdot 7 =$$



$$SO \perp (A, B, C) \Rightarrow (ABC) \parallel (A, B, C)$$

ограничен одной гр. улам

$$\triangle ABC \hookrightarrow A, B, C; k = 4$$

$$S_{\text{д.с.}} = 1$$

$$S_{ABC} = 16$$

$$\text{выс } SH = d$$

$$d + 2R = 4d$$

$$d = \frac{2}{3}R$$

$$SO = d + R = \frac{2}{3}R + \frac{3}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$KO = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{SK}{SO} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$SK = \frac{4}{5}SO = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3}R = \frac{4}{3}R$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{SC}$$

$$SC = \frac{d}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{5}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}R = \frac{5}{6}R$$

$$\cos d = \frac{SK}{SO} \quad SK = SO \cos d$$

$$\cos d = \frac{SK}{SC}$$

$$\frac{\frac{5}{6}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8}$$

$$6 \cdot 4 = 256$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс



ВАРИАНТ 7

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
- 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

zagora 1

Разложим число 9261 на простые множители:

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3087} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 31029} \\ \underline{31029} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 343} \end{array}$$

$$343 \overline{) 749}$$

$$49 = 7 \cdot 7$$

Исходные цифры восьмизначного числа: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1. X

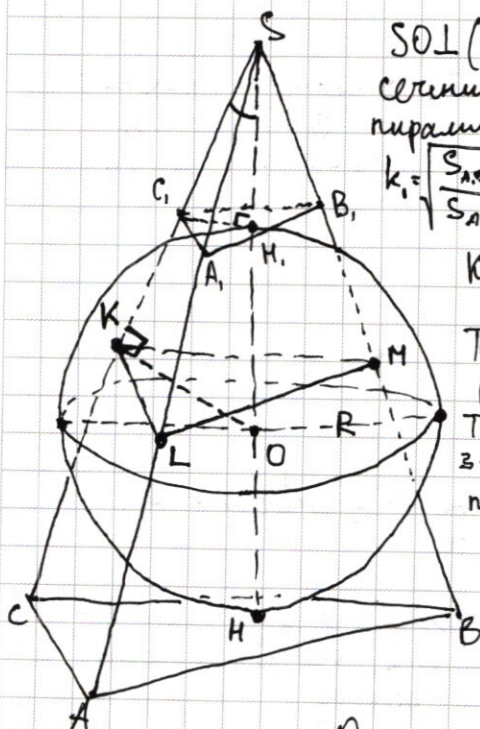
Для первой единицы есть 8 вариантов расстановки в числе.
Для второй единицы 7 таких вариантов.
Далее вариативность числа определяется расстановкой трёх 3 и
трёх 7 в шестизначном числе.

Для первой 7 есть 6 вариантов расположения. Для второй - 5.
Для третьей - 4. Положение троих определяется однозначно

Искомое число $x = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

Ombes: 6720

Задача 4.



$SO \perp (ABC); SO \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. Так как $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и сечение ограничено одним трёхгранным углом, все элементы пирамиды SA, SB, SC подобны эл-м пир-ды $SABC$, с коэф. подобия $k_1 = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$. Пусть $SH = d$. Тогда $d + 2R = 4d$; $d = \frac{2}{3}R$

$$KO = R; SO = d + R = \frac{5}{3}R. \angle KSO = \arcsin\left(\frac{KO}{SO}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

Так как K, L, M — точки касания $\triangle PQR$ угла с вершиной O , то $(KLM) \perp OS \Rightarrow (KLM) \parallel (ABC) \Rightarrow \triangle KLM \sim \triangle ABC$

Так как $(KLM) \parallel (A, B, C)$ и сечения ограничены отцами 3-го узла, элементы пирамиды SA, B, C , подобны элементу пирамиды $SKLM$, $K_2 = \frac{S_{ABC}}{S_{KLM}}$

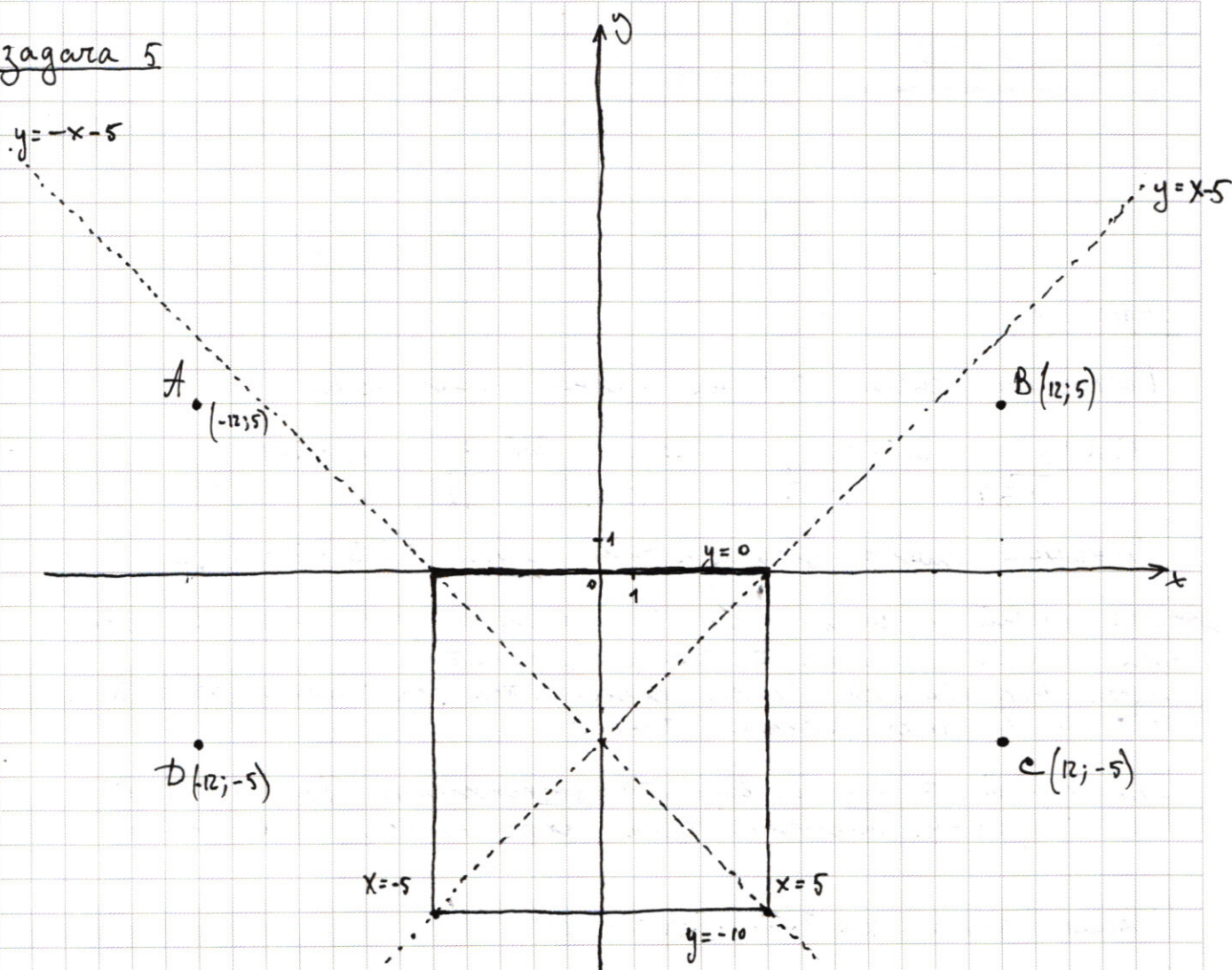
$$\cos \angle KSO = \frac{SO}{SK} = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = \frac{4}{5} \quad SK = SO \cos \angle KSO = \frac{5}{3} R \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3} R$$

$$SC_1 = \frac{d}{\cos 2KSO} = \frac{2/3R}{4/5} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} R = \frac{5}{6} R, k_2 = \frac{SC_1}{SR} = \frac{5}{8}$$

$$S_{KLM} = \frac{S_{A,B,C}}{k^2} = 1 \cdot \frac{64}{25} = \frac{64}{25} = 2,56$$

Ornber: $\angle KSO = \arcsin(\frac{3}{5})$; $S_{KLM} = 2,56$

задача 5



$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1). Нули его модулей: $x+y=-5$ и $y-x=-5$

Раскроем модули:

$$\begin{aligned} x+y &= -5-x & y-x &= -5 \\ y &= -5-x & y &= x-5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y \geq x-5 \\ y \leq -5-x \end{cases} : x+y+5 + y-x+5 = 10 \Leftrightarrow y=0$$

$$\begin{cases} y \leq x-5 \\ y \geq -5-x \end{cases} : -x-y-5 - y+x-5 = 10 \Leftrightarrow y=-10$$

$$\begin{cases} y > -x-5 \\ y < x-5 \end{cases} : x+y+5 - y+x-5 = 10 \Leftrightarrow x=5$$

$$\begin{cases} y < -x-5 \\ y > x-5 \end{cases} : -x-y-5 + y-x+5 = 10 \Leftrightarrow x=-5$$

Нанесем эти срезы на график

Уравнение (2) представляет собой сумму квадратов радиусов $\sqrt{a}$, с центрами в точках A, B, C и D (см. график), расположенных на координатных осях (включая точки пересечения с осями)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

Рассмотрим все радиусы R , при которых получится ровно два пересечения с полувыпуклостью на графике квадрата:

- При $R = 7$ касаясь окружности с центром в C пересечётся в $(5; -5)$, с центром в D — в точке $(-5; -5)$, а с центрами в A и B не пересечётся
- При $R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ касаясь окружности с центрами в C и D перес. в $(0; 0)$ и $(0; -10)$, а с центрами в A и B в $(0; 0)$.

В остальных случаях наблюдается либо 0 пересечений, либо 4,

Плюс как $R = \sqrt{a}$, то при $R = 7$ $a = 49$

при $R = 13$ $a = 169$

Ответ: $a = 49$, $a = 169$

Задача 3

$$(xy^2)^{-2\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\begin{aligned} (xy^2)^{-2\ln x} &= x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = x^{-2\ln x} \cdot x^{\frac{-4}{\log_3 e} \log_3 x} = \\ &= x^{-2\ln x} \cdot x^{-4\ln y} = x^{-2(\ln x + 2\ln y)} \end{aligned}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

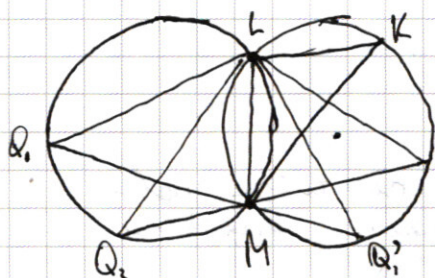
$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$y = \frac{(x+4) \pm \sqrt{(x-4)(9x+4)}}{2}, x > 4$$

задача 6

- а) Рассмотрим две одинаковые окружности, пересекающиеся в двух точках (пусть L и M). Проведем через M две прямые, пересекающие окружности в 4 точках (см. рис.).

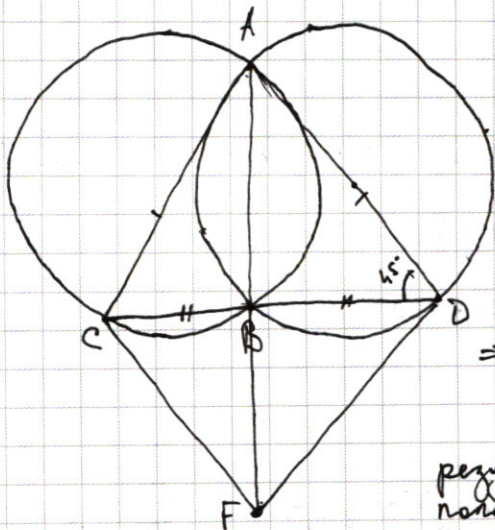


пересекающие окружности в 4 точках (см. рис.).

$\angle LQ_1M = \angle LQ_2M = \angle LQ_1'M = \angle LQ_2'M$, т.к. они опираются на одну дугу. Очевидно, что получившиеся треугольники $\triangle Q_1LM$ и $\triangle Q_2LM$ подобны и оба равнобедренными.

Начнем приближать точку Q_2 к M , когда Q_2 совпадет с M , мы получим равноб. треугольник $\triangle KLM$, $\angle MLK = \angle Q_1LQ_1' = \angle Q_2LQ_2'$.

В случае нашей задачи (а эти случаи аналогичны) этот угол равен 30° . Тогда AB равен катету равноб. треугольника, где гипотенуза - диаметр: $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d = 10\sqrt{2}$.

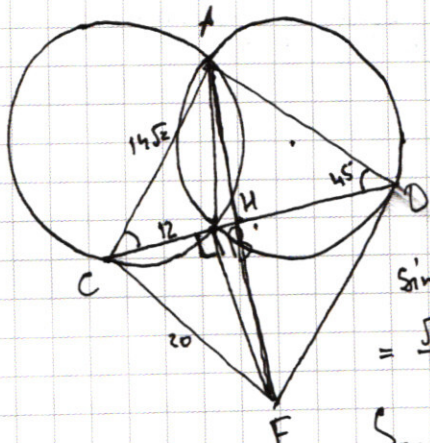


Так как любая прямая, проходящая через B и пересекающая окружности в 2 точках, даст подход для нашего построения, выберем ту, которая перпендикулярна AB . (Подходит т.к. удовлетворяет условию задачи).

Тогда $\triangle ACD$ прям. и равноб.; AB - высота $\Rightarrow AB$ - медиана; $\angle CAB = 90^\circ \Rightarrow CB = BD = AB = 10\sqrt{2}$
 $BF = BD$ по усл.

$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{2AB^2} = d = 20$. Такой же результат для CF получится и для любой другой перпен. к AB .

б)



$$CB = 12 \quad CF = 20 \quad BF = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 = BD \quad CD = 12 + 16 = 28$$

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = 14\sqrt{2}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{4}{5} \quad \cos \angle BCF = \frac{CB}{CF} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle ACF = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \angle BCF \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \angle BCF + \cos \frac{\pi}{4} \sin \angle BCF = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 196$$

Ответ: а) $CF = 20$ б) $S_{ACF} = 196$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$$\frac{x^{-2\ln x}}{y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x} \cdot y^{3\ln x}}$$

$$a^{\log_a a} = \frac{1}{a^{\log_a a}}$$

$$a^{(\log_a b)^{-1}}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(4x+5x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(4x+5x) + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \sin 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - \sin 4x - 1)$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) - \sin 5x (\sin 4x - \cos 4x - 1)$$

$$2^4 = 4^2$$

$$2^{\log_2 5} = 5^{\log_2 5}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$2^{\log_2 x} = 3^{\log_3 x}$$

$$y^2 - xy \cdot y^2 - (x+4)y - (2x^2 - 8x) = 0 \quad D = (x+4)^2 + 4(2x^2 - 8x) = (x+4)^2 + 8x(x-4)$$

$$= (x+4)(x-4) + 8x(x-4) = (x-4)(9x+4)$$

$$y = \frac{(x+4) \pm \sqrt{(x-4)(9x+4)}}{2}$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \quad x > 4$$

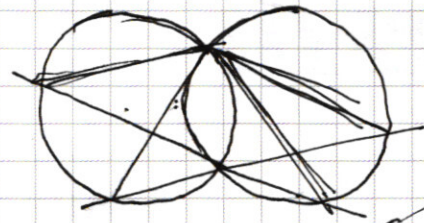
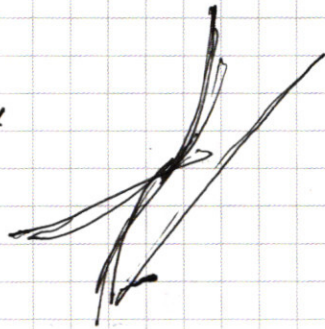
$$x^{-2\ln x} y^{3\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\frac{2\ln x}{\ln y} = \frac{yx}{y^{\ln y}}$$

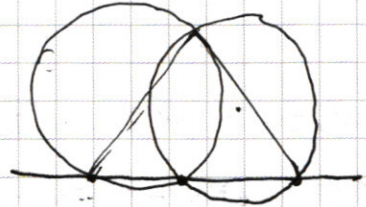
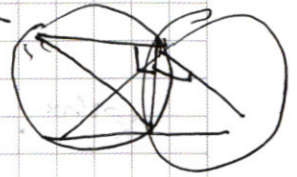
$$\frac{y^{3\ln x}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y}$$

$$\left(\frac{xy^{\ln x}}{x} \right)^{2\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$



$$CF^2 = CB^2 + BD^2$$



$$CB \cdot BD = d$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{2R}$$

