Рег. №: М11 - ТУ - 0028

Класс участия: 11

Место проведения: г. Тула

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное): 11:00

ШК

(заполняется секретарём)

Олимпиада школьн

МФТИ

по Математике

Название предмет

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
Захаров	Лев	Михайлович	17.03.2002	17

Страна	Регион	Населенный пункт
РФ	Тульская область	г. Тула

Документ, достоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
Паспорт	7016	653557	11.08.2016	710-009

Страна школы	Регион школы	Населенный пункт школы
РФ	Тульская область	г. Тула

Класс обучения: 11

Полное название образовательного учреждения: МБОУ - лицей № 2

Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail
89207505007		leva.zakharov@gmail.com

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020г

Подпись участника олимпиады

ФИО законного представителя	Степень родства	Подпись законного представителя
Захаров Михаил Александрович	отец	

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР _____

2 0 0 0 6 6 1 7

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Разложим 9261 на множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$;

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

Тогда, цифрами восьмизначных чисел, удовлетворяющих условию могут быть:

I: три "3"; три "7" и две "1";

II: одна "9"; одна "3"; три "7" и три "1"

Для случая I кол-во чисел равно 8!, однако мы, считая таким образом, считаем по несколько раз одинаковые числа, в которых одинаковые цифры просто меняются местами друг с другом.

Истинное значение количества чисел из I группы, удовлетворяющих условию: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$, т.к. мы учтём повторяющиеся тройки (3!), повторяющиеся семёрки (3!) и единицы (2!)

Рассуждая аналогично, приходим к кол-ву для II множества: $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$ (ибо есть три "1" и три "7")

Тогда общее кол-во чисел будет равно

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}+\frac{8!}{3!\cdot 3!}=\frac{8!+8!\cdot 2!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{8!\cdot 3}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=$$

$$=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1}=8\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2=8\cdot 35\cdot 6=48\cdot 35=24\cdot 70=$$

$$=1680$$

Ответ: 1680.

2.

$$\cos 9x-\cos 5x-\sqrt{2}\cos 4x+\sin 9x+\sin 5x=0$$

$$-2\sin 7x\sin 2x-\sqrt{2}\cos 4x+\sin 9x+\sin 5x=0$$

$$-2\sin 7x\sin 2x-\sqrt{2}\cos 4x+2\sin 7x\cos 2x=0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x-\sin 2x)-\sqrt{2}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)=0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x-\sin 2x)-\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)=0$$

$$(\cos(2x)-\sin(2x))(2\sin 7x-\sqrt{2}(\cos 2x+\sin 2x))=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x-\sin 2x=0\\ 2\sin 7x-\sqrt{2}(\cos 2x+\sin 2x)=0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\cos 2x\\ \sin 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x+\cos 2x)\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} 2x=1\\ \sin 7x=\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin 7x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin 7x-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\\ 2\cos\left(\frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k;\\ \frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k;\end{array}\right. k\in\mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{4}+\pi k\\ 9x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k\\ 5x-\frac{\pi}{4}=2\pi k\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 5x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{2}{5} \\ \cdot\frac{2}{5} \end{array} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k & (1) \\ 2x = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{5}\pi k & (2) \\ 2x = \frac{\pi}{10} + \frac{4}{5}\pi k & (3) \end{array}\right.$$

Проверим, есть ли повторяющиеся (совпадающие) корни, можно ли перейти к более общей формуле?

2) $\frac{\pi}{4} + \pi k_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{5}\pi k_2 \qquad k_1; k_2 \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{4} + k_1 = \frac{1}{6} + \frac{4}{5}k_2$

$k_1 = \frac{4}{5}k_2 - \frac{1}{12} \quad | \cdot 36$

$36k_1 = 16k_2 - 3$

$36k_1 + 3 = 16k_2$

$36k_1$ – чётное $\Rightarrow$ $36k_1 + 3$ – нечётное, т.о. $36k_1 + 3 \neq 16k_2$;

$16k_2$ – чётное

Ур-я (1) и (2) не имеют совпадающих корней.

Аналогично для (1) и (3) и (2) и (3):

Тогда $x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi\frac{k}{2} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

3.

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(2): $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2+8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x+4+|3x-4|}{2} \\ y = \frac{x+4-|3x-4|}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{x+4+3x-4}{2} \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} y = 2x & (3) \\ y = 4-x & (4) \end{array}\right.$$

(3) -> (1):

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$2^{-4\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x} \cdot x^{\ln 2 - 6\ln x} \quad | \cdot x^{6\ln x} \neq 0$

$2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x} \cdot x^{\ln 2} \quad | \cdot 2^{6\ln x} \neq 0$

$2^{2\ln 2} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$

$2^{2\ln 2} = 2^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x} = 2^{\ln 2 + \ln x}$

$2\ln 2 = \ln 2 + \ln x \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2. \Rightarrow y = 4$

(4) -> (1):

$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{+\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)}$

$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 2\ln x} \quad | \cdot (4-x)^{2\ln x - \ln(4-x)}$

$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{3\ln x - \ln(4-x)} = 1$;

Для этого у каждой степени либо основание -1, либо показатель -0:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y-x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\ln x=0\\ y-x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ 3\ln x-\ln(y-x)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\ln x=0\\ 3\ln x-\ln(y-x)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Ответ: $(2;4)$;

7.

$$\begin{cases}y\geq 2^x+3\cdot 2^{34}\\ y<76+2(2^{32}-1)x\end{cases} \Rightarrow 76+2(2^{32}-1)x>2^x+3\cdot 2^{34};$$

$f(x)=76+2(2^{32}-1)x$; $g(x)=2^x+3\cdot 2^{34}$;

т.к. $\begin{cases}f(0)<g(0)\\ f''(x)=0 & \text{— т.е } f(x)\text{ — прямая}\\ g''(x)=2^x\cdot\ln^2 2 & \text{— т.е. } g \text{ — полностью выпуклая}\\ f(1000)<g(1000) & (\text{действ. } 76+2000\cdot 2^{32}-1<2^{1000})\end{cases}$

то $f(x)=g(x)$ имеет два решения.

Подбором найдём их: $\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=38\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $x_{нск}\in[7;37]$, $x_{нск}\in\mathbb{Z}$

Для $\forall x \in [7; 37]$; $x \in \mathbb{Z}$:

$y \in [2^x + 3\cdot 2^{34}; 76 + 2(2^{32}-1)x)$ для того, чтобы $y \in \mathbb{Z}$

$(x; y)$ удовлетворяли системе $\Rightarrow$

Для конкретного значения x:

Кол-во пар $(x; y)$:

$$76 + 2x(2^{32}-1) - (2^x + 3\cdot 2^{34}) \Rightarrow$$

Для всех значений $x \in [7; 37]$; $x \in \mathbb{Z}$:

Кол-во пар: $(x; y)$:

$$N = \sum_{x=7}^{37} \left(76 + 2x(2^{32}-1) - 2^x - 3\cdot 2^{34}\right) =$$

$$= 76\cdot \underbrace{(37-7+1)}_{\text{кол-во } x\in[7;37],\ x\in\mathbb{Z}} + 2\cdot \frac{7+37}{2}\cdot(37-7+1)(2^{32}-1) -$$

$$-(2^7 + 2^8 + \ldots + 2^{37}) - 3\cdot 2^{34}\cdot(37-7+1) = 76\cdot 31 +$$

$$+ 2\cdot 22\cdot 31\cdot 2^{32} - 44\cdot 31 - \frac{2^7(2^{31}-1)}{1} - 3\cdot 31\cdot 2^{34} =$$

$$= 31(76-44) + 31(11-3)\cdot 2^{34} - (2^{38} - 2^7) = 31\cdot 32 +$$

$$+ 31\cdot 8\cdot 2^{34} - 2\cdot 2^{37} + 2^7 = 29\cdot 2^{37} + 992 + 128 = 29\cdot 2^{37} + 1120;$$

Ответ: $29\cdot 2^{37} + 1120$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$31\cdot 36 + 2^{33}\cdot \overset{11\cdot 31}{22\cdot 31} - 44\cdot 31 - 2^{38} + 2^{7} - 53\cdot 2^{34} =$$

$$= 31(36-44) + 31(11-3)\cdot 2^{34} - (2^{38} - 2^{7}) =$$

$$= 31(32) + 31\cdot 8\cdot 2^{34} - 2^{38} + 2^{7} = (31-2)\cdot 2^{37} + 992 +$$

$$+ 2^{7} = 29\cdot 2^{37} + 2^{7} + 992 = 29\cdot 2^{37} + 128 + 992 = 1120 + 29\cdot 2^{37}.$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}31 \\ \times 32 \\ \hline 62 \\ {}^{1}93 \\ \hline 992 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

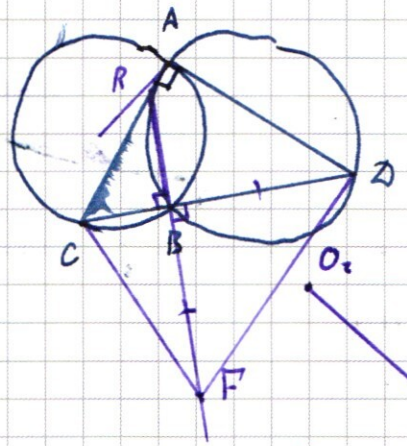
Страница №__

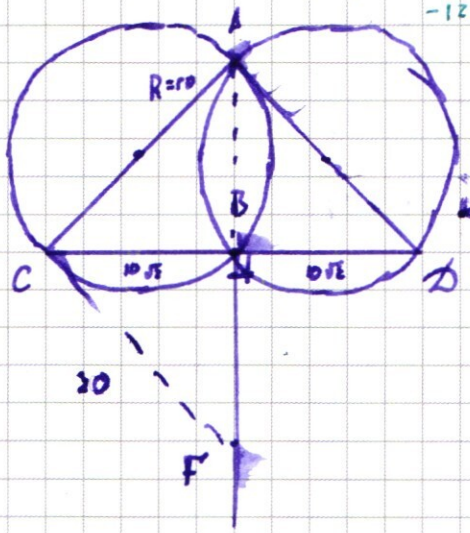
(Нумеровать только чистовики)

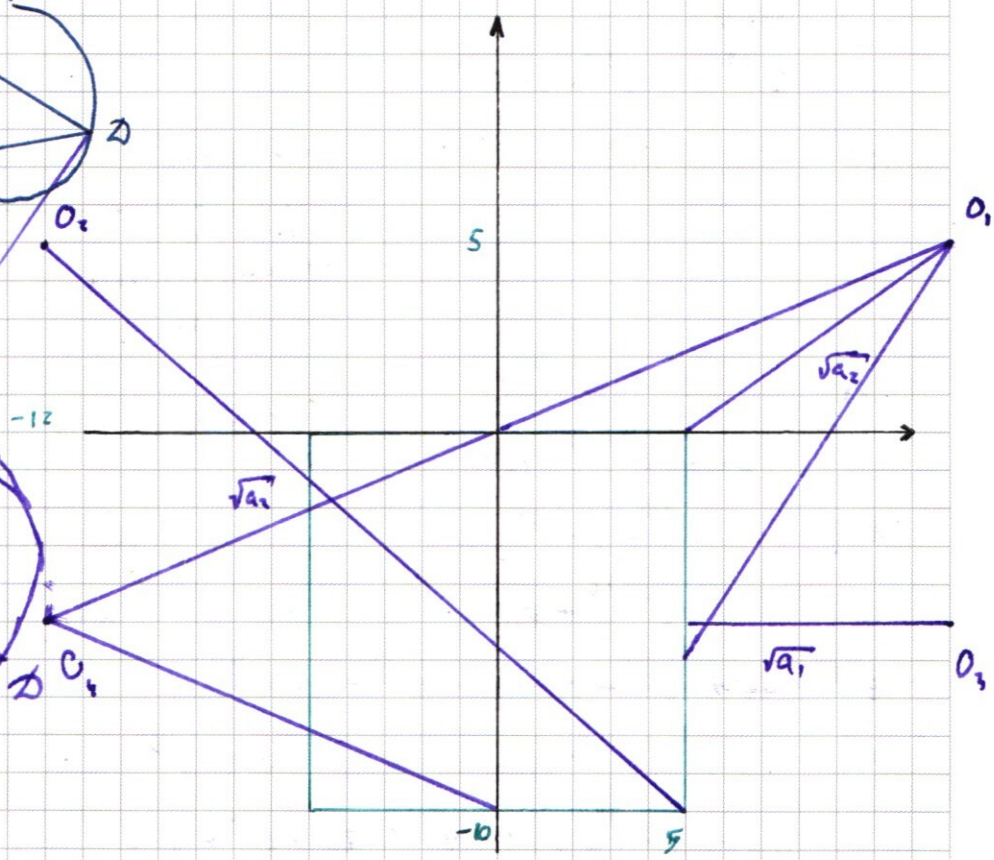
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$a = \{49; 709\}$

$76 = 64 + 12 =$
$= 64 + 8 + 4$

7.

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$38 + (2^{32} - 1)x > 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33}$

$x = 1$:

$38 + 2^{33} - 1 < 1 + 3 \cdot 2^{33}$

$x = 7$:

$76 + 7 \cdot 2^{33} - 14 \vee 128 + 6 \cdot 2^{33}$

$2^{33} > 128 + 14 - 76$ ✓

$x > 3$: $x = 4$?

$x = 8 \ldots 9 \ldots 10 \ldots \ldots 34$

$38 +$

$76 + 2 \cdot 2^{32} - 64 \vee 2^{34} + 3 \cdot 2^{34}$

$x = 6$: $76 + 3 \cdot 2^{34} - 12 > 64 + 3 \cdot 2^{34}$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

34:

$76 + 17\cdot 2^{34} - 68 \vee 2^{34} + 3\cdot 2^{34}$

$19\cdot 2^{24} + 76 - 68 > 0$ ✓

35:

$76 + 35\cdot 2^{33} - 70 \vee 2^{35} + 3\cdot 2^{34}$

$> 32 \vee$

$2^{38} > 2^{35} + 3\cdot 2^{34}$

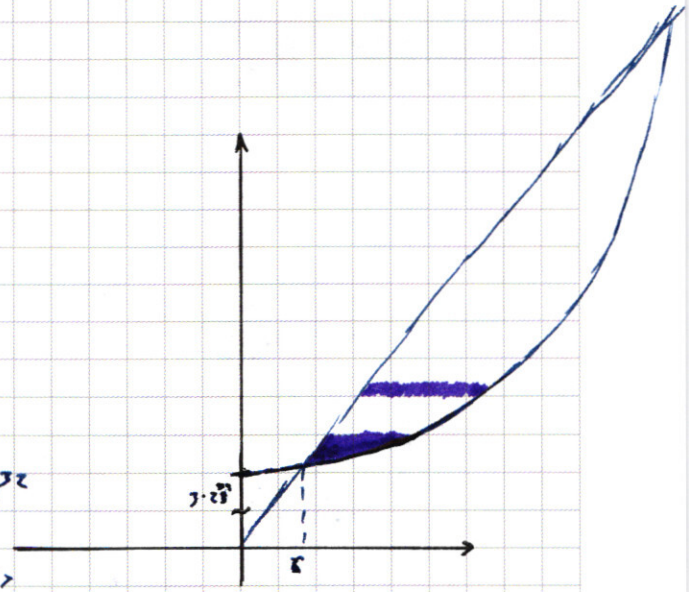
100? $2^{100} + 3\cdot 2^{34}$; $76 + \underbrace{200\cdot 2^{32}}$

$2\cdot 100 = 4\cdot 50 =$

$= 8\cdot 25 = 16\cdot 12{,}5 >$

$> 32\cdot 4 = 64\cdot 3 > 128\cdot$

2^{35}



64: $2^{64} + 3\cdot 2^{34}$; $\vee$

$76 + 2^{32+2} - 128$

$80 = 16\cdot 5 > 16\cdot 4 = 64$

40? $2^{40} + 3\cdot 2^{34}$

$76 + 2^{32\cdot 6} - 80$

$x \in (6;\ 38)$

$x \in [7;\ 37]$

~~38? $76 + 2^{38} - 40$ $2^{35} + 3\cdot 2^{24}$~~

$S_B = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

38? $76 + (2^{33} - 2)\cdot 38 \vee 2^{38} + 3\cdot 2^{34}$

$76 + (2^{34} - 4)\cdot 19 \vee 16\cdot 2^{34} + 3\cdot 2^{34}$

$19\cdot 2^{34} + 76 - 4\cdot 19 \vee 19\cdot 2^{34}$

0

$0 = 0$ ✓

$x = 7$

$x \in (76 + 14\cdot 2^{32} - 14;\ 2^7 + 3\cdot 2^{34}] \ni y$

$|y| = 76 + 14\cdot 2^{32} - 14 - (2^7 + 3\cdot 2^{34}) =$

$\sum_{x\in 7}^{37} 76 + (2^{32} - 1)\cdot 2x - (2^x + 3\cdot 2^{34}) =$

$31\cdot 76 + 2(2^{32} - 1)\sum_{x=7}^{37} x - \sum_{x=7}^{37} 2^x - 31\cdot 3\cdot 2^{34} =$

~~$= 31\cdot 76 + 2(2^{32} - 1)\frac{7+37}{2} - 31$~~

$= 31\cdot 76 + 2(2^{32} - 1)\frac{7+37}{2}\cdot 31 - \frac{2^7(2^{31} - 1)}{1} - 93\cdot 2^{34}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$; => x – чет: $x \in X$;

$|X| = \overline{P}(8) = \frac{8!}{2!\,3!\,7!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot7\cdot2\cdot1} =$

$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7\cdot2\cdot5 = 35\cdot16$

$1^4\cdot3\cdot9\cdot7^3$. $|Y| = \overline{P}(8) = \frac{8!}{4!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} =$

$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 7\cdot5 = 35$

$35\cdot17 =$

$$\begin{array}{r} {}^{+3}35 \\ \times 17 \\ \hline 245 \\ +35 \\ \hline 595 \end{array}$$ ✓

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 5x\cos 4x - \sin 5x\sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x +$

$+ \sin 5x\cos 4x + \cos 5x\sin 4x + \sin 5x = 0$

~~$\cos 5x(\cos 4x + \sin 4x - 1) + \sin 5x$~~

$\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x)$

~~2) $\cos 9x - \cos 5x = \cos\frac{a+b}{2}$~~

$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$

$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$

$\cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) =$

$\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} =$

$= -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$;

$\sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) =$

$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$

$-2\sin 7x\sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0$

$$\begin{array}{r} {}^{+2}24 \\ \times 70 \\ \hline 1680 \end{array}$$

~~$2\sin 7x(\cos 4x - \sin 4x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$~~

~~$\cos(a) - \sin(a)$~~

~~$-2\sin 7x\sin 2x$~~

$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ 2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) \end{cases}$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \sin 2x \\ \cdot 2\sin 3x = \sqrt{2}\left(\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = \sqrt{2}\left(\sin 2x + \sin\frac{\pi}{2}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{2}\sin 2x\right)\end{array}\right.$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$\sin a + \cos a$

$$\sin x + \cos x = a$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 3x = \sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 3x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 3x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\cos\left(\frac{3x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{3x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \\ 5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}9x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}\pi k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k\end{array}\right.$$

$$\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9} = \frac{3\pi}{18} + \frac{4\pi}{18} = \frac{7\pi}{18};$$

$$\frac{\pi}{20};\ \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{20} + \frac{8\pi}{20} = \frac{9\pi}{20}$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{20} + \frac{16\pi}{20} = \frac{17\pi}{20}$$

$$\begin{array}{r}32 \\ 8 \\ \hline 24\end{array}$$

3) $\begin{cases}(x^2y^1)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x > 0 \\ y > 0\end{cases}$

$\cancel{2x^2 + 8x =}$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(8x - 2x^2) = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2\cdot 4\cdot 3x + 4^2 = (3x-4)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

$$y = \frac{x + 4 \pm |3x - 4|}{2}$$

$$y = \frac{x + 4 \pm (3x - 4)}{2}$$

$$y = \frac{4x}{2} \qquad \left[\begin{array}{l}y = 2x \\ y = 4 - x\end{array}\right.$$

$$y = \frac{8 - 2x}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x$: $(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$2^{-4\ln x}\cdot x^{-6\ln x} = (2x)^{\ln 2}\cdot(2x)^{-6\ln x}$

$2^{-4\ln x}\cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln 2-6\ln x}\cdot x^{\ln 2}\cdot x^{-6\ln x}$

$x^{-6\ln x}=0$ (невозможно)

$2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2-6\ln x}\cdot x^{\cancel{-6\ln x}\ \ln 2}$

$2^{2\ln x} = 2^{\ln 2}\cdot 2^{\ln x}$

$2\ln x = \ln 2+\ln x$

$\ln x = \ln 2$

$x=2 \quad y=4;$ Ответ $(2;4)$

$(2^4\cdot 2^6)^{-\ln 2} \vee (2^2)^{\ln(2^{-5})}$

$2^{-10\ln 2} \vee 2^{-10\ln 2}$ ✓

$=$

$y=4-x$: $\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{+\ln\left(\frac{2-x}{x^2}\right)}$

$x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}\cdot(4-x)^{-2\ln x}$

$x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{3\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

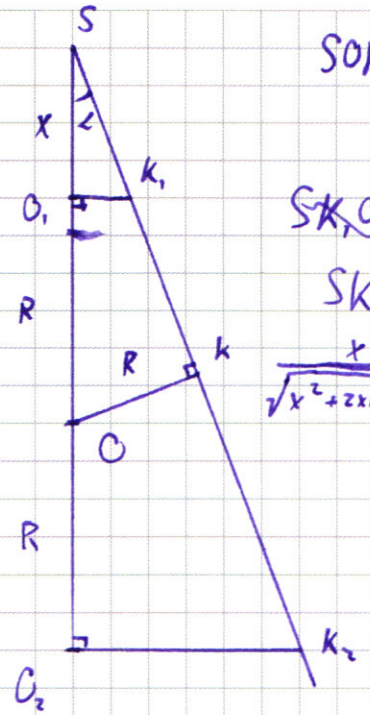
$x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{3\ln x-\ln(4-x)} = 1$

$\begin{cases} x=1 \\ 4-x=1 \end{cases}$ – реш нет

$\begin{cases} \ln x=0 \\ 4-x=1 \end{cases}$ – реш. нет

$\begin{cases} x=1 \\ 3\ln x-\ln(4-x)=0 \end{cases}$ $\quad x=1$ $\quad 0-\ln 3\neq 0$ решений нет.

$\begin{cases} \ln x=0 \\ 3\ln x-\ln(4-x)=0 \end{cases}$ – реш. нет



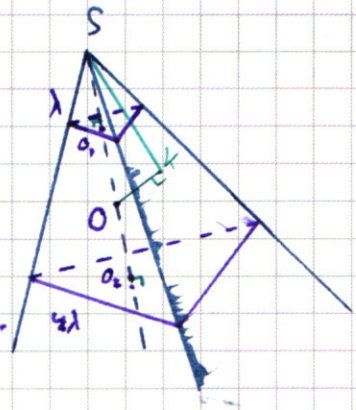
SOK: $SO = x + R$;

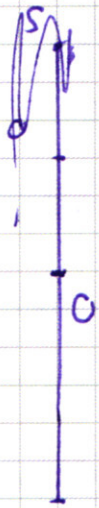
$OK = R$

$\cos\alpha = \frac{R}{x+R}$

$SK = \sqrt{(x+R)^2 - R^2} = \sqrt{x^2 + 2xR}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+2xR}} = \frac{O_1K_1}{R}$ $\quad O_1K_1 = \frac{xR}{\sqrt{x^2+2xR}}$





$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ +15 \\ \hline 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 484 \end{array}$$

$SO_1 = x$; $SO_2 = 4x = x + 2R \Rightarrow R = 1{,}5x$;

$\triangle SOK$: $SO = x + R = 2{,}5x$;

$OK = R = 1{,}5x \Rightarrow$

$SK = \sqrt{x^2 + 2xR} = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x \Rightarrow$

~~$\angle KSO = \alpha$~~ $\cos\angle KSO = \frac{2x}{2{,}5x} = \frac{4}{5}$; $\angle KSO = \arccos\frac{4}{5}$;

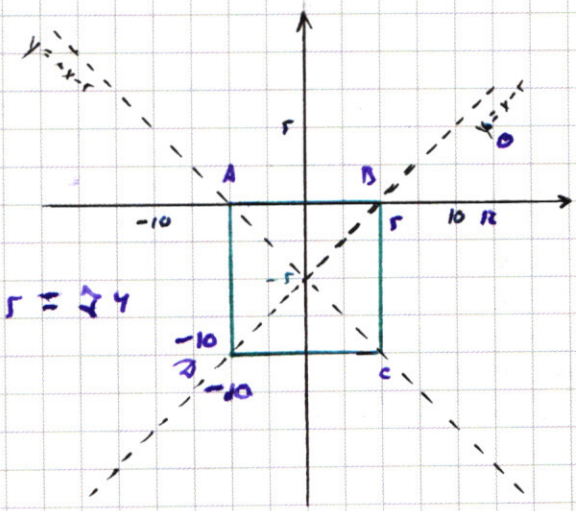
$SO_1 = x$; $\Rightarrow$ т.к. $\frac{SO_1}{SK} = \frac{SK_1}{SO} \Rightarrow$

$SK_1 = \frac{2{,}5x \cdot x}{2x} = \frac{5}{4}x \Rightarrow$

т.к. $\frac{SK}{SK_1} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} \Rightarrow$ $k = \frac{8}{5} \Rightarrow$ $k^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow$ $S_{исх} = \frac{64}{25} S_1 = \frac{64}{25}$.

5.

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$



$a \in [|OD|^2; |OD|^2)$ ÷

$OB = \sqrt{(12-5)^2 + (5-0)^2}$;

$a_{min} \to (12-5)^2 + 5^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$

$a_{max} \to (-10-5)^2 + (12-(-10))^2 =$

$= 15^2 + 22^2 = 225 + 484 = 709$

$a \in (74; 709)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)