

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Рассмотрим все случаи, при которых произведение 8 цифр равно 9261.

I 3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1 Числа 7 и 3 — простые, поэтому их нельзя разложить на множители, отличные от 1, 3, 7. Получим новые наборы можно только произведя ~~8~~ ⁴ ~~7~~ ~~5~~ ~~4~~ ~~3~~ ~~2~~ данных цифр и добавив 1. Кол-во чисел, составленных из этих цифр: $\frac{3! \cdot 3! \cdot 2!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 28 \cdot 20 = 560$

II 9; 3; 7; 7; 7; 1; 1; 1

Кол-во чисел, которые можно составить из этих цифр: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 560 \cdot 2 = 1120$

Другие наборы 8 цифр, произведение которых равно 9261 нет, т.к. получим новые цифры из набора I можно только произведя 2х троек, тогда получим набор II, получим новые цифры из которого невозможно

Общее кол-во 8-значных чисел, произведение цифр в которых равно 9261: $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

$$\sqrt{5} \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10; & (1) \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = a; & (2) \end{cases}$$

$$\text{I } x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 \geq 0 \quad y \geq -x-5; \quad y \geq x-5$$

$$x+y+5+y-x+5=10; \quad y=0$$

$$\text{II } y \geq -x-5; \quad y < x-5$$

$$x+y+5-y+x-5=10; \quad x=5$$

$$\text{III } y < -x-5; \quad y \geq x-5$$

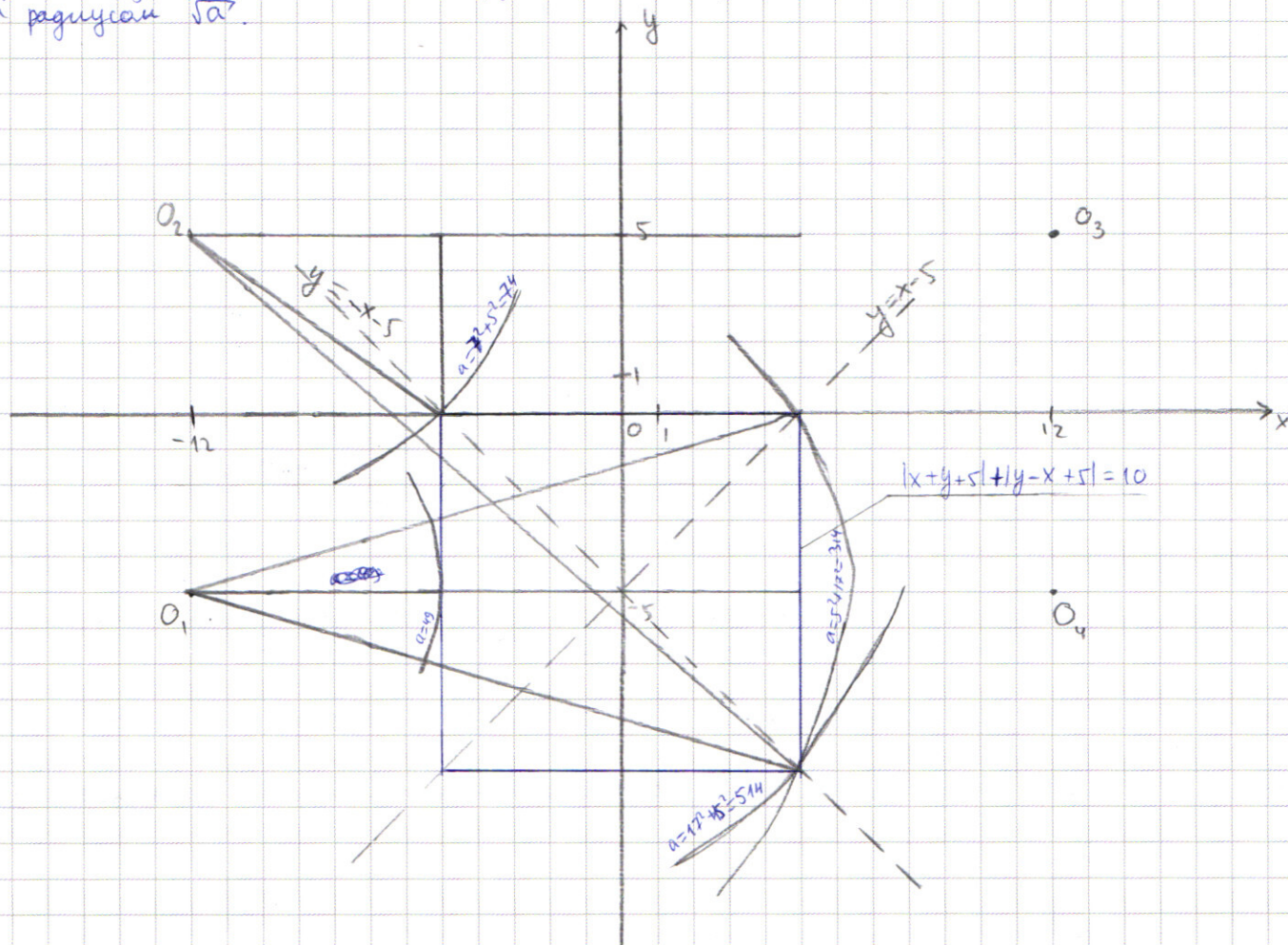
$$-x-y-5+y-x+5=10; \quad x=-5$$

$$\text{IV } y < -x-5; \quad y < x-5$$

$$-x-y-5-y+x-5=10; \quad y=-10$$

Изобразим решение ур-я (1) на координатной плоскости.

Графиком ур-я (2) являются 4 окружности с центрами в т. $O_1(-12; -5)$; $O_2(-12; 5)$; $O_3(12; 5)$; $O_4(12; -5)$ и радиусом $\sqrt{a}$.



Окружности $\omega_1(O_1; \sqrt{a})$ и $\omega_4(O_4; \sqrt{a})$; $\omega_2(O_2; \sqrt{a})$ и $\omega_3(O_3; \sqrt{a})$ симметричны относительно Oy ; график ур-я (1) также симметричен относительно Oy . $\Rightarrow$ если ω_1 или ω_2 пересекают график (1), то ω_3 или ω_4 также пересекают график (1).

~~Для того, чтобы система имела ровно 2 решения ω_1 и ω_2 должны пересекать график (1) ровно в 1 точке (то есть одна из ω_1, ω_2 - в одной точке, а вторая - не пересекает)~~

ω_1 пересекает график (1) в одной точке при $a=49$; не пересекает при $a \in [0; 49) \cup (514; +\infty)$.

ω_2 пересекает график (1) в одной точке при $a \in [74; 514]$; не пересекает при $a \in [0; 74) \cup (514; +\infty)$

ω_1 и ω_2 пересекают график (1) в одной точке (вместе) при $a \in [49; 514]$

Ответ: 49; 514

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad \left| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = 0;$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2 \sin(6,5x - \frac{\pi}{8}) \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) + 2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cdot (\cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) + \sin(\frac{\pi}{8} - 6,5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0; \\ \cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) + \cos(6,5x - \frac{3\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cos(4,5x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(-2x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \\ 4,5x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ -2x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; \\ x = \frac{3\pi}{18} + \frac{\pi k}{4,5}; \\ x = -\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi k}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}; \\ x = -\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}; -\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\text{№3} \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$2) y^2 - 2xy + xy + 8x - 2x^2 - 4y = 0$$

$$y(y-2x) + y(x-4) - 2x(x-4) = 0; \quad y(y-2x) + (x-4)(y-2x) = 0;$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0; \quad \begin{cases} y = 2x; \\ y = 4-x; \end{cases}$$

$$1) x > 0; y > 0.$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}; \quad x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \cdot y^{4\ln x}; \quad x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$\frac{y^{3\ln x}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y} \quad \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\text{I } y = 2x; \quad \left(\frac{8x^3}{x^2}\right)^{\ln x} = (2x)^{\ln(2x)}; \quad (8x)^{\ln x} = (2x)^{\ln 2x}; \quad 4^{\ln x} \cdot (2x)^{\ln x} = (2x)^{\ln 2x}$$

$$4^{\ln x} = (2x)^{\ln 2x - \ln x}; \quad 4^{\ln x} = (2x)^{\ln 2}; \quad x^{\ln 4} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}; \quad x^{2\ln 2} - 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} = 0$$

$$\begin{cases} x^{\ln 2} = 0, \\ x^{\ln 2} = 2^{\ln 2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = 2 \end{cases} \quad x > 0 \Rightarrow x = 2; \quad y = 2x \Rightarrow y = 4 \quad (2; 4)$$

$$\text{II } y = 4-x; \quad \left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)^{\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}; \quad \frac{(4-x)^{\ln x^3}}{x^{2\ln x}} = (4-x)^{\ln(4-x)}; \quad \frac{(4-x)^{\ln x^3 - \ln(4-x)}}{x^{2\ln x}} = 1$$

$$x^{2\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{x^3}{4-x}}; \quad x^{\ln x^2} = (4-x)^{\ln \frac{x^3}{4-x}}$$

$$] x = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2; \quad \text{При } x = 2 \quad 2^{\ln 2} = (4-2)^{\ln \frac{2^3}{4-2}} \Leftrightarrow 2^{\ln 2} = 2^{\ln 4} \quad \text{Верное} \Rightarrow (2; 2) - \text{решение системы}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^{\ln x^2} - \text{возрастает на } (0; 4) \\ g(x) = 4 - x^2 - \text{убывает на } (0; 4) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ имеет не более 1 } \text{решения} \text{ на } (0; 4)$$

Ответ: (2; 2); (2; 4)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261/3 \\ 30873 \\ 10293 \\ 3437 \\ 497 \\ 77 \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33377711 \\ 93777111 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2} = 560$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 560 \cdot 2! = 1120; \quad 1120 + 560 = 1680$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(4x+5x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(4x+5x) + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10; \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 y)^{\ln x} = y^{\ln(\frac{x}{y})} \\ y - xy - 2x + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x > 0, y > 0 \\ 2x^2 \\ y^2 - 2x(x-4) \end{matrix}$$

$$I \quad x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 \geq 0 \Rightarrow y \geq -x-5; \quad y \geq x-5$$

$$x+y+5-y-x+5=10; \quad y=0$$

$$II \quad x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 < 0 \Rightarrow y \geq -x-5; \quad y < x-5$$

$$x+y+5-y-x+5=10; \quad x=5$$

$$III \quad x+y+5 < 0; \quad y-x+5 \geq 0 \Rightarrow y < -x-5; \quad y \geq x-5$$

$$-x-y-5+y-x+5=10; \quad x=-5;$$

$$IV \quad x+y+5 < 0; \quad y-x+5 < 0 \Rightarrow y < -x-5; \quad y < x-5$$

$$-x-y-5-y-x+5=10; \quad -2y=20; \quad y=-10$$

$$\begin{cases} (x^2 y)^{\ln x} = y^{\ln(\frac{x}{y})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

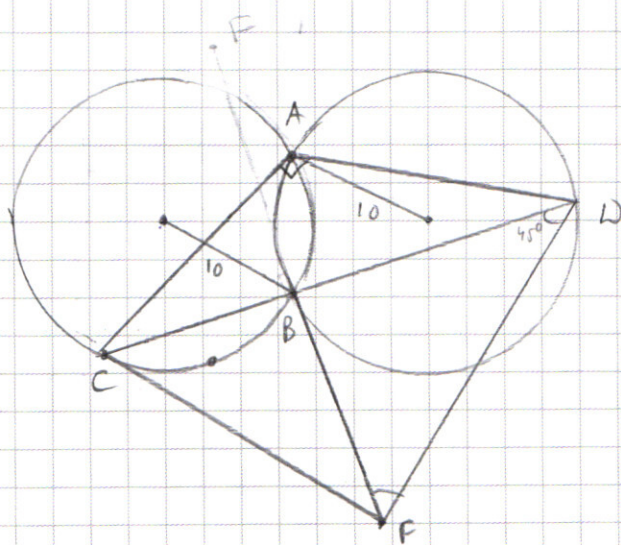
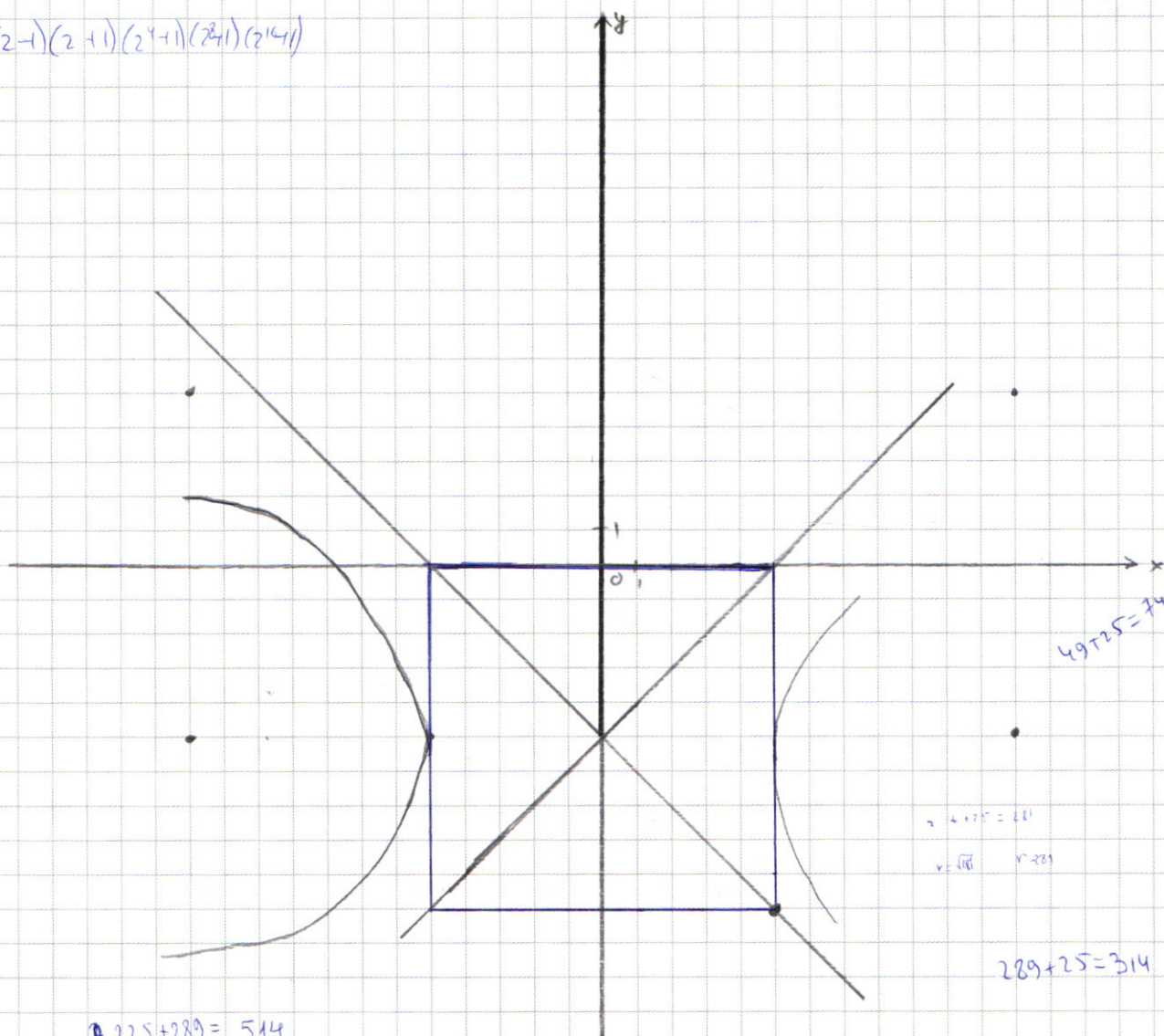
$$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 8x - 8y = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + y^2 - 5x^2 + 16x - 8y = 0$$

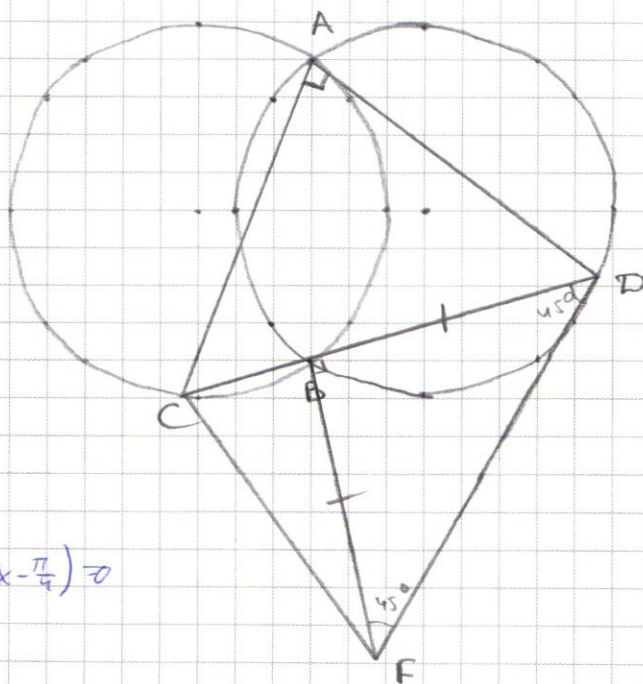
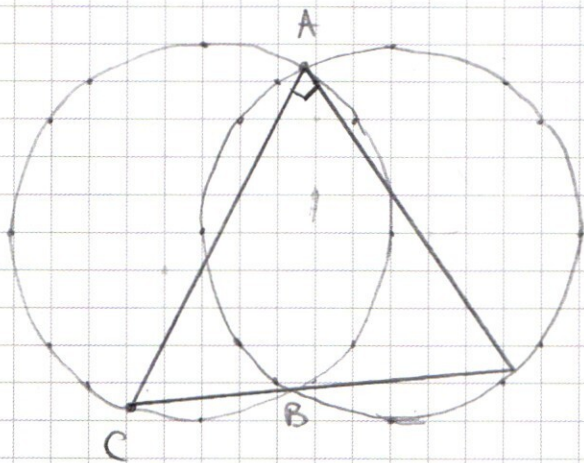
$$y^2 - 4y + 4 - 2x^2 + 8x - 8 + 4 - xy = 0; \quad (y-2)^2 - 2(x-2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$\begin{aligned} y^2 - 2xy + x^2 - 4y - 2x^2 + 8x &= \\ = y(y-2x) + y(x-4) - 2x(x-4) &= \\ = y(y-2x) + (y-2x)(x-4) &= \\ = (y-2x)(y+x-4) = 0 &= \\ \begin{cases} y = 2x; \\ y = -x+4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2^{2^7} - 1 = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = (2^{32} - 1)(2^{32} + 1)(2^{16} + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2x$$

$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4} - 4x) + 2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2 \sin(6,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(2,5x + \frac{3\pi}{8}) + 2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2 \sin(6,5x - \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{\pi}{8} - 2,5x) + 2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \left(\cos(2,5x - \frac{\pi}{8}) - \sin(6,5x - \frac{\pi}{8}) \right) = 0$$

$$\sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0;$$

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = -x + 4, \end{cases} \quad x > 0; y > 0$$

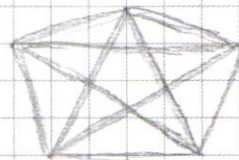
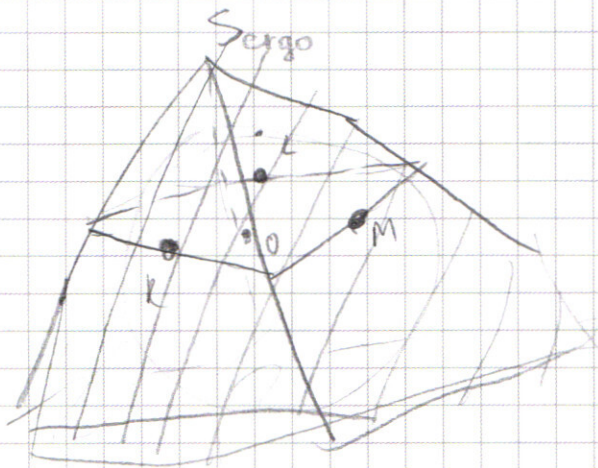
$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(6x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

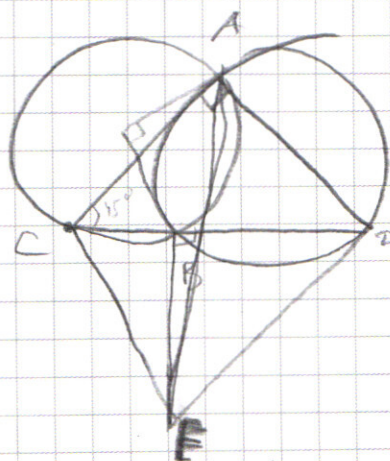
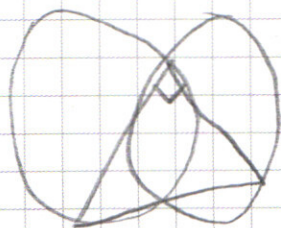
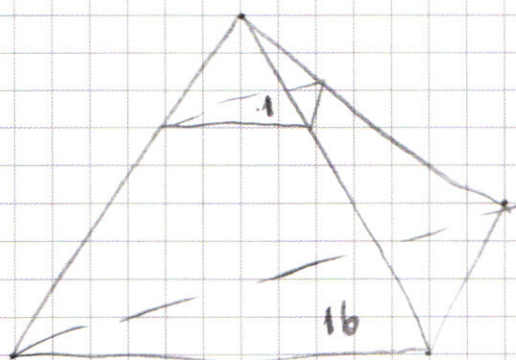
$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}} \cdot i \quad y^{\ln y} = y^{\ln x} \cdot x^{-2 \ln x}$$

$$y^{\ln y} = x^{-2 \ln x},$$

$$y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^2} = x^{-2 \ln x}$$



ИЛИ ВША РАБЗИЛЕ



Я был нелицем и детей,
 Потому что я красивый,
 Потому что я сильный,
 И они не могли сдать
 Дать мне. Нелицем и детей
 Были неправильно я знаю,
 Но был нелицем и детей.
 И я самоуверенно.
 0-0-0.



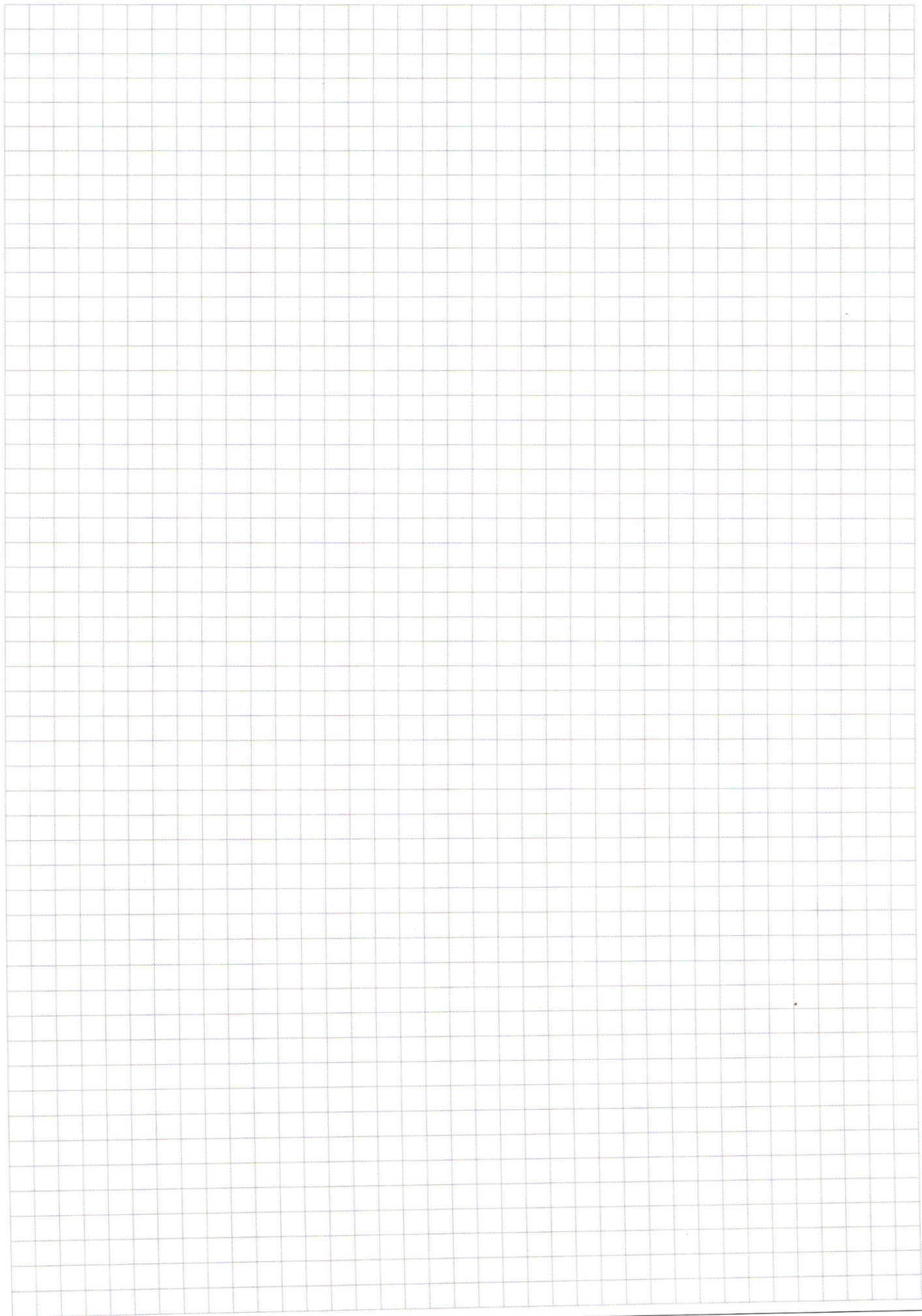
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)