

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
- 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$(-2 \sin 2x \sin 7x + 2 \sin 7x \cos 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 & (**) \end{cases}$$

(*)

$$\cos 2x = \sin 2x \quad | \quad \cos 2x \neq 0$$

проверка: $\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x = 0$

- противоречие с ОТОЖ

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(**)

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x}_{\sin \frac{\pi}{4}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x}_{\cos \frac{\pi}{4}} \right) = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \left(\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$4 \sin \left(\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$4 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~Вывод~~

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z};$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверка:

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$-1 + \sqrt{17} > 0 \quad \in \text{О.З.}$$

$$-1 > -\sqrt{17}$$

$$1 < 17$$

Ответ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 4); (2; 2); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$

25

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 & (*) \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a & (**) \end{cases}$$

a : 2 решения

(*) рассмотрим 4 случая рас-
крытия модулей:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \in \text{O. \& . 3}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\ln\left(\frac{4-y}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{(4-y)^2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{4-y}{y}\right) = 0 \\ \ln\left(\frac{y}{(4-y)^2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4-y}{y} = 1 \\ \frac{y}{(4-y)^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-y = y \\ y = (4-y)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y = y^2 - 8y + 16 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \quad y^2 - 9y + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

проверка: $\frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0$

$$4 - \sqrt{17} > 0$$

$$9 > \sqrt{17}$$

$$81 > 17$$

$$\in \text{O. \& . 3.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \in \text{O. \& . 3.}$$

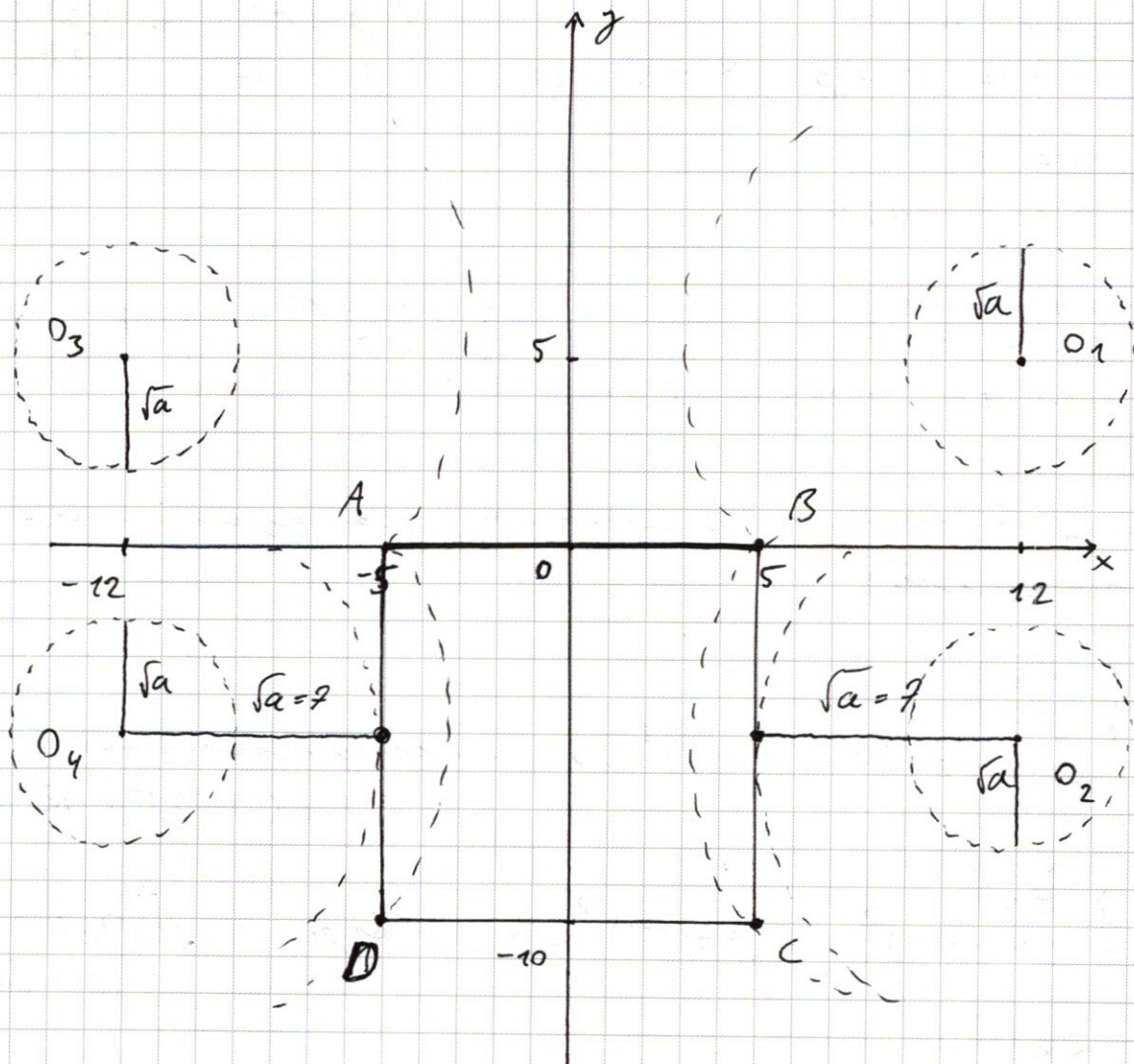
$$\begin{cases} x = 4 - y \\ y = 2 \\ x = 4 - y \\ y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = 4 - y \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \notin \text{O. \& . 3.} \\ y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ - некл.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)
$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases} \text{ — окруж. с ц. } O_4 (-12; -5) \\ R = \sqrt{a}$$

Вернёмся к системе и изобразим
исполненные условия на координатной
плоскости;



$$1) \begin{cases} (x+y) \geq -5 \\ (y-x) \geq -5 \\ x+y+5+y-x+5=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x \geq -5 \\ -x \geq -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x \in [-5; 5] \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x+y) \geq -5 \\ (y-x) < -5 \\ x+y+5-y+x-5=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y \geq -10 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y \in [-10; 0) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x+y) < -5 \\ (y-x) \geq -5 \\ -x-y-5+y-x+5=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 \\ y < 0 \\ y \geq -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 \\ y \in [-10; 0) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x+y) < -5 \\ (y-x) < -5 \\ -x-y-5-y+x-5=10 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-10 \\ x < 5 \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-10 \\ x \in (-5; 5) \end{cases}$$

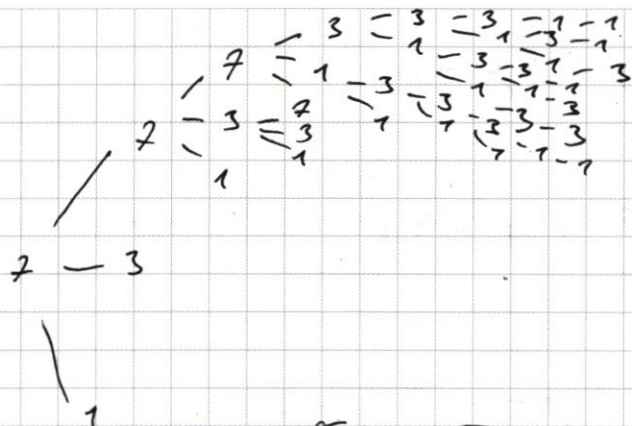
(**) рассмотрим 4 случая расположения точек:

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases} \quad \text{— окружность с ц. } O_1(12; 5) \quad R = \sqrt{a}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ (x-12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases} \quad \text{— окр. с ц. } O_2(12; -5) \quad R = \sqrt{a}$$

$$3) \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases} \quad \text{— окр. с ц. } O_3(-12; 5) \quad R = \sqrt{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 32 \\ 343 \\ \times 27 \\ \hline 2401 \\ + 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi m$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + i\pi n$$

$$\frac{\pi}{20}$$

$$\frac{9\pi}{20}$$

$$\frac{17\pi}{20}$$

是

$$\frac{28}{20} \pi$$

$$\frac{33}{20} \pi$$

$$\frac{41}{20} \pi$$

3元
38

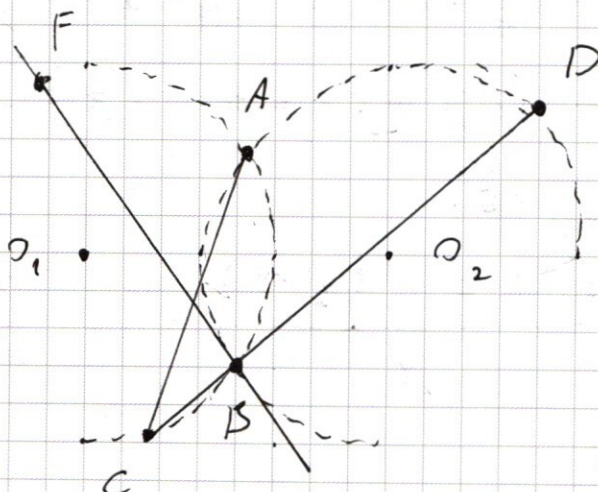
$$\frac{78\pi}{36}$$

$$\frac{19\pi}{36}$$

$$\frac{29\pi}{36}$$

$$\begin{array}{r} 35\pi \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \pi \\ \hline 36 \end{array}$$



$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - \underline{x y} - \underline{2x^2} + \underline{8x} - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - x y - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x - 8 + 8 + y^2 - 4y + 4 - 4 - xy &= 0 \\ -(\sqrt{2}x - 2\sqrt{2})^2 + \end{aligned}$$

$$-2(x-2)^2 + (y-2)^2 - xy = 0$$

$$-2x^2 + 8x - xy + y^2 - 4y = 0$$

$$-2x^2 + 8x - xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\cancel{2x^2} - 2x^2 - x(y-8) + y^2 - 4y = 0$$

$$2x^2 + x(y-8) - y^2 + 4y = 0$$

$$2x^2 + x(y-8) - (y^2 - 4y) = 0$$

$$\Delta = y^2 - 16y + 64 + 8y^2 - 32y =$$

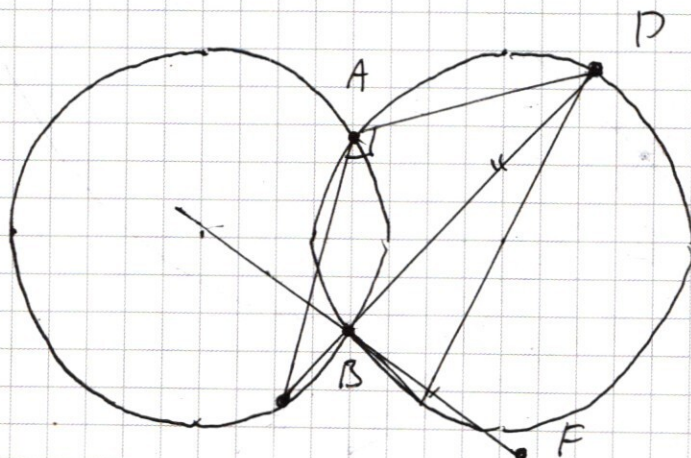
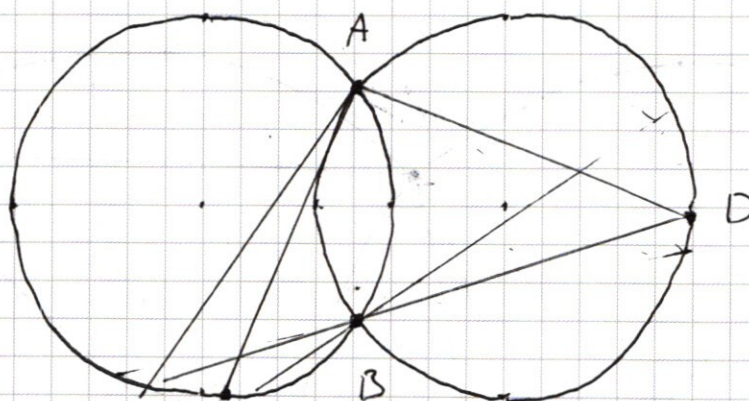
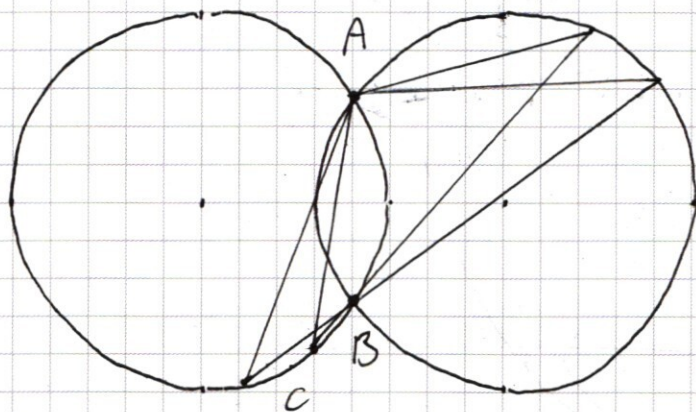
$$= 9y^2 - 48y + 64 = (3y-8)^2$$

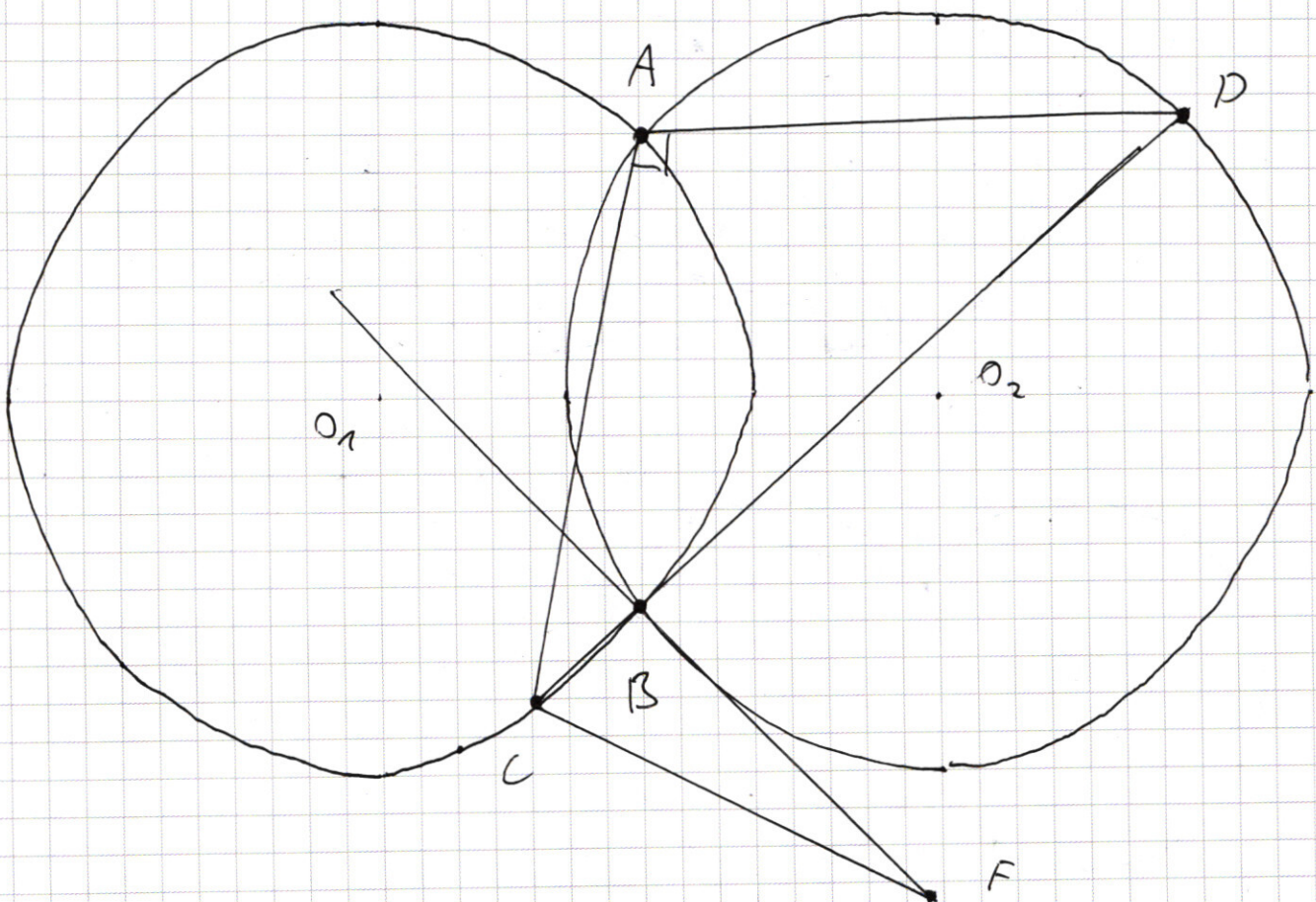
$$\sqrt{\Delta} = (3y-8)$$

$$x = \frac{-y+8 \pm (3y-8)}{4} = \begin{cases} \frac{-y+8+3y-8}{4} \\ \frac{-y+8-3y+8}{4} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2y}{4} \\ \frac{-4y+16}{4} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \\ - 9 \\ \hline 026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \cdot 3 \\ 387 \end{array}$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 3089 \\ \times \quad 5 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \end{array}$$

$$1-3 \quad \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{\cancel{8!}}{3!2!}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \quad 3 \\ - 3 \quad 1029 \quad 3 \\ \hline 008 \quad - 9 \quad 345 \\ - 6 \quad 12 \quad - 3 \\ \hline 29 \end{array}$$

343	3	1020
49	7	343
7	7	49
1	49	

7	4.5	6.7.8
3		
	1.2	3.1.2
1	5	560

$$\begin{array}{r} 343 \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$7^3, 3^3$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} / \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$\times \frac{342}{84}$

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{49} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{343} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{1029} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{3087} \quad 9261$

$$9267 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3/9$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

7. 7. 7. 3 3 3 1 1

7 7 7 3 9 11 1

3 3

3.3

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 7 \\
 \hline
 3 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x}_{\sin \frac{\pi}{4}} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x}_{\cos \frac{\pi}{4}} \right) =$$

$$= 2 (\sin 7x - \sin (\frac{\pi}{4} - 2x)) =$$

$$= 4 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} + 2x}{2} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4} - 2x}{2} = 0$$

$$4 \sin \left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$4 \left(\frac{8 - 9 + \sqrt{17}}{2} \right) \text{ or } \left(\frac{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{4}{4}} \right) \frac{4y}{y^2}$$

$$4 - \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \quad \frac{8 - 9 - \sqrt{17}}{2} \\ - \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $x = \frac{y}{2}$

$$\left(\frac{y^2}{4} y^4\right)^{-\ln \frac{y}{2}} = y^{\ln \left(\frac{y}{128}\right)}$$

$$\left(\frac{y^6}{4}\right)^{-\ln \frac{y}{2}} = y^{\ln \frac{128}{y^6}}$$

$$y = 2x$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6}\right)}$$

$$\left(\frac{1}{16x^6}\right)^{\ln x} =$$

$$-\ln 16x^6 \ln x = \ln 2x \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-\ln 16x^6 \ln x = (\ln 2 + \ln x) \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-\ln 16x^6 \ln x = \ln 2 \ln \frac{2}{x^6} + \ln x \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-\ln x (\ln 16x^6 + \ln \frac{2}{x^6}) = \ln 2 \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-\ln x \ln 32 = \ln 2 \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-5 \ln x \ln 2 = \ln 2 \ln \frac{2}{x^6}$$

$$-\ln 2 (\ln x^5 + \ln \frac{2}{x^6}) = -\ln 2 \ln \frac{2}{x} = 0$$

$$\ln \frac{2}{x} = 0 \quad \frac{2}{x} = 1 \quad (x = 2)$$

$$2. \quad x = -y + 4$$

$$y \neq 4$$

$$((4-y)^2 y^4)^{-\ln(4-y)} = y^{\ln\left(\frac{y}{(4-y)^2}\right)}$$

$$-\ln(4-y) \ln(4-y)^2 y^4$$

$$-\ln x^2 y^4 \ln x = \ln y \ln \frac{y}{x^2}$$

$$-(\ln x^2 + \ln y^4) \ln x = \ln y (\ln y - \ln x^2)$$

$$-2\ln x \ln x - 4\ln x \ln y = \ln y \ln y - 2\ln y \ln x$$

$$-2\ln x \ln x + 3\ln x \ln y - \ln y \ln y = 0$$

$$-2\ln x$$

$$-2\ln x (\ln x - \ln y) + \ln y (\ln x - \ln y) = 0$$

$$(\ln x - \ln y) (-2\ln x + \ln y) = 0$$

$$\ln \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \\ x + y + 5 - y + x - 5 = 10 \\ -x - y - 5 + y - x + 5 = 10 \\ -x - y - 5 - y + x + 5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \\ x = -5 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$x + y \geq -5$$

$$x - y \geq -5$$

$$y - x \geq -5$$

$$5 + y \geq -5$$

$$y$$

$$y - 5 < -5$$

$$-5 + y < -5$$

$$x - 10 < -5$$

$$x < 5$$

$$y - 10 - x < -5$$

$$y + 5 \geq -5$$

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (**) \end{cases}$$

(**)

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$2x^2 + xy - 8x - y^2 + 4y = 0$$

$$2x^2 + x(y-8) - (y^2 - 4y) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (y-8)^2 + 8(y^2 - 4y) = y^2 - 16y + 64 + \\ &+ 8y^2 - 32y = 9y^2 - 48y + 64 = (3y-8)^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{D} = |3y-8|$$

$$x = \frac{-y+8 \pm |3y-8|}{4} = \cancel{-y+8}$$

$$\text{т.е. } |3y-8| = \pm(3y-8), \text{ но } \pm|3y-8| = \pm(3y-8)$$

$$x = \frac{-y+8 \pm (3y-8)}{4} \quad \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = 4-y \end{cases}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0 \\ \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = 4-y \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} & (1) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0 \\ x = 4-y & (2) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ \ln \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\ln \frac{1}{2}}_{\neq 0} \ln \frac{4}{y} = 0 \\ & \begin{cases} \ln \frac{1}{2} = 0 \\ \ln \frac{4}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ln \frac{4}{y} = 0 \Rightarrow \frac{4}{y} = 1 \Rightarrow y = 4 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (*) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (**) \end{cases}$$

$$(*) \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\text{О.Д.З:} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

прологарифмируем обе части уравнения по основанию e

$$-\ln(x) \ln(x^2 y^4) = \ln(y) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$-\ln(x) (\ln x^2 + \ln y^4) = \ln y (\ln y - \ln x^2)$$

$$-\ln(x) (2 \ln|x| + 4 \ln|y|) = \ln y \ln y - 2 \ln y \ln x$$

т.к. по О.Д.З. $x > 0$ и $y > 0$, то

$$|x| = x \quad \text{и} \quad |y| = y$$

$$-2 \ln x \ln x - 4 \ln x \ln y = \ln y \ln y - 2 \ln x \ln y$$

$$-2 \ln x \ln x + 3 \ln x \ln y - \ln y \ln y = 0$$

$$-2 \ln x \ln x + 2 \ln x \ln y + 1 \ln x \ln y - \ln y \ln y = 0$$

$$-2 \ln x (\ln x - \ln y) + \ln y (\ln x - \ln y) = 0$$

$$(\ln x - \ln y) (\ln x^{-2} + \ln y) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0$$

вернемся к системе:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

имеют ~~одинаковые радиусы~~
одинаковые радиусы, то если
одна окр.-ть ~~не~~ касается
 $ABCD$ в т. $\in AB$, то и 3 другие
также, при этом, окр.-ти с
~~ц. в т. O_2 и O_4 также не касаются~~
~~в ещё как минимум 1 точке~~
 ~~$\Rightarrow$ получается что~~
ц. в т. O_4 и O_3 и окр. с ц. в
т. O_1 и O_2 пересекут AB в 1
и той же точке $\Rightarrow$ получится
2 точки пересеч. окружностей
с AB (1, если ~~не~~ все 4 окр.-ти
 $\cap AB$ в т. $(0; 0)$), но окр.-ти
с ц. в т. O_4 и O_2 при этом
пересекут $ABCD$ ещё как минимум
в 2х местах $\in AD$ и BC (или
 CD) $\Rightarrow$ такой случай не воз-
можен, $\Rightarrow$ окр.-ти с ц. в т. O_1 и
 O_3 не пересекают $ABCD$.
Случай, когда одна из окруж-

Заметим, что график верхнего
управления системы - "квадрат".
Обозначим ~~вершины~~ вершины
его углов как A, B, C и D (см.
рис. на стр. № 8).

Система будет иметь 2 решения
тогда $ABCD$ имеет с Γ на окруж-
ностью 2 м. пересечения,

это возможно либо когда 2 ок-
ружности касаются $ABCD$, а 2
~~другие~~ нет, либо когда 1 окруж-
ность пересекает $ABCD$ в 2х
точках, а 3 другие нет.

Заметим также, что ~~так как~~
из-за ограничений при ~~рас-~~
крытии модулей, каждая
окружность может существо-
вать только в "всей" координ-
атной сетке (см. рис.)

$\Rightarrow$ окружности с ц. в м. O_1 и O_2
могут иметь с $ABCD$ только 1
точку пересечения, которая при-
надлежит отрезку AB .

Так как все 4 окружности рас-
положены симметрично и ~~и~~

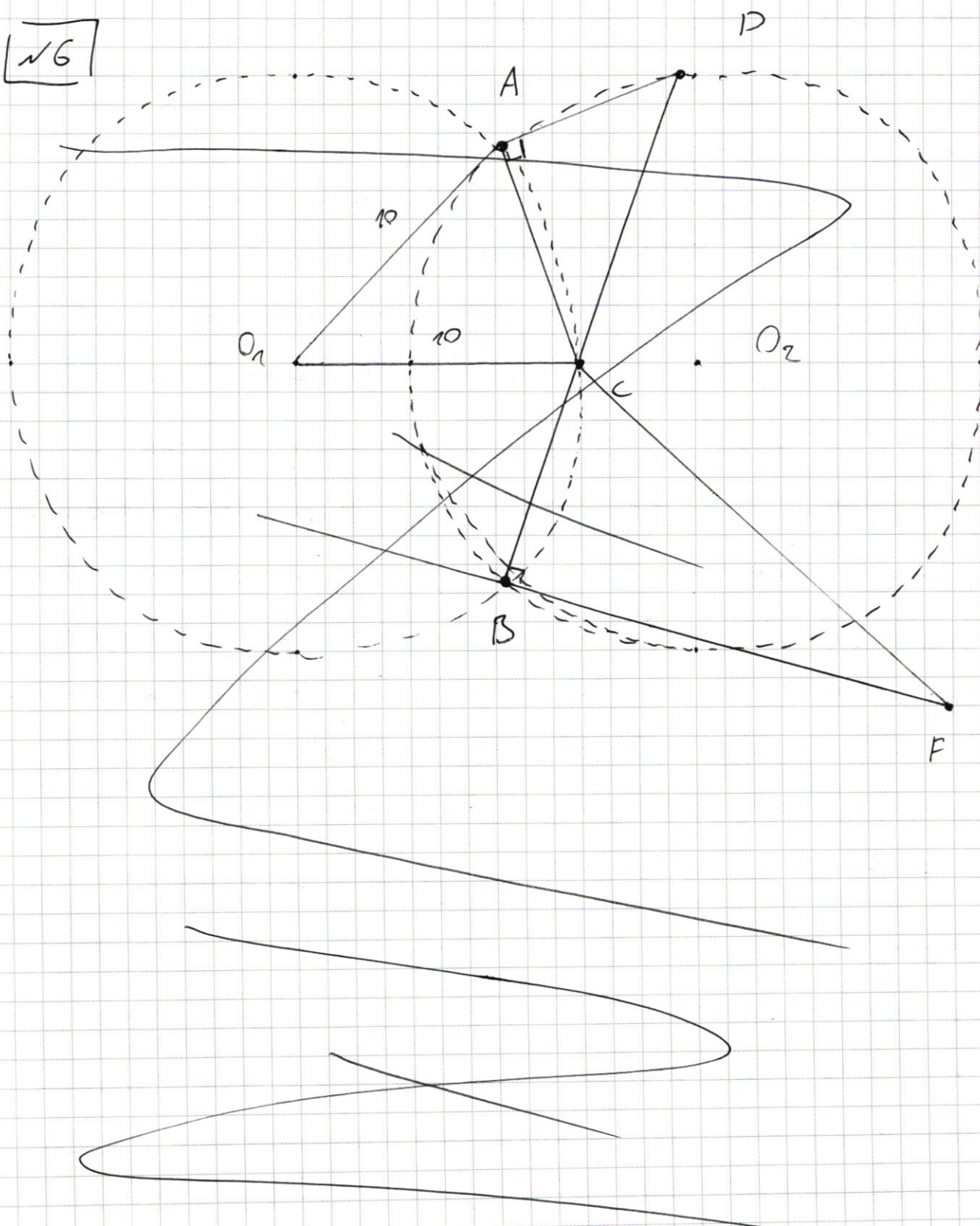
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

точек с φ . В т. O_4 или O_2 $\cap$
 $ABCD$ в 2х точках, а другая
 нет не возможно, т.к. радиусы
 одинаковые и расстояние от
 центров окр.-тей до $ABCD$ -
 одинаковое $\Rightarrow$ если одна из
 окр.-тей с φ . в т. O_4 ~~или~~ или
 O_2 $\cap$ $ABCD$ в 2 точках, то и
 другая тоже. $\Rightarrow$ Единствен-
 ный случай, когда может быть
 2 точки пересечения - когда
 окр.-ти с φ . в т. O_2 и O_4 каса-
 ются $ABCD$ в 1 точке.
 Этот случай возможен при
 $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$, при этом
 окр.-ти с φ . в т. O_1 и O_3 не
 пересекут $ABCD$ т.к. расст.
 от O_3 до A и от O_1 до B (наи-
 меньшее из возможных рас-
 стояний до AB) $= \sqrt{5^2 + 7^2} > 7$
 (по т. пифагора) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 49$$

Ответ: $a \in \{49\}$

✓ 6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[N1]

Разложить число 9261 на простые множители:

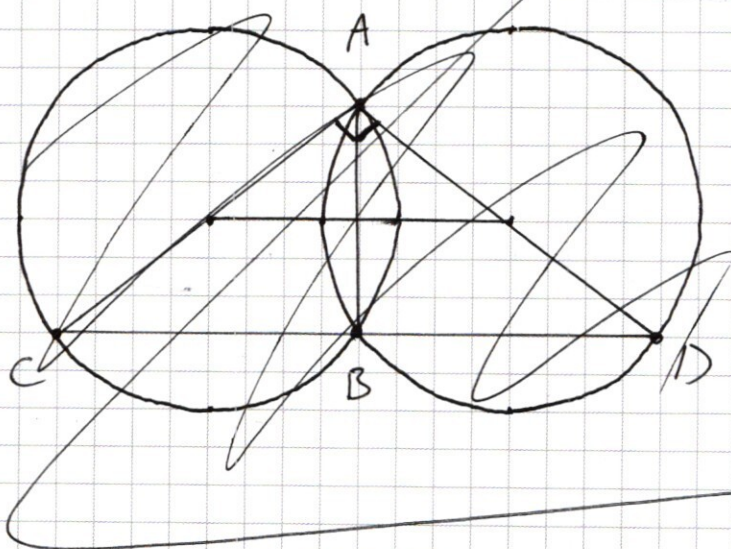
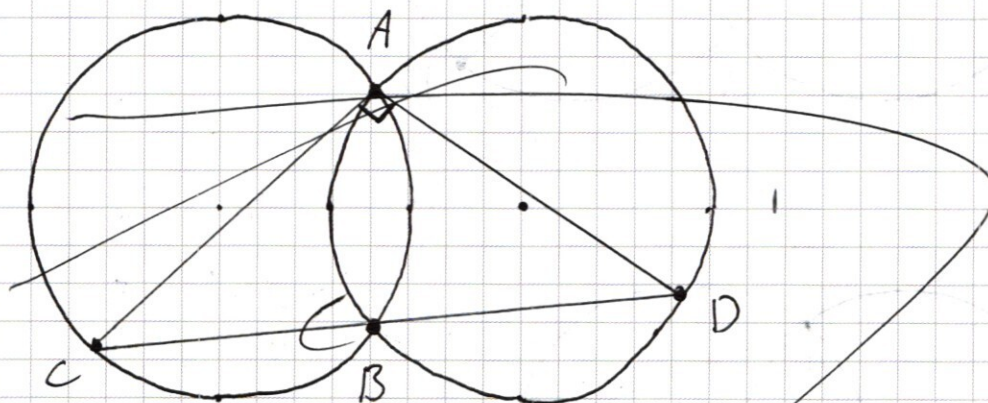
$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$$

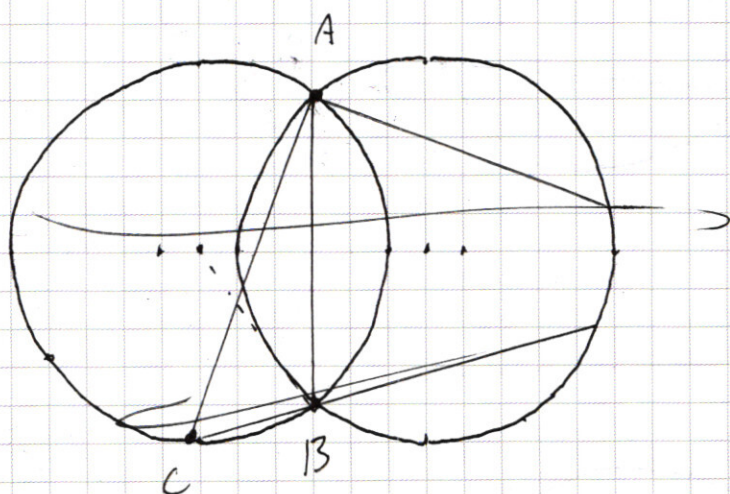
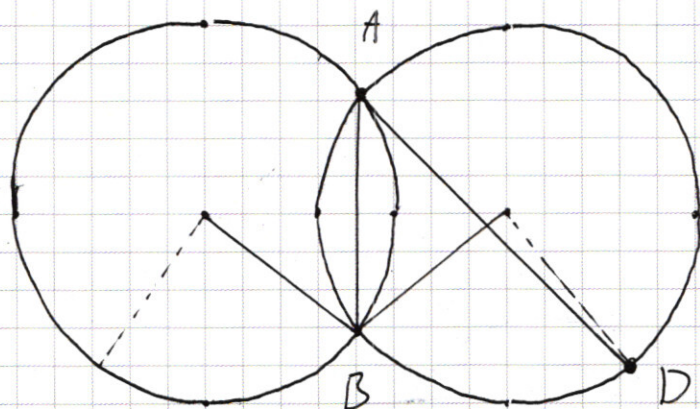
$\Rightarrow$ восьмизначное число, произведение цифр которого равно 9261, должно иметь в своём составе цифры $\{7, 7, 7, 3, 3, 3\}$ или $\{7, 7, 7, 9, 3\}$ т.к. 2 тройки можно заменить на 1 девятку, а использовать другие цифры, кроме 7 и 3 или 7 и 9, нельзя.

Остальные цифры числа не должны влиять на произведение $\Rightarrow$ они должны быть равны 1. Другие ~~наборы~~ ~~наборы~~ ~~наборы~~ наборы цифр не подойдут. Таким образом, искомого числа должны состоять из цифр $\{7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1\}$ или $\{7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1\} \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6





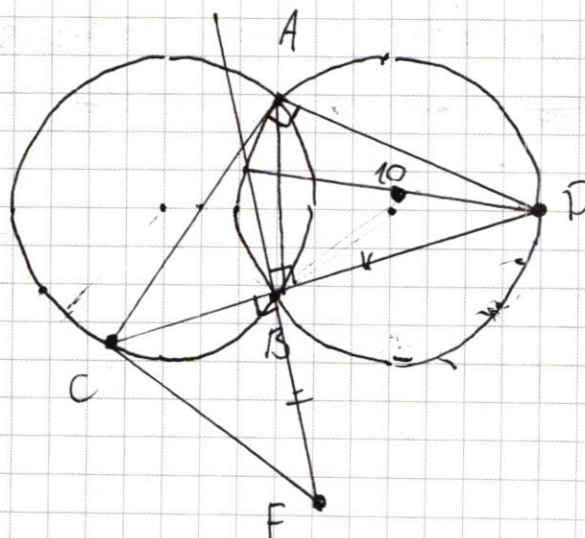
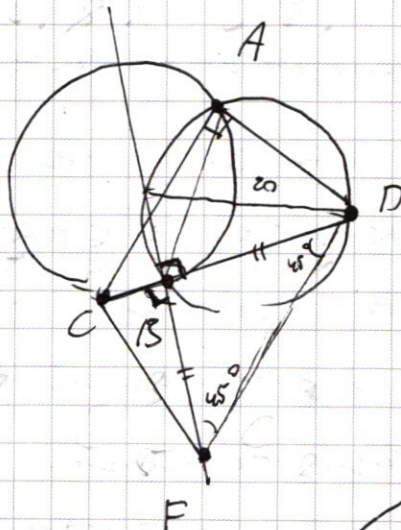
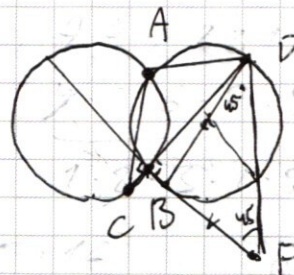
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\{7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1\} \leftarrow \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \quad (6)$$

$$\begin{matrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \quad (10)$$

$$7 \begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^2 \cdot C_7^3$$



№1

разложить число 9261 на
простые множители:

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~это число~~

восемизначное число, произ-
ведение цифр которого
равно 9261 должно состо-
ять из цифр $\{7, 7, 7, 3, 3, 3,$
 $1, 1\}$ или $\{7, 7, 7, 3, 9, 1, 1, 1\}$ и.и.

получить другие цифры ~~не~~,
кроме 9, перемножая 7 на 7,
~~7 на 7~~ или 7 на 3 - нельзя
единицы должны входить в
состав числа и.и. они не
влияют на произведение.
другие комбинации цифр
~~невозможны~~ невозможны.