МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\underline{9261} = 3^3 \cdot 7^3$, значит ~~оно~~ восьмизн. число должно состоять либо из двух единиц, трёх троек и трёх семерок, либо из трёх единиц, одной девятки, одной тройки и трёх 7

Рассм. I вар., расположив единицы, у нас есть $8 \cdot 7 : 2 =$ $= 28$ вариантов, затем расположим 3 тройки это $\frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20$ вариантов в оставшиеся места встанут семерки, получается в I случае у нас $28 \cdot 20 = 560$ вариантов.

II случай: расположим сначала 9 - есть 8 вар., затем 3 - 7 вариантов, затем три 1 — $6\cdot5\cdot4:3! = 20$ в, в оставшиеся места встанут семерки. Итого $8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$ вариантов.

Ответ: $560 + 1120 = 1680$

N3 Из I уравнения и области опред. логарифма и числа в степени $\Rightarrow y > 0$ и $\frac{y}{x^7} > 0$, а значит $x > 0$ и $y > 0$, тогда прологарифмируем I урав-ние и запишем его как:

$$-(2\ln x + 4\ln y) \cdot \ln x = \ln y(-7\ln x + \ln y)$$

$$(\ln x - \ln y)(2\ln x - \ln y) = 0$$

Значит либо $x = y$ либо $x^2 = y$

II уравнение системы легко раскладывается на множители: $(2x - y)(x + y - 4) = 0$

Откуда либо $y=2x$; либо $y=4-x$

Решим все возможные системы пары уравнений: Решение I сис-му:

$$\begin{cases} x=y \\ y=2x \end{cases}$$ Решение: $(0,0)$, но оно не подходит в область определения

$$\begin{cases} x^2=y \\ y=2x \end{cases}$$ Решение: $(2,4)$ и $(0,0)$, но второе не подходит в область определения.

$$\begin{cases} x=y \\ y=4-x \end{cases}$$ Решение: $(2,2)$

$$\begin{cases} x^2=y \\ y=4-x \end{cases}$$ Два решения из квадратного уравнения $x^2+x=4$:

$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Но второе не подходит под область определения.

Ответ: $(2,4)$; $(2,2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

№5 График I уравнения — квадрат с вершинами в точках $A(5;0)$, $B(-5;0)$, $D(5;-10)$, $C(-5;-10)$ т. к. при подстановке в урав-ние $x=5$ или $x=-5$ имеем уравнение относительно y, решение которого на плоскости выглядит как 2 отрезка: AD, BC; аналогично при подстановке $y=0$ или $y=-10$ имеем уравнение относит. x, решение которого на плоскости выглядит как два отрезка AB, CD

При A меньше 25 график II уравнения — окружности с центрами в точках $E(12;5)$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$F(12;-5)$, $G(-12;5)$, $H(-12;-5)$ с примерным $r=\sqrt{a}$
Затем, при увелич. a окружности начинают пересекаться и от них остаются только $\frac{1}{4}$ в каждой четверти плоскости.

~~При~~ Увеличив a от 0 до ∞, замечаем, что:

1) радиус=7 $(a=49)$ 2 окружности с центрами в точках F, H касаются двух отрезков AD, BC соответственно – 2 решения

2) $r=13$ $(a=169)$ окружности будут иметь две общие точки с квадратом $M(0;0)$ $N(0;-10)$ – 2 решения.

Ответ: $a=49$, $a=169$

N 7 Заметим, что:

$$76+2\cdot(2^{32}-1)\cdot x \geqslant 2^x+3\cdot 2^{34}$$

$$2^{33}(x-6)+(64-2^x)+2(6-x)>0$$

при $x=-6$ левая часть меньше или равна 0, т.к. в этом случае: $2^{33}(x-6)+(64-2^x)+2(6-x)\leqslant -2^{33}+64+12<0$

при $x=6$ левая часть $=0$, значит $x\geqslant 7$

Также при $x=38$ левая часть $=0$.

$$2^{33}(x-6)+(64-2^x)+2(6-x)=2^{33}\left(x-6-2^{x-33}\right)+76-2x.$$

Так как при $x>38$ верно $x-6-2^{x-33}<0$, значит и левая часть <0

При $7\leqslant x\leqslant 37$ же неравенство верно, т.к. $x-6-2^{x-33}>0$

Кол-во пар (xy), удовлетворяющ неравенства =:

$\sum_{x=7}^{37} \left(2^{33}(x-6)+(64-2^{33})+(2(6-x))\right) =$

$\sum_{x=1}^{31} \left(2^{33}\cdot x + 64(1-2x) - 2x\right) = (2^{33}-2)\cdot\frac{31\cdot 32}{2} +$

$+64\cdot 31 - 64\cdot 2(2^{31}-1) = 2^{33}\cdot 31\cdot 16 + 31\cdot 32 - 128\cdot 2^{31} +$

$+128 = 2^{33}\cdot 464 + 1120.$

Ответ: $2^{33}\cdot 464 + 1120.$

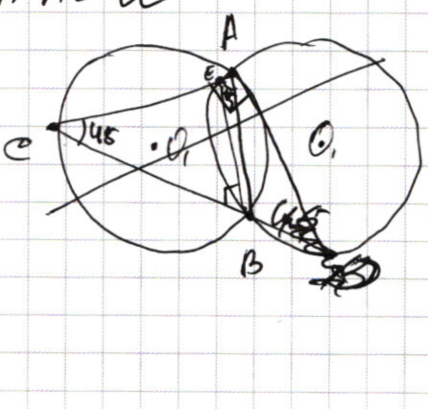
№6 ∃ O_1 и O_2 – центры окружности 1 и 2 соответственно, а R – их радиус. Так как окружности равны и хорда AB – общая, получаем $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ т.к. $\angle CAD = 90^\circ$
∃ E – вторая точка пересеч. CA со второй окружностью, тогда $\angle AEB$ опирается на AB, значит $\angle CAB = 45^\circ$, и значит $BC = BE$ и $\angle CBE = 90^\circ \Rightarrow B \in EF$ и $O_2 \in ED$

Получаем: (а)

$BC = BE$, $BF = BD$, $\angle CBF = \angle EBD = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBF = \triangle EBD \Rightarrow$
$BF = ED = 2R = 20.$

Так как $BF = BD$ получаем $\angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$.

Получаем, что $DF \parallel AC$ и



$S_\triangle ACF = ?$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 7.3, . . . , 71 9261

N1 18 : 3 на 9 на 6 8

$9 \cdot 9 = 81$

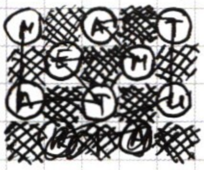
$1 \cdot 1 = 1$

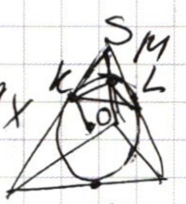
$7^3 3^3 = 9261$

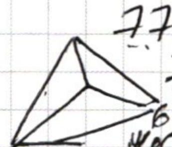
777333 11

$7^3 \cdot 3^3 \cdot 1^2$

$9 - 18\cos^9 x$





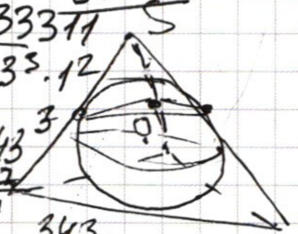


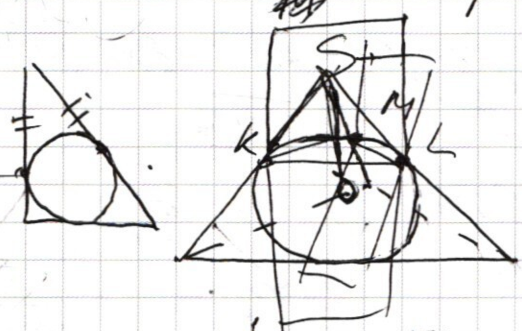
$9 \cdot 3 \cdot 1$

KS-радиус

343 · 27

$SK = SL = SM$





9261

$8a + 8x + 8y + 8z + 8k + 8l + 8v + 8w = 9261$

9261 / 8 = 1157

$\cos 9x =$

56 · 20 = 1120

56 + 56 = 1120

$\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$

$1 - 9\cos^9 x$

~~$9 - 18\cos^9 x$~~

$(4{,}5 - 9\cos^9 x) - (2{,}5 - 5\cos^5 x - \sqrt{2} \cdot 2 - 4\cos^4 x)$

26.178.

84 · 7 = 588

588 · 2 = 1176

sin9x

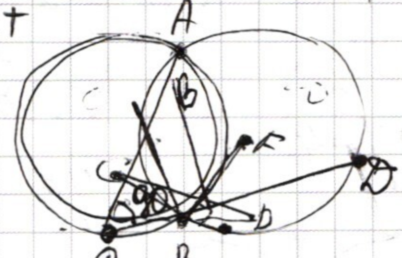
1200 / 333

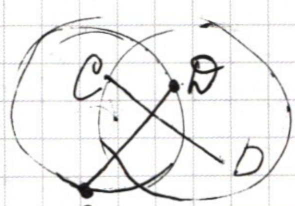
999 / 33

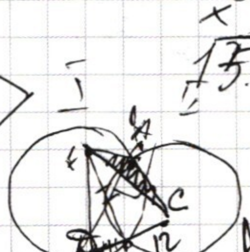
3428

15712

333 · 5 = 1665







ACF!

CF! D

33 · 73 333

333 · 4 = 1332

1133

30 · 4

фракторман

120 : 2

60

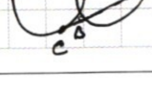
120 : 3 = 40

1200 / 333

3!

6 · 5 · 4 · 3!

333 · 3 = 999



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(1) $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y)}$ $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^7}$ $\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = \frac{1}{\ln x^7}$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = 1^{-\ln x^7}$ $\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}} = \frac{1}{\ln x^7}$ 256

$\frac{1}{y^{4\ln x}} = \frac{1}{\ln x^7}$ $16 \times 16 = 96$ 3 $\frac{1}{1^2\cdot y^{4\ln x}} = \frac{1}{\ln x^7}$

$\frac{16}{256}$

(2) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$ $y^{-4\cdot\ln x} = \ln^{-x^7}$

$\left(\frac{1}{y^4}\right)^{\ln x} = \ln x^7$

$y(y-x-4) - x(2x-8) = 0$

$y\cdot(y-x-4) = x\cdot(2x-8)$ $y^2 - yx - 4y = 2x^2 - 8x$ $| : x$

$y^{-4\ln x} = (\ln x^{7})^{-1}$ 76^2 $\frac{y^2}{x}$

$y^{-4\ln x} = \frac{1}{7\ln x}$ $\times 4$ $\frac{\log_a b}{\log}$ $\log_a b \to \log_b b^{3}$

$y^{-4\ln x} = (7\ln x)^{-1}$ 304 $\frac{\log_b a}{\log_b b} = \frac{1}{\log_b a}$

$y^{-\ln x^4} = (7\ln x)^{-1}$

$\log_3 9 = 2$ $\frac{1}{2}$

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$\log_9 3 = \frac{1}{2}$ $9^{\frac{1}{2}}$ 3

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$y < 2^{\log_2 76} + 2^{\log_2 4}(2^{\log_2 2^{32}} - 1^{\log_2 2})x$ $\cancel{y^2 + yx + 4y = 2x^2 + 8x}$

$y < \log_2 76 + \log_2 4(\log_2 4^{32} - \log_2 2)x$ (-1)

$2\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 4 8 16 32 64 128 2^{21}

$y < 76\cdot 4\left(\frac{4^{32}}{2}\right)\cdot x$ $\ln y(-7\ln x)(\ln y)$ $\frac{2}{2}$ 256

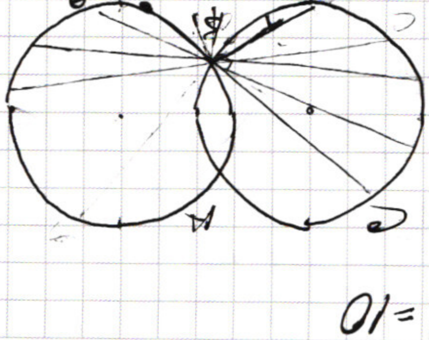
$y \leq 304\cdot(2^{32})x$

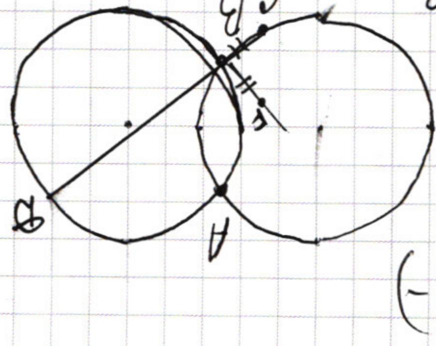
A

$(2x-y)(x+y-4) = 0 \Rightarrow y = 4-x$

$y = 2x$

$C(-5;-10)$





$(-5 -10)$

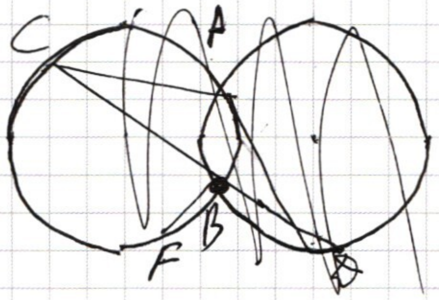
$O1 = y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№3 $y>0$ $\frac{y}{x^7}>0 \Rightarrow$

$x>0$ и $y>0$

3 ур. $-(2\ln x+4\ln y)\cdot \ln x = -\ln y(-7\ln x+\ln y)$

$x=y$ $x^2=y$

5 ур. $(2x-y)(x+y-4)=0$

$x^2+x-4=0$

$1+4=5=(\sqrt5)^2$

$y=2x$; $y=4-x$

$\begin{cases} x=y \\ y=2x \end{cases}$ $0,0 \notin ООФ$

$\begin{cases} x^2=y \\ y=2x \end{cases}$ $(2,4)$ и $0,0 \notin$

$x^2+x-4=0$

$\begin{cases} x^2=y \\ y=4-x \end{cases}$ $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$ и $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$,

$\begin{cases} x=y \\ y=4-x \end{cases}$ $(2,2)$

$12+10+10+3=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$ $=35$ $\frac{8}{35}$

$(|x|-12)^2\geq0$

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$

$|x|-12\geq0$

$|x|\geq12$ $x\geq12$

$(x-12)^2+(y-5)^2=a$

$(|y|-5)^2\geq0$

$(x^2-24x+144)+(y^2-10x+25)=a$

$|y|-5\geq0$

$x^2-24x+144+y^2-10x+25=a$ $\Pi.Ч=0$

$|y|\geq5$

$4,5-9\cos^9x-2,5+5\cos^5x-2\sqrt2-4\cos^4x+9\cos$

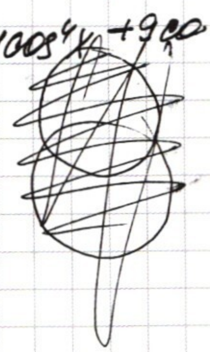
$y\geq5$

$S(KLM)=?$
$\angle KSO=?$

F summary 6

$SO\perp(ABC)$

$2^{33}+64+12\geq0$

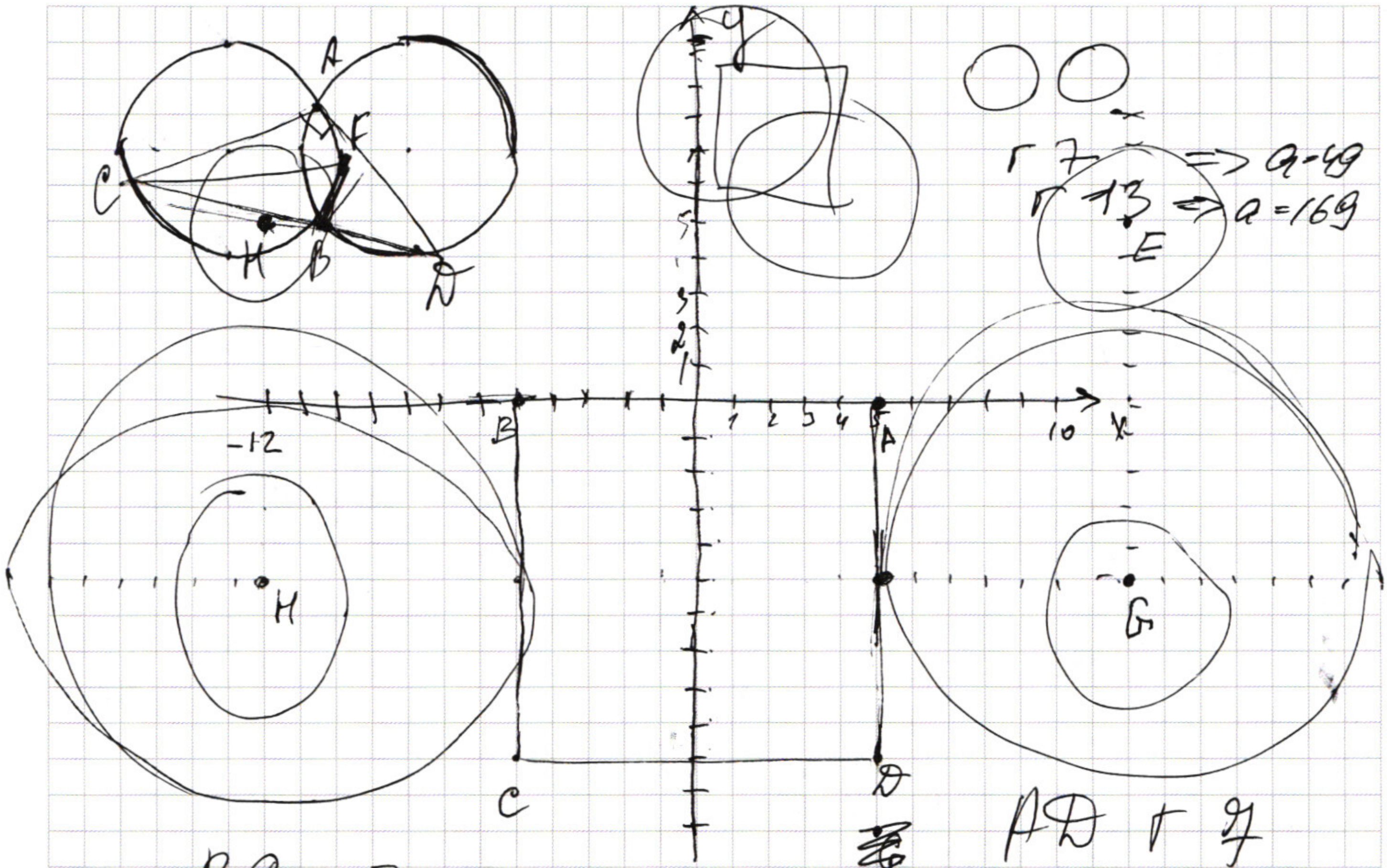


$2-2\sqrt2-9\cos^9x+5\cos^5x-4\cos^4x$

$2(1-\sqrt2)-9\cos^9x-4\cos^4x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



BC r 7

H

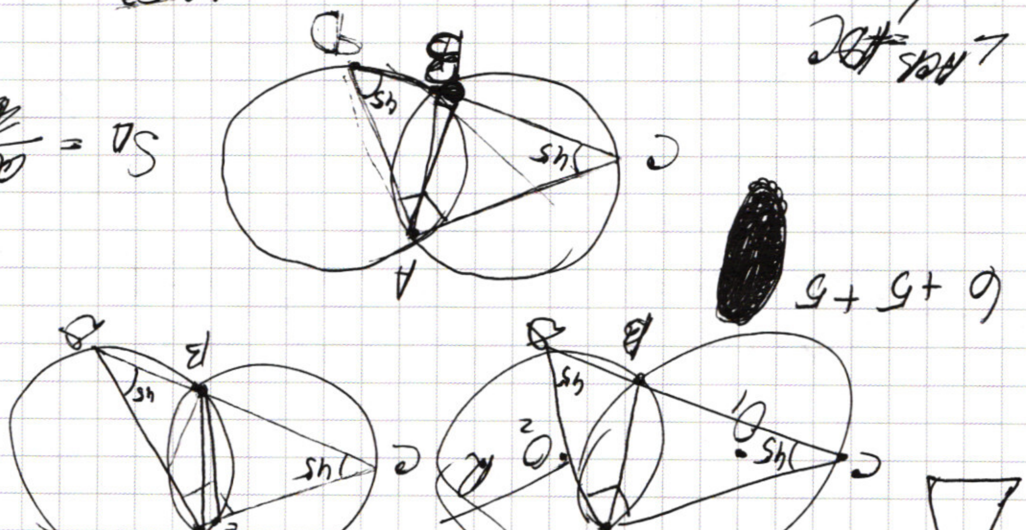
AD r 9

Q

$3+5+5+6$
19

$S_\triangle = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$6+5+5$



$R = 10$

$DF \parallel AC \Rightarrow$ прямые DF

$S_{\triangle BDF} = S_\triangle$

$2R = \frac{AB}{\dots}$

$DF \parallel AC \parallel BF$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)