

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

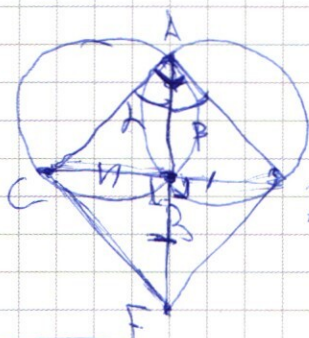
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

а)



Дано: $BE \perp CD$
 $BE = BD$
 $R = 10$

$\alpha = \angle CAB$
 $\beta = \angle DAB$

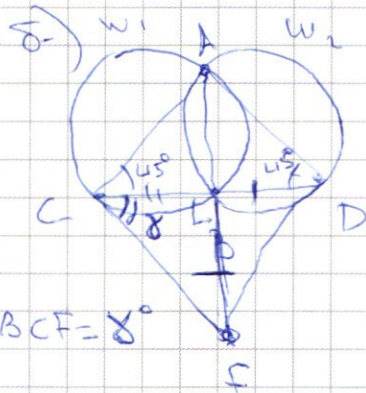
$$1. CF^2 = CB^2 + FB^2 = CB^2 + BD^2$$

$$2. \frac{CB}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow CB = 20 \sin \alpha$$

$$3. \frac{BD}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow BD = 20 \sin \beta = 20 \sin(90 - \alpha) = 20 \cos \alpha$$

$$4. CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} =$$

$$= \sqrt{400 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 20$$



б) ω_1 и ω_2 AB касаются $\Rightarrow$ опис. на
мех $\Rightarrow$ углы равны: $\angle ACD = \angle ADC$
 $\Rightarrow$ также $\angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

$$CF = 20$$

$$AC = CD \cdot \sin 45^\circ = (CB + BD) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$$

$$BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = 16$$

$$\cos 8^\circ = \frac{CB}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(45 + 8)}{2} = 20 \cdot 16 \cdot \sin 53^\circ$$

$$\sin 8^\circ = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 \cdot (\sin 45 \cdot \cos 8^\circ + \cos 45 \cdot \sin 8^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) =$$

$$= 7\sqrt{2} \cdot 16 = 112\sqrt{2}$$

№7 9261 = $3^3 - 7^3 \Rightarrow$ можно т.к. в этом наборе
можно переключить только 3, 3=5 тогда получить
числа то существует фра разложенных набор
цифр в числе:

а) 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1 кол-во способов расстав. цифр $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$

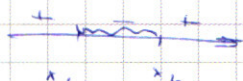
б) 5, 3, 7, 7, 7, 7, 1, 1 кол-во способов расстав. цифр $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$

$$\text{итого: } \sum = C_8^3 - C_5^3 \cdot C_2^2 + C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \\ = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 1 + 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot 1 = \\ = 56 \cdot (5 \cdot 2 + 5 \cdot 4) = 56 \cdot 30 = 1680$$

№ 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{33} - 1)x \end{cases}$$

$$1) \quad 2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + (2^{33} - 2)x \\ 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 76 - (2^{33} - 2)x < 0$$



$$x = 6 \quad 6 + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2^{34} \cdot 3 + 12 = 0$$

$$x = 38 \quad 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2^{34} \cdot 19 + 76 = 0$$

$$x \in (6; 38)$$

конечно у при опрех x:

$$76 + (2^{33} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

⇒ всего sum:

$$\sum_{x=0}^{36} (2^{33} - 2)x - \sum_{x=0}^{36} 2^x = (76 - 3 \cdot 2^{34}) \cdot 32 + (2^{33} - 2) \cdot \frac{2^{37} - 2}{2} - \\ - 2^0 \frac{2^{37} - 1}{2 - 1} = 76 \cdot 32 - 3 \cdot 2^{34} \cdot 32 + (2^{33} - 2) \cdot 1633 - \\ - 2^0 \cdot 2^{33} + 2^0 =$$

$$= 76 \cdot 32 - 2^{34} \cdot 32 \cdot 3 + 2^{34} \cdot 8 - 33 = 32 \cdot 33 =$$

$$= 2^5 \cdot 2^{34} + 32 - 2 = 32(76 - 33 + 2) +$$

$$+ 2^{34} (-32 \cdot 3 + 8 \cdot 33 - 32) =$$

$$= 32 \cdot 45 + 2^{34} \cdot 136 = 2^{34} \cdot 136 + 1440$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. разберём несколько случаев:

$$1) \begin{cases} y+x+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+10=10 \\ y=0 \\ -5 < x < 5 \end{cases}$$

подставить

$$2) \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y=20 \\ y=-10 \\ -5 < x < 5 \end{cases}$$

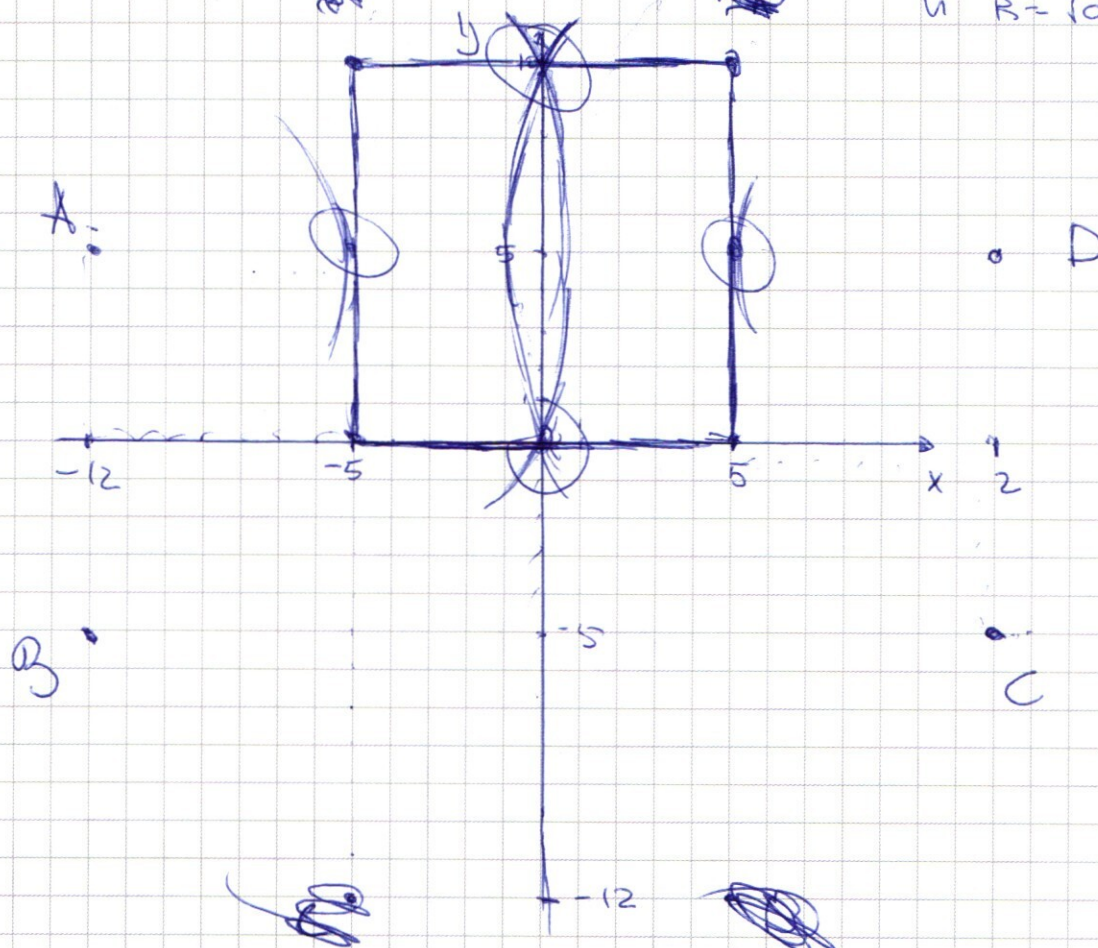
подставить

$$3) \begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=10 \\ x=5 \\ -10 < y < 0 \end{cases}$$

подставить

$$4) \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=-10 \\ x=-5 \\ -10 < y < 0 \end{cases}$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a^2 \quad \rightarrow \text{это 4-ре окр. с центрами в точках } (12; 5), (-12; 5), (12; -5), (-12; -5) \text{ и } R = |a|$$



A, B, C, D - центры окружностей

при $a^2 < 7$ общих точек не будет, при $a^2 = 7$ будет ~~одна~~ (от окр A и B) при $a^2 > 7$ по две общ. То от каких окр.

окр В и С не мож. иметь общ. точек, т.к. не имеют
 общих точек.

~~так~~ Итак:

$$1) a^2 - 71 \Rightarrow a^2 = 49$$

$$2) \cancel{x+y} \left\{ \begin{aligned} (-x-12)^2 + (y-5)^2 &= 9 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 &= 9 \end{aligned} \right.$$

$$x=0$$

$$\left\{ \begin{aligned} 144 + (y-5)^2 &= 9 \\ y=10 \\ y-5 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 144 + 25 &= 9 \\ 169 &= 9 \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда: } \left\{ \begin{aligned} a &= 49 \\ a &= 169 \end{aligned} \right.$$

$$2 - \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x + \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$-2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) + \sqrt{2} \sin (4x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2\sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin (2x - \frac{\pi}{4}) + 2\sqrt{2} \sin (2x - \frac{\pi}{4}) \cos (2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin (2x - \frac{\pi}{4}) \left(\sin 7x - \cos (2x - \frac{\pi}{4}) \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right)$$

$$\sin (2x - \frac{\pi}{4}) = \left(\sin 7x - \sin \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) \right) = 0$$

$$\sin (2x - \frac{\pi}{4}) = 2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{4} &= \pi n \\ \frac{5}{2}x - \frac{3\pi}{8} &= \pi k \\ \frac{5}{2}x - \frac{3\pi}{8} &= \frac{\pi}{2} + \pi m \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2} \\ y &= \frac{2}{5} \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k \right) \\ x &= \frac{2}{5} \left(\frac{3\pi}{8} + \pi m \right) \end{aligned} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} &= y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ \Rightarrow \ln x^2 y^4 \cdot (-\ln x) &= \ln y \cdot \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 \ln x + 4 \ln y) \cdot (-\ln x) &= \ln y \cdot (\ln y - 2 \ln x) \\ 2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y + \ln^2 y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln y = 0 \\ 2 \ln x - \ln y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$2) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$x = y$$

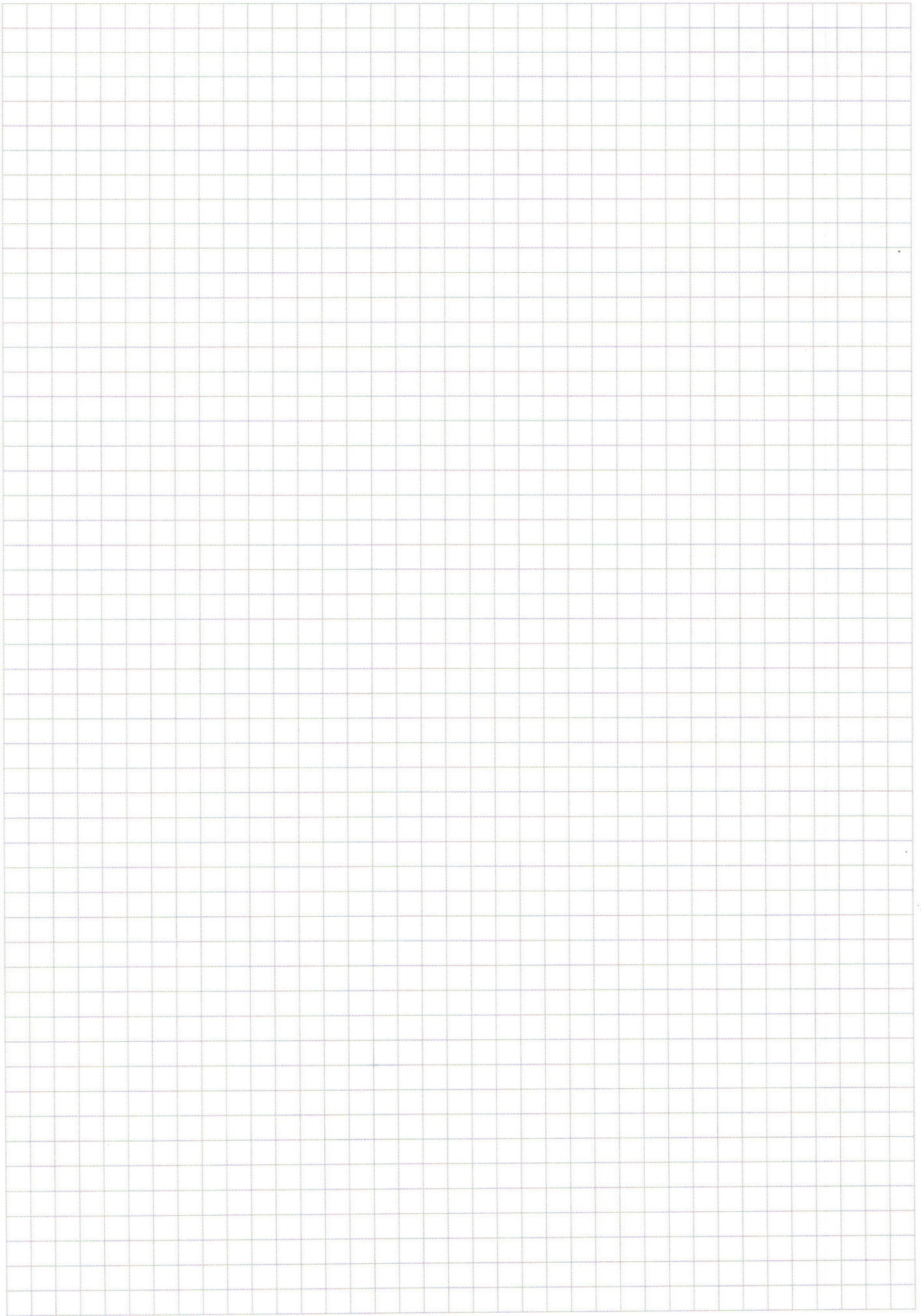
$$(x - 2x)(x + x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ (x^2 - 2x)(x^2 + x - 4) &= 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ x &= \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ н.к.} \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + (2^{33} - 2)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} - 76 = (2^{33} - 2)x < 0$$

$x \geq$

$x = 6$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2^{34} \cdot 3 + 12 \leq 0 \quad \text{①}$$

38

$$(2^{38}) + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2^{34} \cdot 19 + 12 \leq 0$$

2^{34}

$n = 8, 16$

при $0 < x < 6$

$$= 2^{34} \cdot 19 - 2 \cdot 2^{33} = 2^{34} \cdot 17$$

$$x \in (6; 38)$$

конечное количество x .

$$76 + (2^{33} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$\sum_{6}^{38}$

$$76 + (2^{33} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} = (76 - 3 \cdot 2^{34}) \cdot (38 - 6) +$$

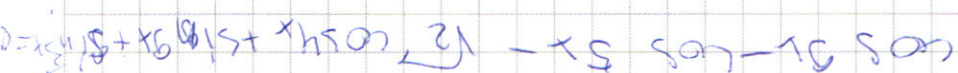
$\sum_{6}^{38}$

$$+ \sum_{6}^{38} (2^{33} - 2)x - \sum_{6}^{38} 2^x = (76 - 3 \cdot 2^{34}) \cdot 32 +$$

$$+ (2^{33} - 2) \cdot \frac{(38 - 6)(38 - 6 + 1)}{2} -$$

$$- 2^6 \cdot \frac{2^{33} - 1}{2 - 1} = 76 \cdot 32 - 3 \cdot 2^{34} \cdot 32 + (2^{33} - 2) \cdot 32 \cdot 65 -$$

$$= 2^6 \cdot 2^{34} + 2^6 = 76 \cdot 38 = 16 \cdot 33 +$$



$$\begin{array}{r} 136 \\ \times 28 \\ \hline 1088 \\ 2720 \\ \hline 3808 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ \hline 8 \\ 23 \\ 23 \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$= 32(26 - 33 + 2) + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{48}$$

$$76.32 = 8 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 32.32$$

2

20	91	8	5	2	4
	4	2	2	1	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

92.657 gewicht in g

g s s

$$\begin{array}{r} 5261 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

5261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7

$$\begin{array}{r} 5261 \overline{) 3087} \\ \underline{-9} \\ 026 \\ \underline{-21} \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3687 \text{ B} \\ 3 \overline{) 10293} \\ \underline{9} \\ 108 \\ \underline{9} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$9201 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$C_3 \cdot C_3 = C_2$$

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 5 \\ \hline 92 \\ - 12 \\ \hline 80 \end{array}$$

343

$$\begin{array}{r} 343 \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \hline 49 \end{array}$$

down 2 7 7 7 3 5

$$\textcircled{8} C_8^1 = C_7^1 + C_6^3 + C_5^3$$

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 7 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 1 + \cancel{\frac{2 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 7 \cdot 6}} + \cancel{\frac{2 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 7 \cdot 6}}$$

~~$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9$~~

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot (10 + 20) = 56 \cdot 30 = 1680$$

$$2 = \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x + \sin 9x \Rightarrow$$

$$3 - \left\{ \begin{aligned} (x^2 y^4)^{\frac{1}{5}} + \ln \frac{1}{x} &= y \ln \left(\frac{y}{x^{\frac{1}{5}}} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y - 0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

5.
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

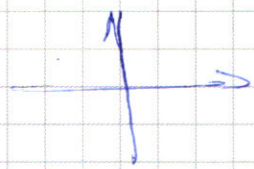
$\ln \frac{2}{9}$

$$16 + (2^{33} - 2) \times 2^x = 3 \cdot 2^{34}$$

$$\sum_{k=0}^{38} (16 + 3 \cdot 2^{34}) \cdot 32 + (2^{33} - 2) \cdot \frac{2^{33} - 1}{2 - 1} = 76 \cdot 32 - 3 \cdot 2^{34} \cdot 32 +$$

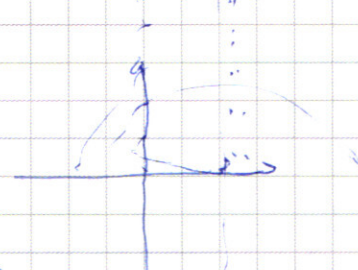
6

~~Handwritten scribbles~~



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$$



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$y < 76 + 2 \cdot x \cdot 2^{33}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

а) $\angle ACB = \angle ADB$

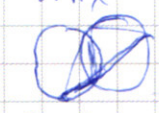
$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$

$y > 0$

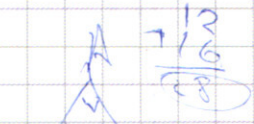
$$\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin x}$$

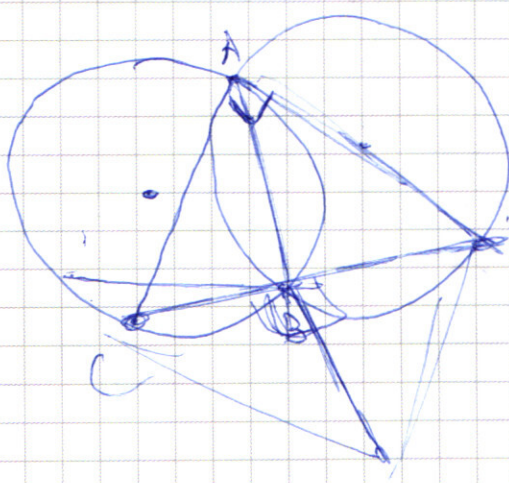
$$2 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot 2^{33}$$



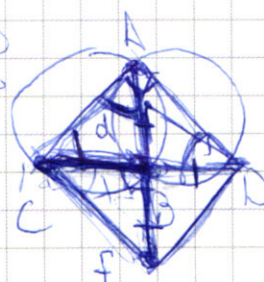
$$\begin{array}{r} 1000 \\ \times 144 \\ \hline 256 \end{array}$$



6.
R=10



$$\begin{array}{r} 2 \\ 81 \\ 32 \\ 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ 64 \\ 256 \end{array}$$



$$CF^2 = CB^2 + FB^2 = CB^2 + BD^2$$

$$CF^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow CF = 16$$

3. $CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} =$

$$= \sqrt{400 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 20$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} =$$

$$2R \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \sin \alpha = 20 \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin 45^\circ =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y + x + 5 > 0$
 $y - x + 5 > 0$
 $2y + 10 = 10$
 $y = 0$
 $-5 < x < 5$

2) $x + y + 5 < 0$
 $y - x + 5 < 0$
 $-y - x - 5 - y + x - 5 = 10$
 $-2y = 20$
 $y = -10$
 $-5 < x < 5$

3) $x + y + 5 > 0$
 $y - x + 5 < 0$
 $x + x + 5 - y + x - 5 = 10$
 $x = 5$
 $-10 < y < 0$

4) $x + y + 5 < 0$
 $y - x + 5 > 0$
 $x + 10 = 10$
 $x = 0$
 $y < -5$
 $-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$
 $-2x = 10$
 $x = -5$
 $-10 < y < 0$

5) $(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 9$

