

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.к.

$$\begin{array}{r} \times 34377^3 \\ 2793^3 \\ \hline 2401 \\ + 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

тогда если нам нужно 8-значное число, конкретно к набору из 3-х троек и троек 7-ок нужно добавить еще 2 единицы (I).

По симметрии может ли быть другой набор цифр: $7 \cdot 3 = 21$ $7 \cdot 7 = 49$ $3 \cdot 3 = 9$, значит может быть такой набор: (II) 777 39 111 - и больше никакого, т.к. либо нулевое для произведения или 2-значное - а такого ответа не может.

I: Теперь подсчитаем кол-во существующих чисел первого вида (333, 777, 111):

3. Шестерки можно установить $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ способами, т.к. первую на любое из 8 мест, вторую на любую из 7 и третью на любое из 6, ну и делим на кол-во перестановок из трех чисел.

2. Единицы можно поставить $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами, аналогично первую на любое из 5-ти мест, вторую на любое из 4-х и

делим на кол-во перестановок из 2-х, 3. Учитывая, что все оставшиеся места принадлежат тройкам, то таких чисел будет $56 \cdot 50 = 560$ (т.к. для каждой комбинации из 7-ок соответствует 10 комбинаций единиц).

II. Теперь построим сколько чисел второго вида:

3.4 п. I.1. мы знаем, что 7-ки можно расположить 56 способами.

2. Далее 9-ку можно поставить на любое из $8-3=5$ мест, след. 3-ку на любое из 4-х мест.

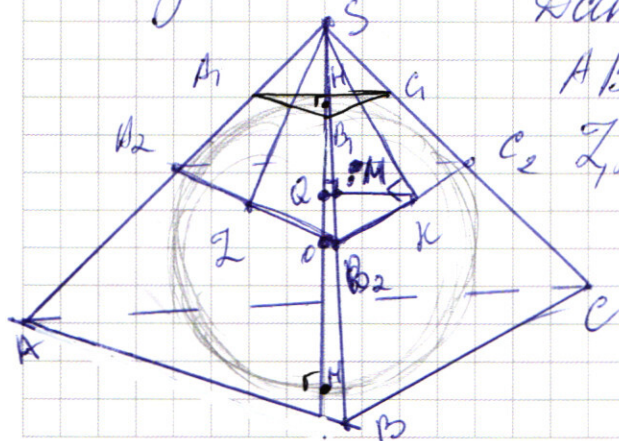
3. Все оставшиеся места принадлежат единицам, а значит таких чисел

$$56 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

Сложим полученные результаты и получим $1120 + 560 = 1680$ чисел с произведением цифр 9264.

Ответ: 1680

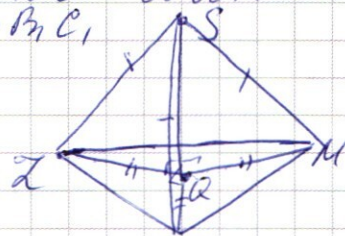
Задача №4



Дано: трехгранный угол $ABCS$; сфера касается в точках L, K, M ; $S_{A_1B_1C_1} = 1$; $S_{ABCS} = 16$
Найти: $S_{A_2B_2C_2}$ и $\angle KSO$
Решение:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- Заметим, что SZ , SK и SM - отрезки касательных, проведенные из одной точки $S \Rightarrow SZ = SK = SM$
- $ZO = ZO = MO$ - как радиусы сферы
- Исходя из равенства вышеназванных отрезков можно сделать вывод, что S и O лежат на перпендикуляре к плоскости (ZKM) , проходящем через центр опис. окр. около ΔZKM , т.к. если мы рассмотрим ΔZSQ , ΔKSQ и ΔMSQ (Q - центр опис. окр. ΔZKM), то все они будут равны по трем сторонам. $\Rightarrow SO \perp (ZKM) \Rightarrow (ZKM) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, где ABC - сечение уна плоскости $\perp SO$.
- Пусть H_1 - точка касания сферы с $(A_1B_1C_1)$, H - точка касания сферы с (ABC) , тогда $\left(\frac{SH_1}{SH}\right)^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{4}$, тогда пусть $SH_1 = 2x$, тогда $SH = 8x$, тогда $HH_1 = SH - SH_1 = 6x$, и мы знаем, что $O \in SH$ и OH_1 и OH равны как радиусы $\Rightarrow OH_1 = OH = \frac{SH}{2} = 3x$
- Рассмотрим ΔSKO , где $OK = 3x$, $OS = OH_1 + HS =$



$3x + 2x = 5x$ и $\angle SKO = 90^\circ$ (т.к. SK касательная) $\Rightarrow$

по Тл Пифагора $SK = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x \Rightarrow$

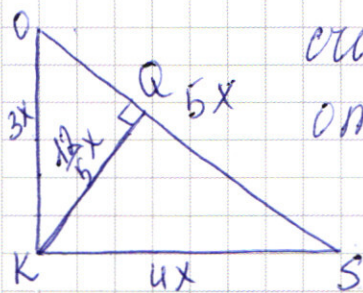
$$\sin \angle KSO = \frac{3x}{5x} = 0,6 \Rightarrow \angle KSO = \arcsin 0,6.$$

6. Заметим, что $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \left(\frac{SH_1}{SQ}\right)^2$, тогда найдем $SH_1 : SQ$

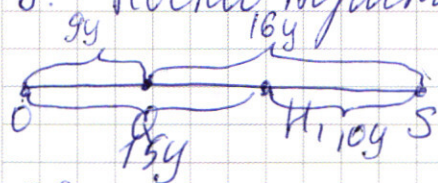
7. $SD \perp (ZKM)$; $Q \in SO$ и $Q \in (ZKM) \Rightarrow$

$\angle KQD = 90^\circ \Rightarrow KQ$ - высота в SKO , которая

считается как $KQ = \frac{KS \cdot KO}{OS} = \frac{12x^2}{5x} = \frac{12}{5}x$,
откуда $SQ = \sqrt{16x^2 - \frac{144}{25}x^2} = \sqrt{\frac{256}{25}x^2} = \frac{16}{5}x$,
значит $QO = \frac{9}{5}x$.



8. Посмотрим на отрезок OS:



$$OQ : QS = \frac{9}{16} = \frac{9}{16}, \text{ пусть}$$

$$OQ = 9y, \text{ тогда } QS = 16y, \text{ тогда}$$

$$OS = 25y; SH_1 : H_1O = \frac{2}{3} \Rightarrow SH_1 = 10y \text{ и } OH_1 = 15y, \text{ и}$$

что следует, что $SH_1 = 10y$ и $OH_1 = 15y$, и

$$SH_1 : SQ = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \Rightarrow \left(\frac{SH_1}{SQ}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

$$9. S_{A_1B_1C_1} = 1$$

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{\left(\frac{SH_1}{SQ}\right)^2} = \frac{1 \cdot 64}{25} = \frac{64}{25} = 2 \frac{14}{25} = 2,56$$

$$\text{Отдем: } \angle KSO = \arcsin 0,6$$

$$S = 2,56.$$

Задача №5.

$$|x+y+5| + |y-x+6| = 10$$

$$2(|x|-12)^2 + (|y|-6)^2 = 0$$

Давайте посмотрим как выглядит график первого выражения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I: $x+y+5 \geq 0$ $y-x+5 \geq 0$ $\left. \begin{array}{l} x+y \geq -5 \\ y-x \geq -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2y \geq -10 \\ y \geq -5 \end{array}$, тогда
все выражение раскрывается как
 $x+y+5+y-x+5 \geq 10 \Leftrightarrow 2y \geq 0 \quad y \geq 0$.

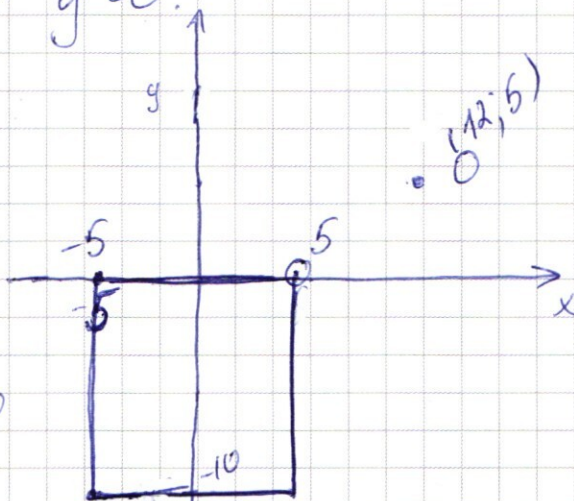
$x \geq -5 \quad -x \geq -5 \Rightarrow x \leq -5$

II: $x+y+5 \geq 0 \mid y-x+5 < 0$.

$x+y \geq -5 \mid x-y > 5$

$x+y+5-y+x-5 > 10$

$2x > 10 \quad x > 5 \quad y \geq -10$
 $y < 0$.



III: $x+y+5 < 0 \mid y-x+5 \geq 0$

$x+y < -5 \mid y-x \geq -5$

$\Rightarrow -x-y-5+y-x+5 \geq 10$
 $-2x \geq 10 \quad x \leq -5$

$y < 0$

$y \geq -5-5 = -10$

IV:

$x+y+5 < 0$

$y-x+5 < 0$

$\Rightarrow -x-y-5-y+x-5 = 10$

$x+y < -5$

$x-y > 5$

$-2y = 20$

$x < -5$

$x > -5$

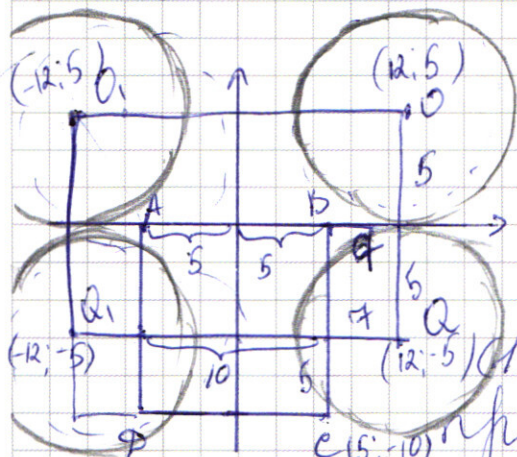
$-y \geq 10$

$y \leq -10$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$ - при помощи условия, изображенного на рисунке

Если упростить модель для второго выражения, то мы получим уравнение

окружности с центром в точке $(12; 5)$ и при $a \leq 25$ оно так и будет. Перенесём рисунок. Учитывая, что x, y стоят под знаком модуля, то центры таких окружностей будут лежать в точках $(12, 5), (-12, 5), (12, -5), (-12, -5)$, т.к. при раскрытии формулы всегда сохраняются $x^2 + 144 + y^2 + 25$, а значение $(-x-12)^2 = (x+12)^2, (-y-5)^2 = (y+5)^2$, т.е.



мы получаем подобную картинку. Заметим, что если радиус окружности меньше 5 или $a \leq 25$, то точек пересечения нет вообще, т.к. расстояние от центров до прямых $x = \pm 5$ это $12 - 5 = 7$, т.е. при $a = 49$ мы получаем ровно 2 решения, т.к. 2 внутренние окружности будут иметь по одной общей точке, а 2 внешние окружности не имеют вообще, т.к. $BO > 7$ как наклонная, при $a > 7$ внутренние окружности будут иметь по 2 точки пересечения, до момента, пока не начнут пересекать DC и не пересекать AD и BC , тогда $CQ = \sqrt{49 + 25} = BQ \Rightarrow a > (\sqrt{74})^2 = 74$
 $DQ = \sqrt{17^2 + 25} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314} = AQ \Rightarrow a < 314$, но при таких a внешние окружности будут иметь общие точки с внутренними

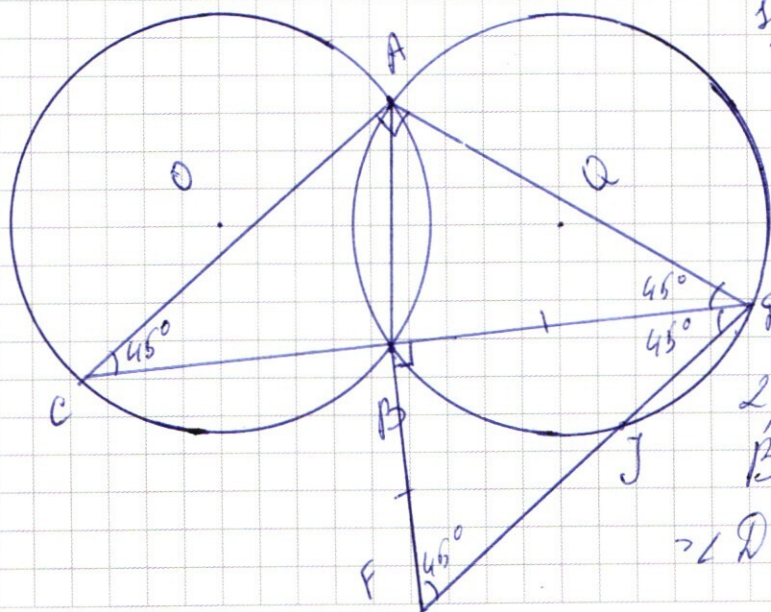
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

прямое условием, т.к. $O_1A = O_1B = O_1C = O_1D = O_1E$

Две вершины окружности будут иметь по 2 общие точки с $ABCD$ (квадратом), пока не пересекут их в точках с AD , при этом внутренние окр. при этом не будут иметь общих точек с $ABCD$, т.к. $O_1 \in AD$, $O_2 \in AD$.

jnareit $a = 0, C^2_{age} \quad 0, (-12, 5) \quad C(5, -10) \Rightarrow$
 $\overrightarrow{OC} \{17; -15\} \Rightarrow |OC| = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514} \Rightarrow$
 $a = 514$

Получаем 2 значения $a = 49$ и $a = 514$.
 Ответ: 49; 514
 Задача №6.



3) $\omega_1, \omega_2, m.k. R_1, R_2 \neq 0,$

$$V_{AB} \text{ of } u_1 = V_{AB} \text{ of } u_2$$
$$\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$$
$$\Rightarrow 45^\circ \Rightarrow AC, AD$$

2) $\triangle BDF$; $\angle B = 90^\circ$;

$$\angle BQ_2BF_2 > \angle BQF_2$$
 $\approx 1 \text{ DFB} \approx 45^\circ$

3) пусть $DF \cap \omega_2 = J \Rightarrow \angle BJ = 2\angle BDJ = 90^\circ \Rightarrow$

4) $\angle ADB = 45^\circ \cdot 2 = \angle ADB \cdot 2 = 90^\circ \Rightarrow A Q J$ - одна
прямая, но тогда $\angle ABJ = 90^\circ$, тогда

$$\angle BJA = \frac{1}{2} \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$$

$$AB = BJ, \text{ а } BA = 10\sqrt{2},$$

$$\text{т.к. } \angle AQB = 90^\circ$$

$$AQ = QB = 10, \text{ но}$$

$$\text{тогда } AJ =$$

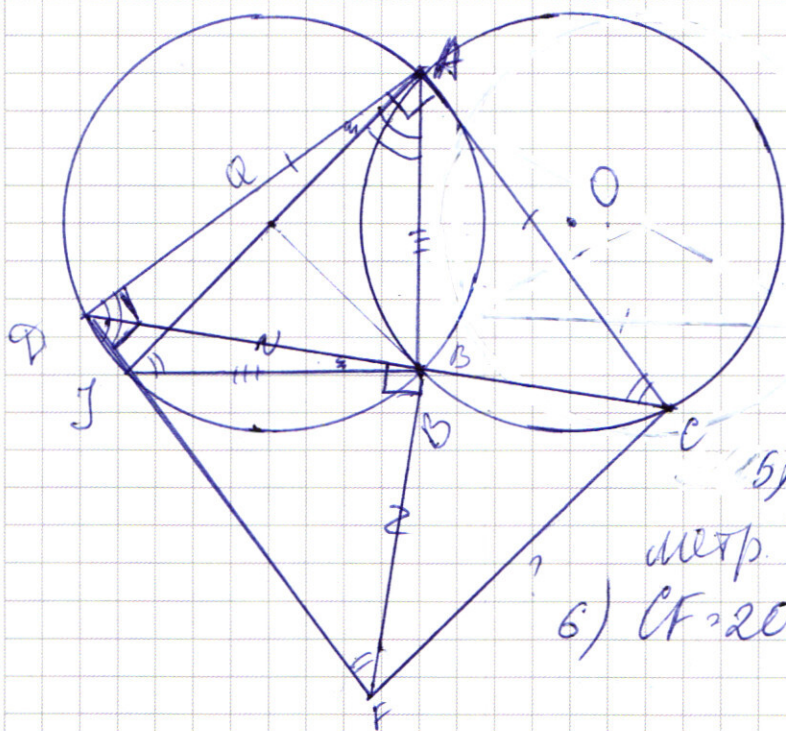
$$= \sqrt{BJ^2 + AB^2} =$$

$$= 2R = 20$$

5) $\angle ADF = 90^\circ$, т.т. AJ - диа-

метр.

6) $CF = 20$, т.к.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 3087 \overline{) 3} \\ 1029 \overline{) 3} \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 17} \\ 28 \overline{) 149} \\ 63 \\ 63 \\ 0 \end{array}$$

$$33.73$$

347 не переписываются

$$I: 33377711$$

$$II: 77793111$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 49 \\ \hline 143 \\ 2082 \\ \hline 1223 \\ \times 7 \\ \hline 8561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 49 \\ \hline 143 \\ 2082 \\ \hline 1223 \\ \times 7 \\ \hline 8561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 49 \\ \hline 327 \\ \times 343 \\ \hline 29 \\ \times 3087 \\ \hline 3 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$I: \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$56 \cdot 10 = 560$$

$$II: \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5} \quad \frac{7}{8-3=5}$$

$$9: 5 \quad 3: 4$$

$$56 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

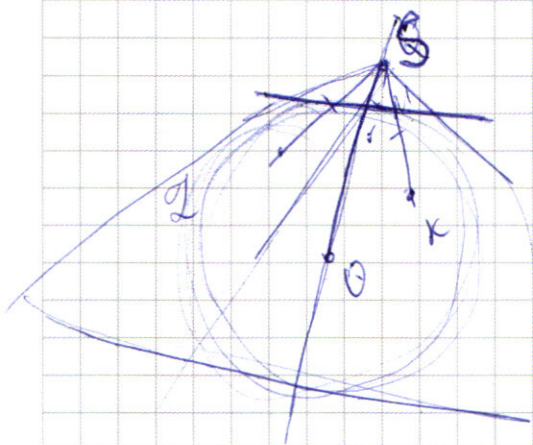
$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x = \cos(5x+4x) = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$\sin 9x = \sin(5x+4x) = \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x$$

$$\cos 5x \cos 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \cos 5x \sin 4x - \sin 5x \sin 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 + \sin 4x) - \sin 5x (\sin 4x + \cos 4x + 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$



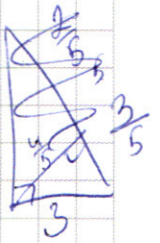
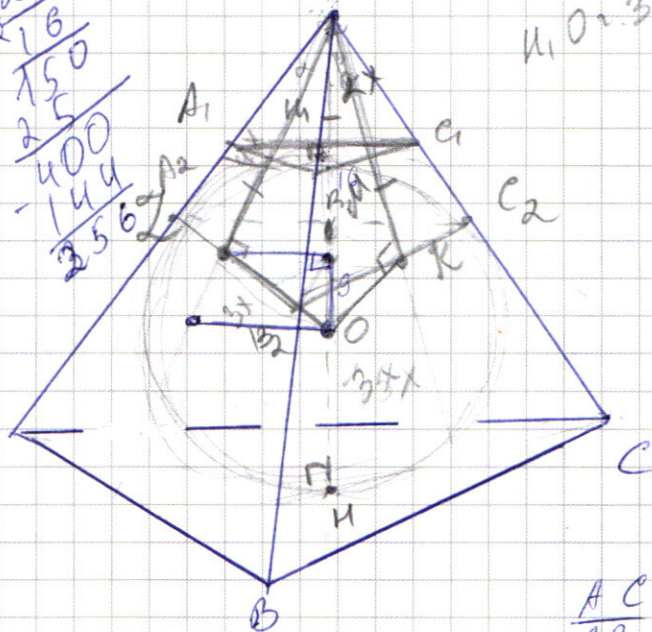
1116.

КСО-?

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 16 \\ \hline 150 \\ 250 \\ \hline 400 \\ - 144 \\ \hline 256 \end{array}$$

S S_{сер}

110-3x

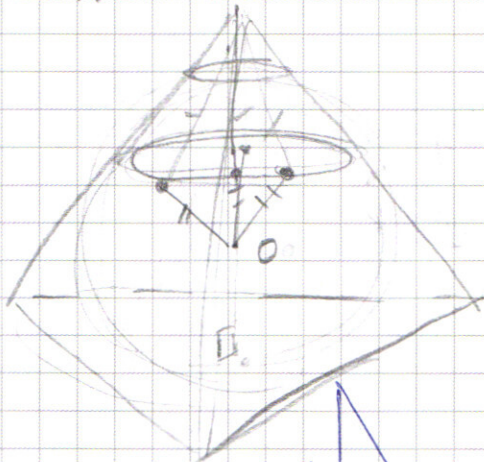


$$S_{ABC} = 16$$

$$S_{A_1B_1C_1} = 1$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 4 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\frac{SH_1}{SH} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$



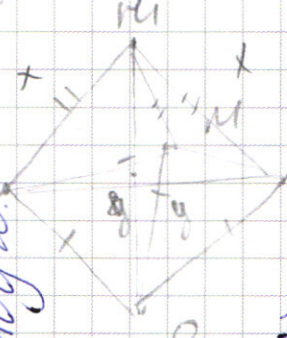
$$S_2, S_K = S_{SH}$$

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SG}{SG_2} = \frac{SP_1}{SP_2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$AD = \frac{AC \cdot BD}{AB}$$

$$\frac{CD}{4y} =$$



$$\frac{12x^2}{2} = 6x^2$$

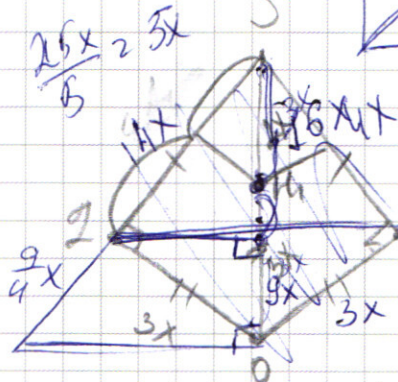
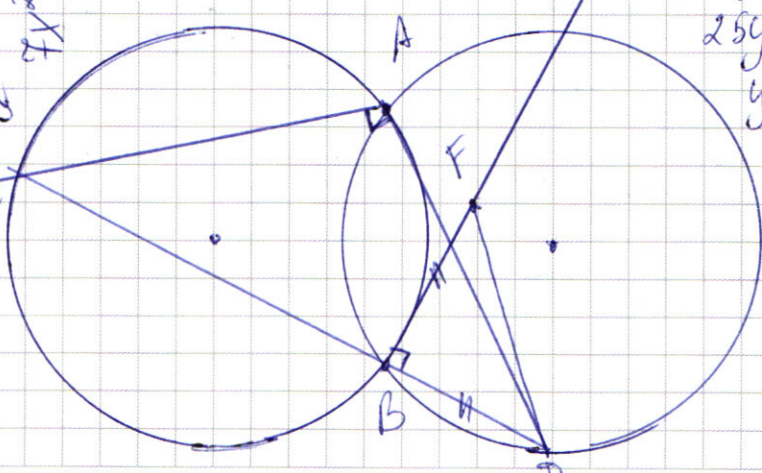
$$z = \frac{16y}{3}$$

$$\frac{4y}{z} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{16y}{3} + 3y = 15$$

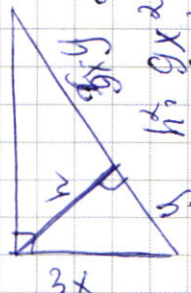
$$25y = 15$$

$$y = \frac{3}{5}$$

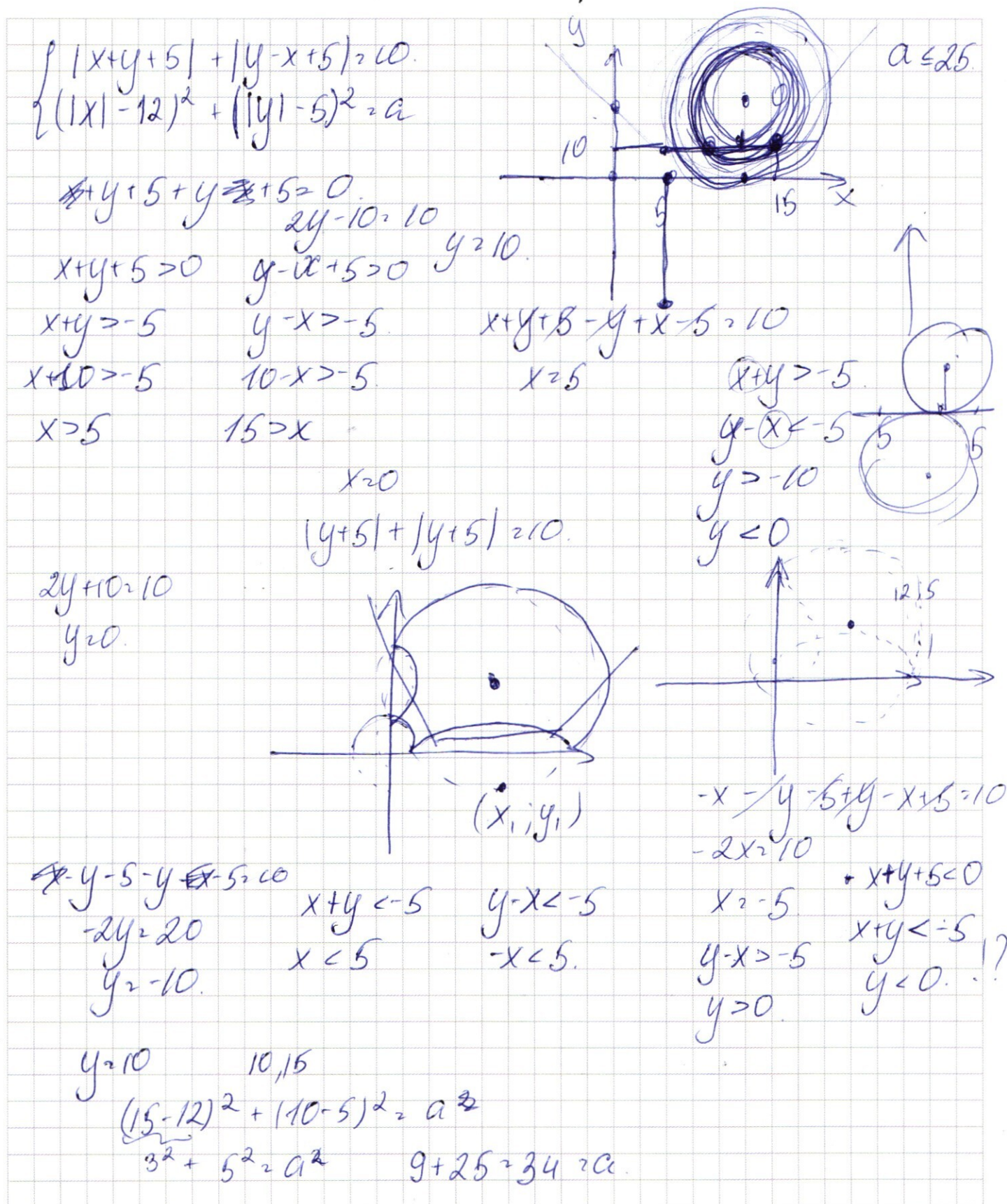


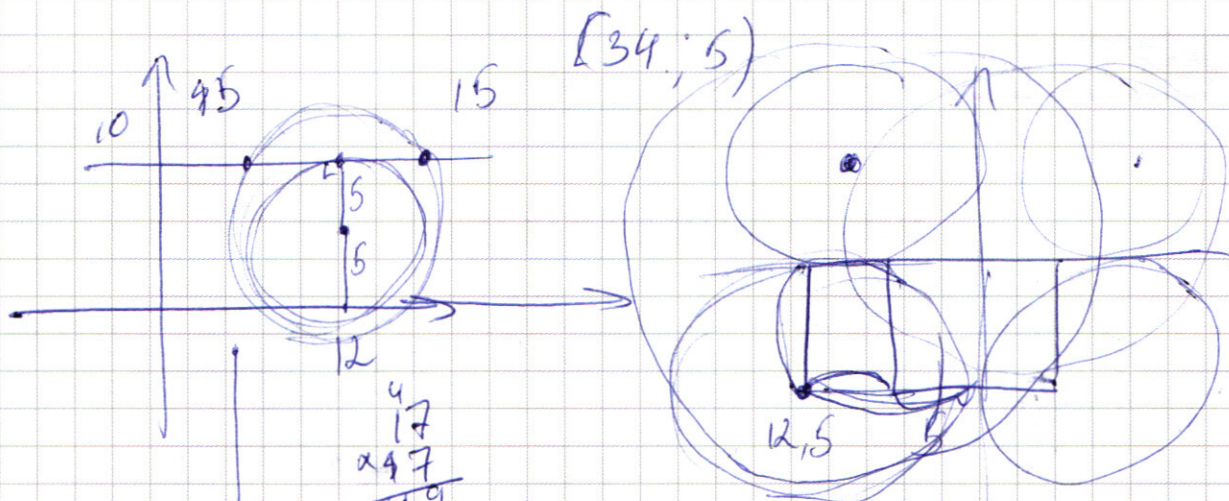
$$9x^2 = 48 \cdot p$$

$$\frac{9}{4}x = p$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



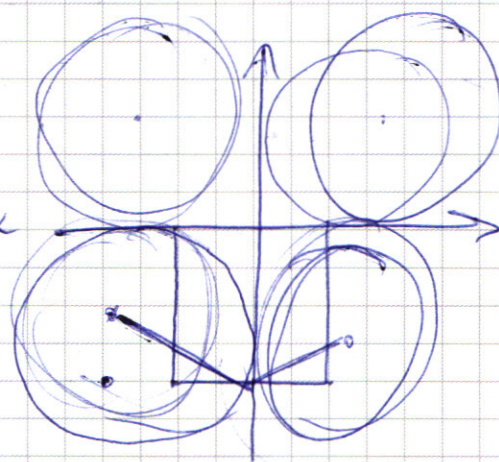


$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$x < 0$

$$x^2 \circ + 12^2$$

$$y^2 \circ + 25^2$$



$$12.5^2$$

$$C(15, 10)$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ - 225 \\ \hline 64 \end{array}$$

(17)

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} \cdot y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(y^2 - 4x + 4) - (x^2 + 8x + 16) - x(x + y) = 0$$

$$x^2 y^4$$

$$x^{2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-\ln x^2} \cdot y^{-\ln x^4} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

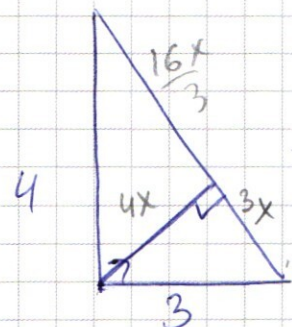
$$x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y - \ln x^7} = \frac{y^{\ln y - \ln x^7}}{y^{-\ln x^4}}$$

$$x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y - \ln x^3}$$

$$x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y + \ln x^4 - \ln x^7}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{\ln y + \ln x^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$4x = \frac{12}{5}$$

$$\frac{16x}{3} = \frac{3 \cdot 16}{5 \cdot 3}$$

$$\frac{25}{64}$$

$$\frac{4x}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2 = \frac{16x}{3}$$

$$16x + 9x = 15$$

$$25x = 15$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$3x = \frac{9}{5}$$

$$\frac{16}{5}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{25}{64}$$

$$S = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$$

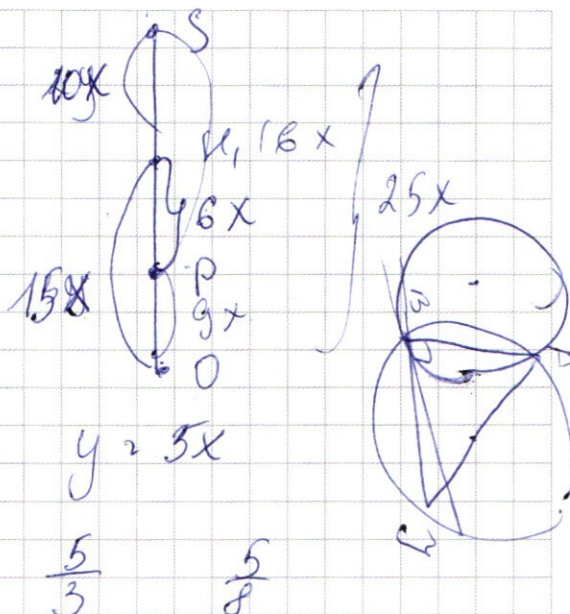
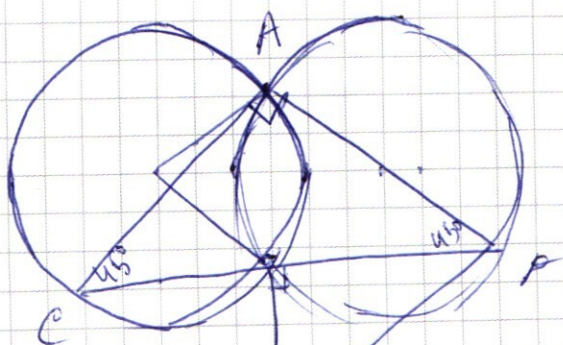
$$\int (x^2 y^4) \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x^7} \right)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

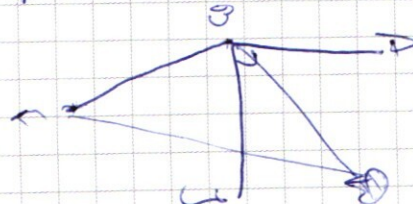
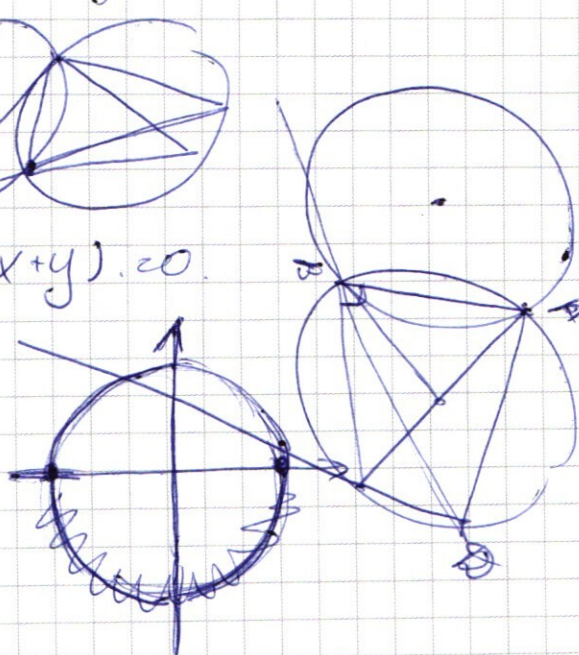
$$(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 8x + 16) - x/(x+y) = 0$$

$$\sqrt{|x+y+5|} + \sqrt{|y-x+5|} = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 + (\sqrt{2})^2$$



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$



$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} (2^{x-34} + 3)$$

$$y \leq 4 \cdot 19 + 2 \cdot 2^{32} (2^{x-32} - 1) x$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

