

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $9261 : 27$

$343 : 7$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 27} \\ 81 \\ \hline 116 \\ 108 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \\ \hline 63 \\ 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$9261 = 7^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$ в числе должно быть
три цифры семь, а так же
комбинации единиц, двоек
и троек.

1113337777

1113337777

11137779
11137797
11137977
11139777
11177739
11177793
111777

2 варианта комбинаций

3 единицы.

3 семер.

1 тройка
1 двоек

2 единицы.

3 семер.

3 тройки.

$$K = \frac{8!}{4!} = 5678$$

$$K = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$K = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$$

$$K_0 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} \left(1 + \frac{1}{2!} \right)$$

$$= \frac{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{236} \cdot \frac{3}{2} = 10 \cdot 56 \cdot 3 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел

$$\sqrt{2} \cos^1 9x - \cos^2 5x - \sqrt{2} \cos^3 4x + \sin^4 9x + \sin 5x = 0$$

$$\overset{1)}{\cos 9x} = \overset{a)}{\cos 8x \cos x} - \overset{b)}{\sin 8x \sin x}$$

$$\begin{aligned} a) \cos 8x \cos x &= \cos(4x+4x) = 2\cos x \cos 4x \sin 4x = 2\cos x \cdot 2\sin 2x \cos 2x (1-2\sin^2 x) \\ &= 8\cos x \sin x \cos x (2\cos^2 x - 1)(1 - 2 \cdot 4\sin^2 x \cos^2 x) = \\ &= 8\cos^2 x \sin x (2\cos^2 x - 1)(1 - 8\sin^2 x \cos^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sin 8x \sin x &= 2\sin 4x \sin x (1 - 2\sin^2 2x) = 4\sin 2x \cos 2x \sin x (1 - 8\sin^2 x \cos^2 x) \\ &= 8\sin^2 x \cos x (2\cos^2 x - 1)(1 - 8\sin^2 x \cos^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \cos 5x &= \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x = (1 - 2\sin^2 2x)\cos x - \sin x \cdot 2\sin 2x \cos 2x = \\ &= (1 - 8\sin^2 x \cos^2 x)\cos x - \sin x \cdot 4\sin x \cos x (2\cos^2 x - 1) = \end{aligned}$$

$$3) \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

$$4) \sin 9x = \sin x \cos 8x + \sin 8x \cos x$$

$$\begin{aligned} a) \sin x \cos 8x &= \sin x (1 - 2\sin^2 4x) = \sin x (1 - 8\sin^2 2x \cos^2 2x) = \\ &= \sin x (1 - 32\sin^2 x \cos^2 x (2\cos^2 x - 1)^2) \end{aligned}$$

$$\sqrt{3} a) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0 \quad D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$b) y = 2x \Rightarrow (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = y(2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})} \rightarrow \text{прологарифмируем}$$

$$16 \cdot x^6 \cdot y^{-\ln x} = 2 \cdot (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})} \Rightarrow -\ln x \cdot \ln(16x^6) = \ln(\frac{2}{x^6}) \ln(2x)$$

$$-\ln x (\ln 16 + 6\ln x) = (\ln 2 - 6\ln x)(\ln 2 + \ln x)$$

$$\ln x = t \Rightarrow -t(4\ln 2 + 6t) = (\ln 2 - 6t)(\ln 2 + t)$$

$$-4\ln 2 \cdot t - 6t^2 = (\ln 2)^2 + t \cdot \ln 2 - 6\ln 2 \cdot t - 6t^2$$

$$(\ln 2)^2 - t \ln 2 = 0 \quad t = \ln 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = -x + 4$$

$$\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = \ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^2} \Rightarrow \text{логарифмируем}$$

$$-2\ln x - \ln(4-x)^4 = \ln \frac{4-x}{x^2} \ln(4-x)$$

$$-2\ln x - 4\ln(4-x) = (\ln(4-x) - \ln x^2) \ln(4-x)$$

$$\begin{cases} \ln(4-x) = 2 \\ \ln x = 1 \end{cases} \Rightarrow -V(2V+4U) = (U-7V) \cdot U$$

$$-2V^2 - 4UV = U^2 - 7UV$$

$$U^2 - 3UV + 2V^2 = 0$$

$$D = 9V^2 - 8V^2 = V^2 \quad U_{1,2} = \frac{3V \pm V}{2}$$

$$\begin{cases} U = 2V \\ U = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(4-x) = 2\ln x \\ \ln(4-x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ 4-x = x \end{cases} \quad \begin{matrix} D = 1+16 \\ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = -\frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 2 \\ y = 4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x < 4 \\ x > 0 \end{cases} \quad y = \frac{1-\sqrt{17}+8}{2}$$

Ответ: A(2; 4); B(2; 2); C($\frac{\sqrt{17}-1}{2}$; $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$)

5. КОТ: а) $y_1 = -x - 5$
 $y_2 = x - 5$

$$\begin{array}{ll} \text{I} \begin{cases} y \geq -x - 5 \\ y \geq x - 5 \\ y = 0 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} y \geq -x - 5 \\ y < x - 5 \\ x = 5 \end{cases} \\ \text{III} \begin{cases} y < -x - 5 \\ y \geq x - 5 \\ x = -5 \end{cases} & \text{IV} \begin{cases} y < -x - 5 \\ y < x - 5 \\ y = -10 \end{cases} \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

БЧ. Дано:

$$S_{ABC} = 16$$

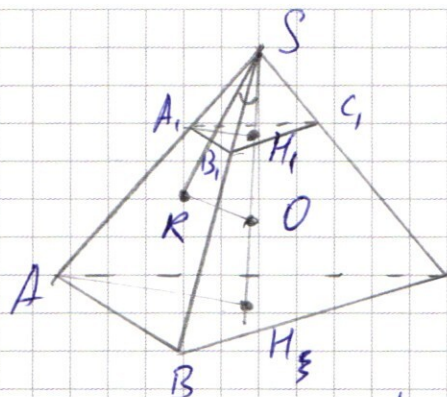
$$S_{A_1B_1C_1} = 1$$

$$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$$

$$(ABC) \perp SO$$

Найти:

$$\angle KSO$$



Решение:

1) $\triangle KSO$ - прямоугольный.

т.к. KO - радиус

$$(ABS) \cap \omega = K \Rightarrow$$

$$\angle SKO = 90^\circ \quad KO = R$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{высота пирамиды} - R \\ SH_1 = H \end{array} \right\} \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} \Rightarrow$$

$$OH = R, \text{ т.к. } OH \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow OH_1 - \text{радиус}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{R+H}$$

$$2) \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \text{ (по трем углам)} \Rightarrow$$

$$\triangle ABS \sim \triangle A_1B_1S \text{ (т.к. } AB \parallel A_1B_1, S - \text{общ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB} \right)^2$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS}$$

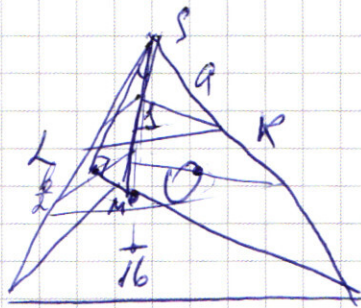
$$\triangle ASH \sim \triangle A_1SH_1 \Rightarrow \frac{A_1S}{AS} = \frac{A_1SH_1}{ASH} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SH_1}{SH} \right)^2 = \left(\frac{H}{H+2R} \right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow 4H = H+2R$$

$$3H = 2R \Rightarrow R = \frac{3H}{2}$$

$$3) \sin \angle KSO = \frac{\frac{3}{2}H}{\frac{3}{2}H+H} = \frac{3}{5} \quad \text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

155.



$$4a = b + a$$

$$3a = b$$

$$\left[\frac{r}{\frac{3}{2}a + a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \right.$$

$$\left. \frac{a + \frac{3}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{\sqrt{5}}{4} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{\sqrt{5}}{24}$$

$$\left(\frac{a}{b+a} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{a}{b+a} = \frac{1}{4}$$

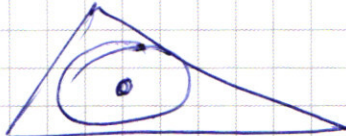
$$\frac{a}{\frac{b}{2} + a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{a + \frac{b}{2}}{a + b} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

$$\sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

$$S = \frac{25}{4}$$



$$\sin \angle RSO = \frac{R}{R+H}$$

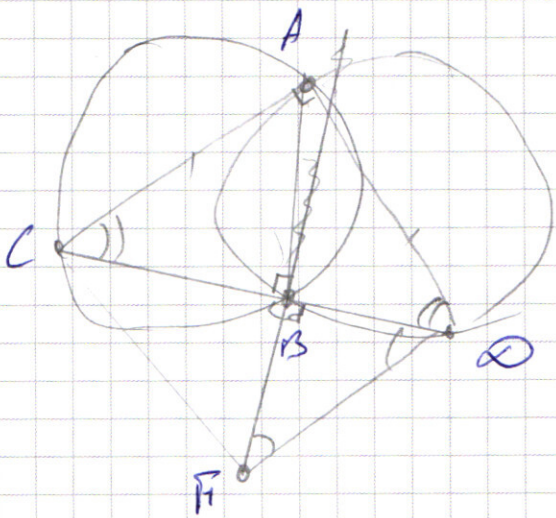
$$\left(\frac{H}{2R+H} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$4H = 2R+H$$

$$3H = 2R \Rightarrow R = \frac{3H}{2}$$

$$\sin \angle RSO = \frac{\frac{3}{2}H}{\frac{3}{2}H + H} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Дано:

$$R = 10$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A; B\}$$

$$C \in \omega_1; D \in \omega_2$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

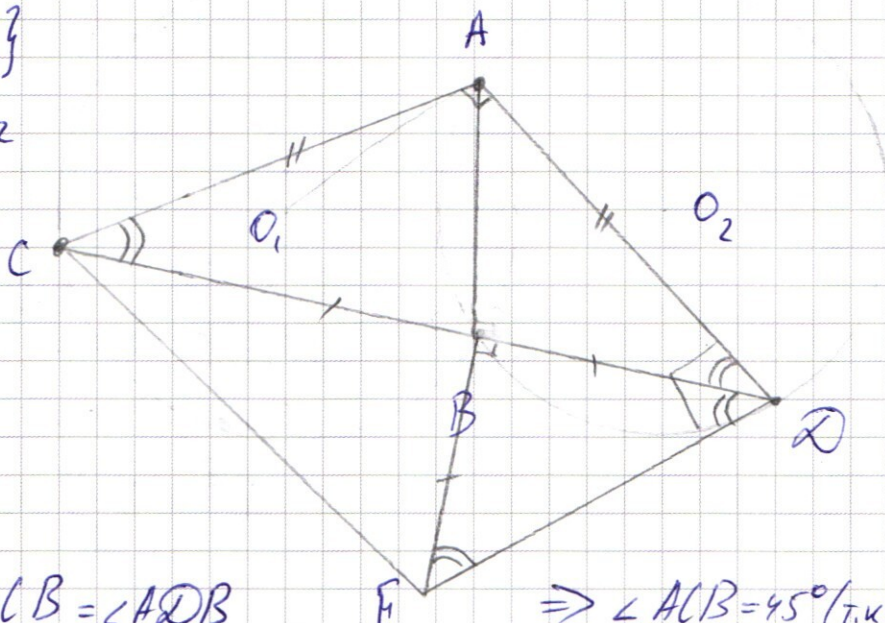
$$BF \perp CD$$

Найти: $\angle CF$

$$b) BC = 12$$

$$S_{ACF} = ?$$

Решение:



$$1) \angle ACB = \angle ADB$$

F

$$\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \text{ (т.к. } \triangle ACD \text{ - прямоугольный)}$$

т.к. они опираются на равные дуги в равных окружностях.

$$2) \triangle CAB = \triangle BAD \Rightarrow \angle CBA = \angle DBA = 90^\circ \Rightarrow AB \in AF$$

$$\triangle FBD - \text{равноб.}, \text{прямой} \Rightarrow \angle FBD = \angle BDF = 45^\circ$$

$$\angle ADF = \angle ADB + \angle BDF = 90^\circ \Rightarrow CA \parallel FD$$

$$\left. \begin{aligned} CB = BD \text{ (т.к. } \triangle CAB = \triangle BAD) &= BF \\ \angle CBF = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle BCF = \angle BFC = 45^\circ \Rightarrow \angle ACF = \angle CFD = 90^\circ$$

$$\triangle ACFD - \text{прямоуг. (т.к. } CA = AD) \Rightarrow AFCD - \text{квадрат}$$

$$3) \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ (т.к. } \omega_1) \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$$\triangle AOB: AB = \sqrt{AO_1^2 + OB^2} = \sqrt{2} R \Rightarrow AF = 2\sqrt{2} R \text{ (т.к. диаг. кв.)}$$

$$\triangle CAF: AF^2 = 2 CF^2 \Rightarrow CF^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 R^2 \Rightarrow CF = 2R = 20$$

Ответ: 20

$$8) S_{\Delta ACR} = \frac{1}{2} AR \cdot CB = \sqrt{2} R \cdot BC = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot 12 = 120\sqrt{2}$$

Ответ: 20; $120\sqrt{2}$.

№ 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2^x (2^{32} - 1) \end{cases}$$

$$2^x + 2^{34} \cdot 3 < 76 + 2^x (2^{32} - 1)$$

$$2^x < 76 - 2^x + 2^{33} x - 2^{34} \cdot 3$$

$$2^x < 76 - 2^x + 2^{33} (x - 6)$$

$$2^x < (x - 6) \cdot 2^{33} - 2(x - 6) + 64$$

$$2^x < (x - 6) (2^{33} - 2) + 64$$

~~2^x < 2^6~~ ↑
большой
коэфф. 2^6

~~2^x < 2^6~~ $x - 6 = z$

$$64 + 2^z \leq z \cdot A + 2^6$$

$$2^z < zB + 1$$

↑
большой коэфф.

$$z > 0$$

$$2^z < z \left(2^{27} - \frac{1}{2^5} \right) + 1$$

$$2^z < z \cdot 2^{27}$$

$$z < 28 \Rightarrow z \in (0; 28)$$

~~0~~ $0 < x - 6 < 28$ $\Leftarrow$
 $6 < x < 34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\cos 9x + \cos 5x)' = -9\sin 9x - 5\sin 5x$$

$$5x = \alpha \quad 9x = \beta$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2} \cos \beta - \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin \alpha$$

$$\cos \beta (\cos \alpha + \sin \alpha) - \sin \beta (\sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \beta$$

$$\cos \beta (\cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{2}) = \sin \beta (\sin \alpha - \cos \alpha) (\sin \beta - 1)$$

2. and 3.

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$$

$$9x = \beta$$

$$\cos(2\beta + x) - \cos(\beta + x) - \sqrt{2} \cos \beta + \sin(2\beta + x) + \sin(\beta + x) = 0$$

$$A + B - \sqrt{2} \cos \beta + C + D$$

$$\cos 9x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 9x))$$

$$\cos 9x = \pm \sqrt{2} \quad \sin 9x = \pm \sqrt{1 - 2}$$

$$\cos 9x = \cos x \cos 8x - \sin x \sin 8x$$

$$83. (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \quad \begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

$$\sqrt{3 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$2 < \sqrt{6} < 3$$

$$y^{\ln(y/x^2)} \cdot (x^2 y^4)^{\ln x} = 1$$

$$y^{\ln(y/x^2)} = (x^2 y^4)^{\ln x^{-1}} = x^{2 \ln x^{-1}} \cdot y^{4 \ln x^{-1}}$$

$$y^{\ln(y/x^2 - x^{-4})} = (x^{\ln x})^{-2}$$

$$(e^{\ln^2 x})^{-2}$$

$$x^{\ln x} \neq e^{\ln x}$$

$$\ln x \neq \ln e^{\ln x}$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$\ln(x^{\ln x}) = \ln x \cdot \ln x$$

$$e^{\ln^2 x}$$

$$4 < \sqrt{17} \leq 5$$

$$3 < \sqrt{17} - 1 < 4$$

$$\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{17} - 1}{2} < 2$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +289 \\ 25 \\ \hline 314 \end{array}$$

$$\sqrt{314}$$

$$76 + (2^{33} - 2)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x + 2^{34}(3 - 2x) + 2x - 76 < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$s_1 \quad a b c d e f g h = 9261 \mid : 9$$

1029.9

843. $3^3 = 9261$

$$7^3 \cdot 3^3$$

434

Wolfgang

$$\begin{array}{r} 34.51 \\ \hline 24 \quad 31 \end{array}$$

20 bay.

$$\frac{5!}{3!}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 026 \\ \underline{18} \\ 81 \\ \underline{81} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 343} \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 749} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

1	1	1	3	7	7	7	9
1	1	1	3	7	7	9	7
1	1	1	3	7	9	7	7
1	1	1	3	9	7	7	7
1	1	1	7	3	7	7	9
1	1	1	7	3	7	9	7
1	1	1	7	3	9	7	7
1	1	1	7	7	3	7	9
1	1	1	7	7	3	9	7
1	1	1	7	7	7	3	9
1	1	1	7	7	7	9	3
1	1	1	7	7	9	3	7
1	1	1	7	7	9	7	3
1	1	1	7	9	3	7	7
1	1	1	7	9	7	3	7
1	1	1	7	9	7	7	3
1	1	1	9	3	7	7	7
1	1	1	9	7	3	7	7
1	1	1	9	7	7	3	7
1	1	1	9	7	7	7	3
1	1	2	3	7	7	7	9
1	1	3	1	7	7	9	7

$$8! - 3! - 5! = 8! - 12$$

1 1 3 3 3 7 7 7
 1 1 3 3 7 3 7 7
 1 1 3 3 7 7 3 7
 1 1 3 3 7 7 7 3
 1 1 3 7 3 7 7 7
 1 1 3 7 3 7 3 7
 1 1 3 7 3 7 7 3
 1 1 3 7 7 3 3 7
 1 1 3 7 7 3 7 3
 1 1 3 7 7 7 3 3
 1 1 7 3 3 3 7 7
 1 1 7 3 3 7 3 7
 1 1 7 3 3 7 7 3
 1 1 7 3 7 3 7 3
 1 1 7 3 7 7 3 3
 1 1 7 7 3 3 3 7
 1 1 7 7 3 3 7 3
 1 1 7 7 7 3 3 3

$$\frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

70 bags

$$\frac{6! \cdot 2!}{4!} =$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$\cos 5x = \cos(4x+x) = \sin 4x \cdot \sin x - \cos 4x \cdot \cos x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + (\beta + \frac{\pi}{2})) = \sin((\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos(\beta + \frac{\pi}{2}) + \cos \alpha \sin(\beta + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos 5x = \cos x \cdot \cos 4x - \sin x \sin 4x$$

$$\sin 5x = \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x$$

$$\sin 9x = \sin 5x$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x -$$

$$\sin 5x \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 - \sin 4x) + \sin 5x (-\sin 4x + \cos 4x + 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x = \cos 8x \cos x - \sin 8x \sin x =$$

$$= (1 - 2 \sin^2 4x) \cos x - 2 \sin 4x \cos 4x \sin x$$

$$\cos 9x = \cos^2 4,5x - \sin^2 4,5x$$

$$+ \sin 9x = 2 \sin 4,5x \cos 4,5x$$

$$(\cos 4,5x + \sin 4,5x)^2 - 2 \sin^2 4,5x$$

$$\cos 5x - \operatorname{tg} 4x \sin 5x - \sqrt{2} + \sin 5x \operatorname{tg} 4x + \cos 5x \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{\cos 4x} (\sin 5x - \cos 5x)$$

$$\cos 5x + \sin 5x - \operatorname{tg} 4x (\sin 5x - \cos 5x) + \frac{1}{\cos 4x}$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \sin \beta}$$

$$\cos \alpha + \sin \beta$$

$$\cos 5x (\cos 4x \operatorname{tg} 5x - 1 - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \operatorname{tg} 5x +$$