

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Разложим 9261 на простые множители $\Rightarrow 9261 = 3^3 \cdot 7^3$.

Т.к. при умножении 7 на 3 получается 21 $> 9 \rightarrow$ в числе есть 3 цифры 7.

Т.к. при умножении 3 $\cdot$ 3 получается 9 $\rightarrow$ в числе может быть $\begin{cases} \text{либо } 3 \text{ и } 9; \\ \text{либо } 3, 3, 3; \end{cases}$

Получается, что наше число может иметь два набора цифр:

$$\begin{aligned} 1) \{1; 1; 3; 3; 3; 7; 7; 7\} &\Rightarrow C_8^3 \cdot C_5^3 \\ 2) \{1; 1; 1; 3; 7; 7; 7; 9\} &\Rightarrow C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 \end{aligned} \Rightarrow C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = 3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$= 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 56 \cdot 10 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел.

№ 2.

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (2 \sin 7x - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \cdot (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) &= 0 \\ \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) \cdot \cos(4,5x + \frac{\pi}{8}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(2,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(4,5x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \pi l \\ 2,5x - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ 4,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l \\ x = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} n \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{5\pi}{9} k \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l \\ x = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} n \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{5\pi}{9} k \end{cases} \quad n, l, k \in \mathbb{Z}$

✓ 3.

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} \sim y \frac{\ln(y/x^7)}{\ln x} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) (x^2 y^4)^{-\ln x} \sim y \frac{\ln(y/x^7)}{\ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} \sim y \frac{\ln(y/x^7) + 4 \ln x}{\ln x}$$

$$\ln(-2 \ln x) = \ln y (\ln y - 7 \ln x + 4 \ln x)$$

$$\ln^2 y - 3 \ln y \cdot \ln x + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\begin{cases} 2 \ln(x) - \ln(y) = 0 \\ \ln(x) - \ln(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 \\ y^2 - x \end{cases}$$

$$(2) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y-4) + x(y-2x) - 2xy = 0$$

$$(x+y-4)(y-2x) = 0$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \\ y^2 - x \\ y = 4 - x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 \\ y = 4 - x \\ y^2 - x^2 \\ y = 2x \\ y^2 - x \\ y = 4 - x \\ y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 4 = 0 \\ y = 4 - x \\ x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

✓ 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

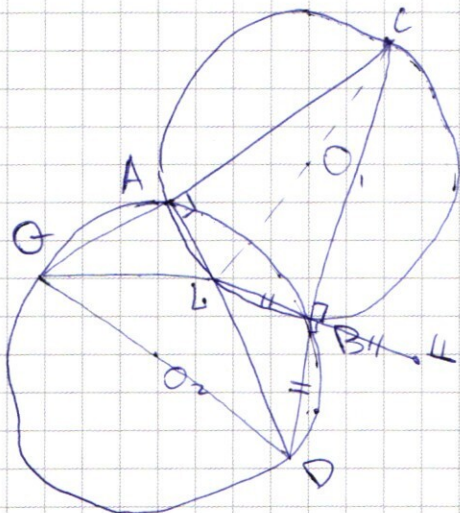
$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 2x - 2^{33} \cdot x < 76 + 2^{34} \cdot 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

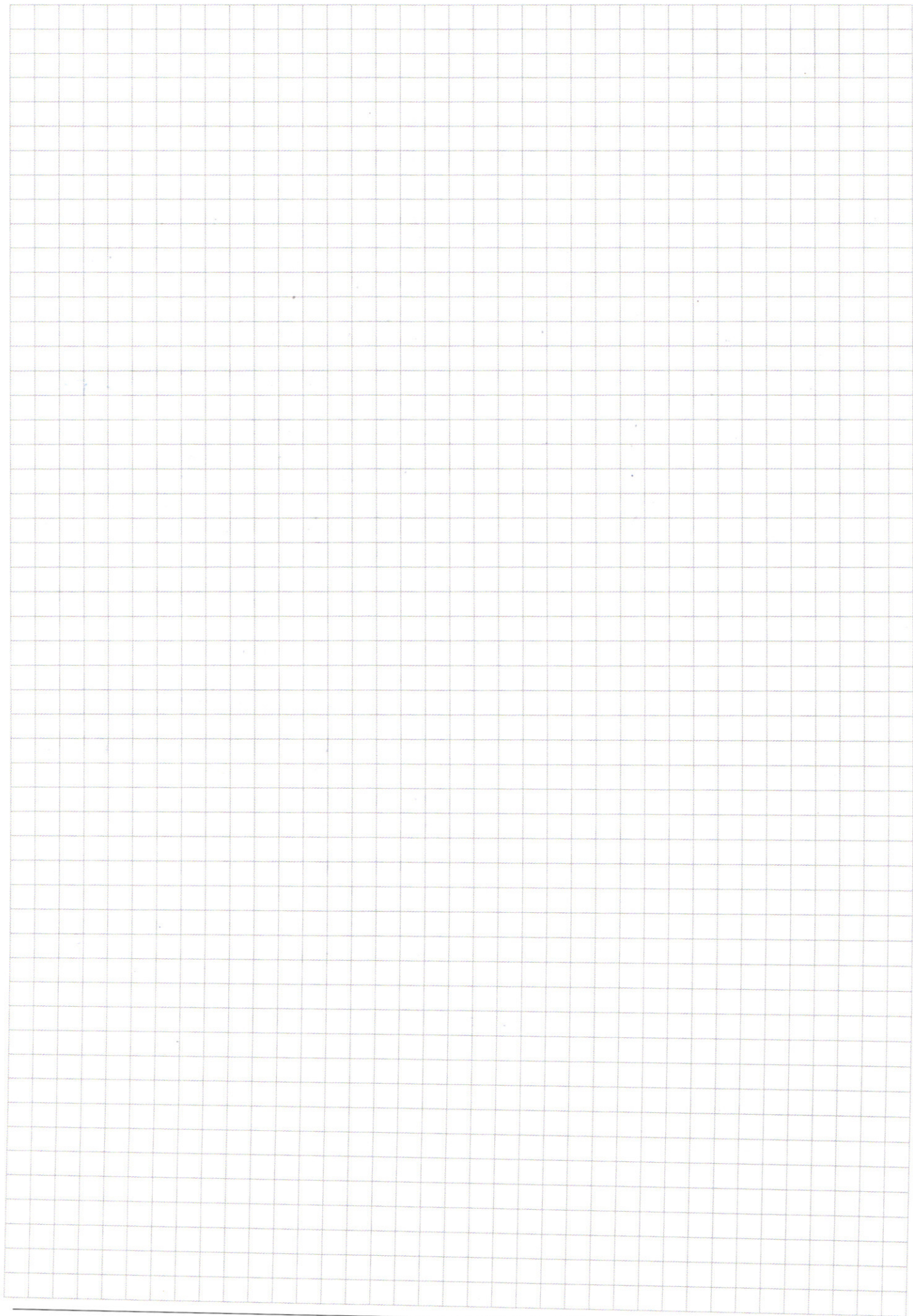
№ 6.



а) $\left. \begin{array}{l} AD \cap 1 \text{ окр.} = L \\ CA \cap 2 \text{ окр.} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAD =$
 $= \angle CAL = \angle DAQ \Rightarrow CL \text{ и } DQ - \text{грависы} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{т.к. } BF \perp CD \Rightarrow BE \left\{ \begin{array}{l} Q \in BF \\ L \in BF \end{array} \right.$
 $\triangle DBQ \sim \triangle LBC$
 $\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R_2 = 10 \Rightarrow CL = 20 = QD \\ \angle QBD = \angle LBC = 90^\circ \Rightarrow \angle BQD = \angle BLC \end{array} \right.$
 $\Downarrow$
 $\left\{ \begin{array}{l} BD = BL \\ BD = BF \end{array} \right. \Rightarrow BL = BD = BF$
 $\Downarrow$
 $CB - \text{выс. } \triangle LCF \text{ и } CB - \text{мед. } \triangle LCF$
 $\triangle LCF - \text{равнобедренный}$
 $CL = CF \Rightarrow \underline{\underline{CF = 20}}$

б) Т.к. $\angle CAD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow CA \parallel DF \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{ACF} = S_{ACD} \Rightarrow$
 по т.ф. Пиф.:
 $LB = \sqrt{CL^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 144} = 16 \Rightarrow$
 $\Rightarrow CD = CB + BD = 12 + 16 = 28$
 $\triangle ACD - \text{прям. и равнобедр. } \left(\begin{array}{l} BL = BO \\ \angle CBD = 90^\circ \end{array} \right)$
 $\Downarrow$
 $S_{ACD} = \frac{CD^2}{4} = \frac{28^2}{4} = \underline{\underline{196}}$

Ответ: $CF = 20$; $S_{ACD} = 196$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

9261	3
3027	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	7

$3^3 \cdot 7^3 = 9261$

имеем 6 децималей не равных 1 $\rightarrow 3; 3; 3; 7; 7; 7$
для того, чтобы цифра
цифры могли отличаться только 1; 3; 7; 9

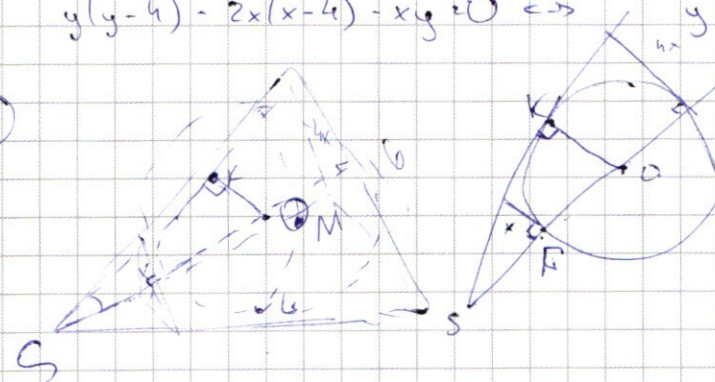
Мои числа для набора цифр:

$\{1; 1; 3; 3; 7; 7; 7\}$ $1/333777 \rightarrow 550$
 $\{1; 1; 1; 9; 3; 7; 7; 7\}$ $1/1137779 \rightarrow 151200$

② $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$
 $-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$
 $2 \sin 2x (\cos 7x - \sin 7x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

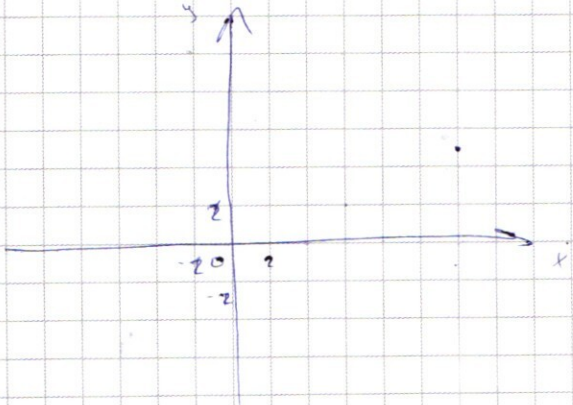
③ $\ln(x^2 y) = \ln x^2 + \ln y \Leftrightarrow y \ln(y/x^2) \Leftrightarrow y \ln y - 2x \ln x = 1$
 $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$
 $y(y-4) - 2x(x-4) - xy = 0 \Leftrightarrow y(y-4) + xy - 2x(x-4) - 2xy = 0$
 $y(y+x-4) - 2x(x+y-4) = 0$
 $(x+y-4)(y-2x) = 0$

④

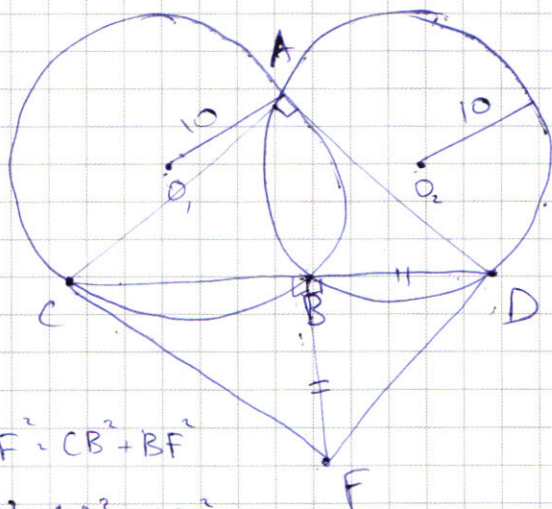


$SK^2 = SO \cdot SF$
 $SK^2 + KO^2 = SO^2$ $SO^2 - KO^2 = SO \cdot (SO - KO)$
 $SO^2 - KO^2 = SO \cdot (SO - KO)$ $KO = SO$
 $SO^2 - KO^2 = SO^2 - SO \cdot KO$

⑤ $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$
 $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$



6



$$CF^2 = CB^2 + BF^2$$

$$CA^2 + AD^2 = CD^2$$

$$BF = BD$$

$$BD \cdot CD = AD^2$$

$$CD \cdot CB = AC^2$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = (CB + BD)^2 - 2CB \cdot BD = CD^2 - 2CB \cdot BD = AC^2 + AD^2 - 2CB \cdot BD$$

7

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + (2^{32} - 1) \cdot x$$

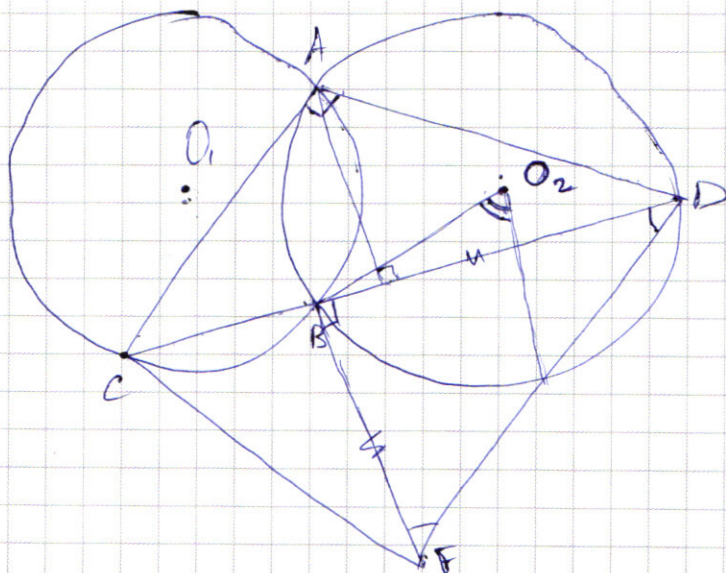
$$76 + (2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33} \cdot x - x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$19 \cdot 2^2 + 2^{33} \cdot x - x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x - x - 2^{33}x < 3 \cdot 2^{34} - 2^2 \cdot 19$$

6



$$AC^2 + AD^2 = CD^2$$

$$CB^2 + BD^2 = CF^2$$

126

N 3.

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^6)}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln(y/x^6)}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln(y/x^6) + 4\ln x}$$

$$\ln x / (-2\ln x) = \ln y (\ln(y/x^6) + 4\ln x)$$

$$-2\ln^2 x = \ln y \cdot \ln(y/x^6) + 4\ln y \cdot \ln x$$

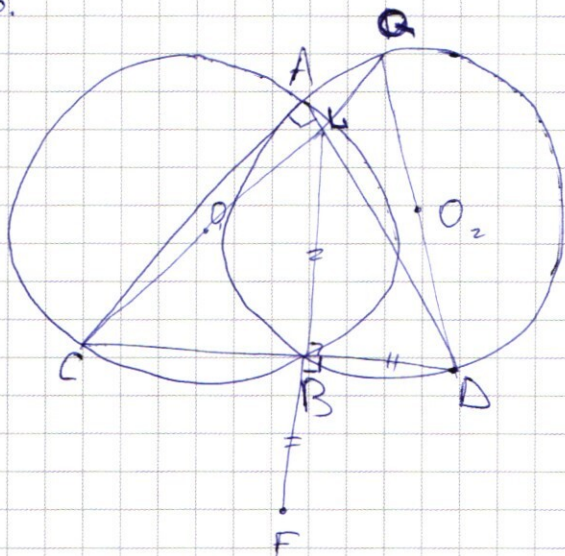
$$\ln^2 y - 3\ln y \cdot \ln x + 2\ln^2 x = 0$$

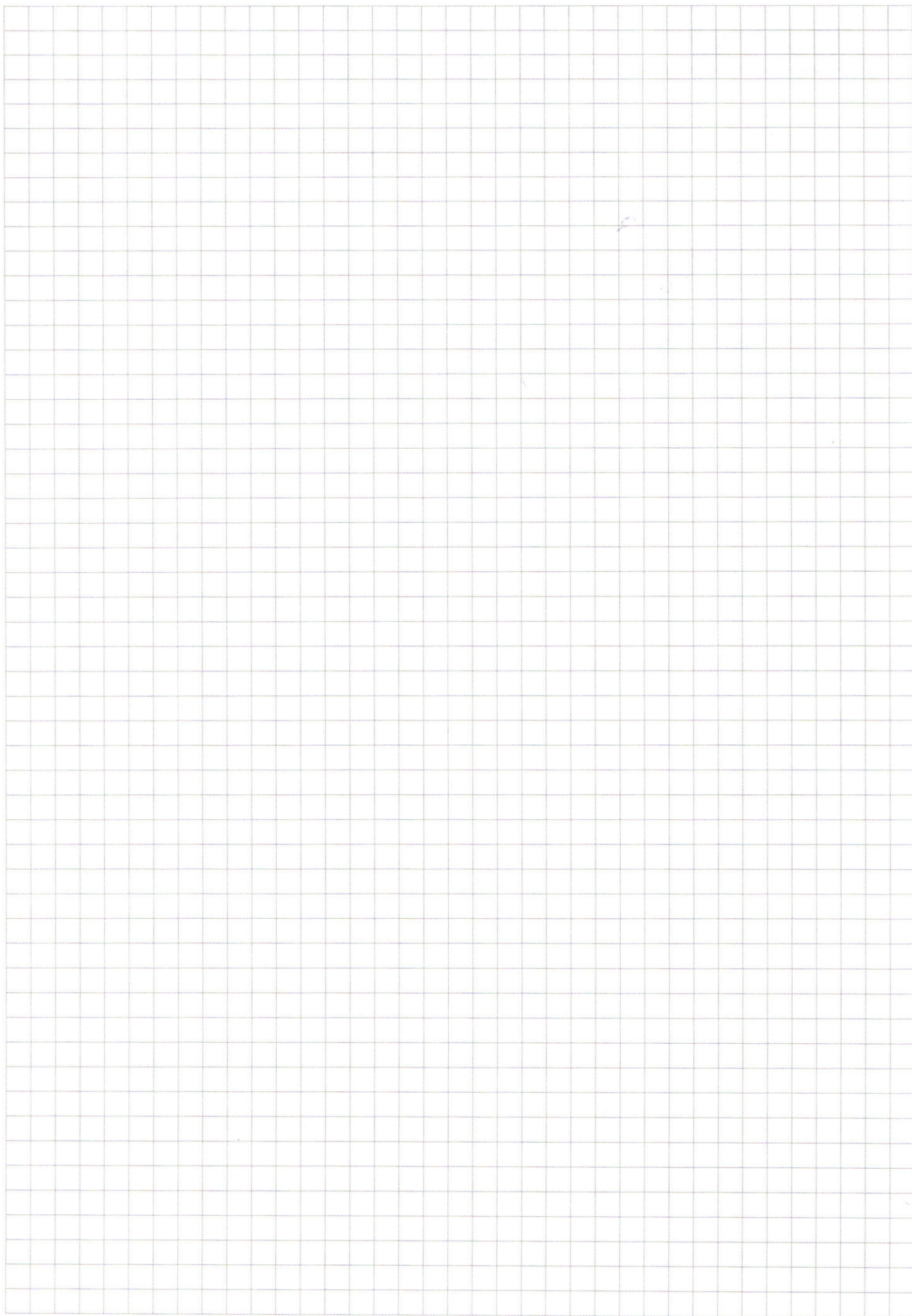
$$\begin{cases} 2\ln(x) - \ln(y) = 0 \\ \ln(x) - \ln(y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

а)





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



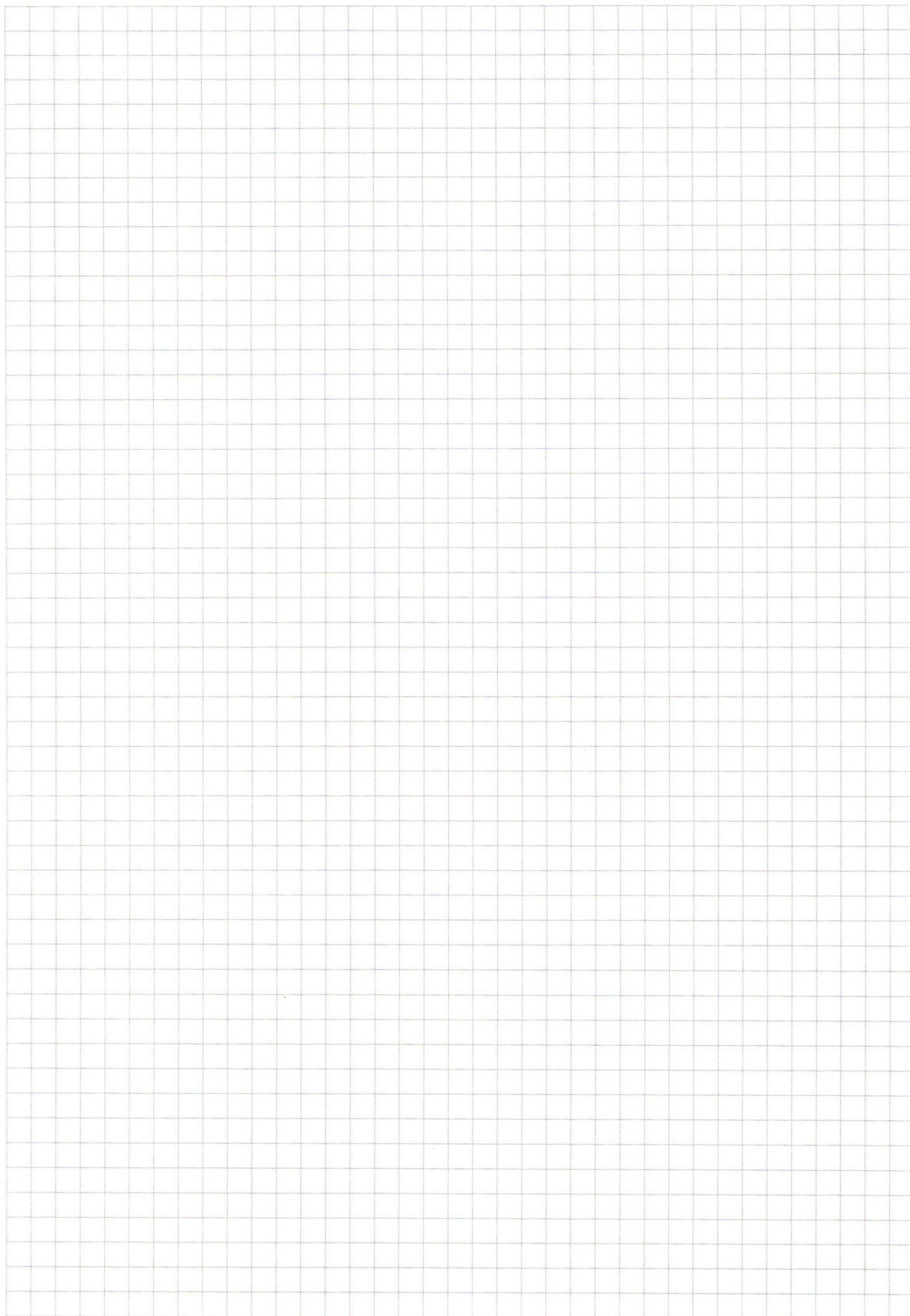
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)