

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 9261 на множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$.

В нашем числе из 8 цифр нет 0 (такое произведение равно 0), и вообще могут быть только цифры 1, 3, 7 или 9 — остальные не входят в разложение.

Рассмотрим 2 набора цифр: 111333777 и 11137779. Посчитаем

количество чисел для каждого набора: 1) $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$ и 2) $\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!}$.

1) $= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$ и 2) $= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$. 1) + 2) $= 8 \cdot 7 \cdot 5(2+4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1500 + 180 = 1680$.

Ответ: 1680.

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

⇓

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

⇓

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x \Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & (1) \\ \sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sin 2x - \cos 2x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 7x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 7x + 2\pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi - 7x + 2\pi m - \frac{\pi}{4}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

$$\begin{cases} x^2 y^4 - \ln x = y^{\ln(y/x^2)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1 = y^{\ln y} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \ln y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=1$$

$$1 = \lambda^{2 \ln x} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2 \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

но $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ ее подводит.

merga $x, y > 0; x, y \neq 1$.

$$\log_y 1 = \log_y \left(y^{\ln y - \ln x^2} \cdot x^{\ln x} \cdot y^{4 \ln x} \right) \Leftrightarrow \ln y - \ln x^2 + 2 \ln x \cdot \frac{\ln x}{\ln y} + 4 \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 - 3\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right) + 1 = 0 \quad t = \frac{\ln x}{\ln y} \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{mo } \begin{cases} \frac{\ln x}{\ln y} = 1 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x, y \neq 1 \\ x = 1 - x \end{cases}$$

Handwritten signature: *Handwritten signature*

$$\begin{aligned} \text{Sx} &= 2 \\ \text{Sy} &= 2 \\ \text{Sx} &= \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ \text{Sy} &= \frac{2\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Answer: $(2, 2); (\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Второе уравнение в системе задаёт 4 окружности радиусом $\sqrt{a}$ ($a > 0$) с центрами в $(\pm 12; \pm 5)$ или 4 точки (при $a=0$) с теми же координатами $(\pm 12; \pm 5)$.

Первое уравнение задаёт ~~множество точек~~ множество точек на границе прямоугольника из условий

при $y=0$ $x \in [-5; 5]$, при $y=\pm 10$ $x \in [-5; 5]$

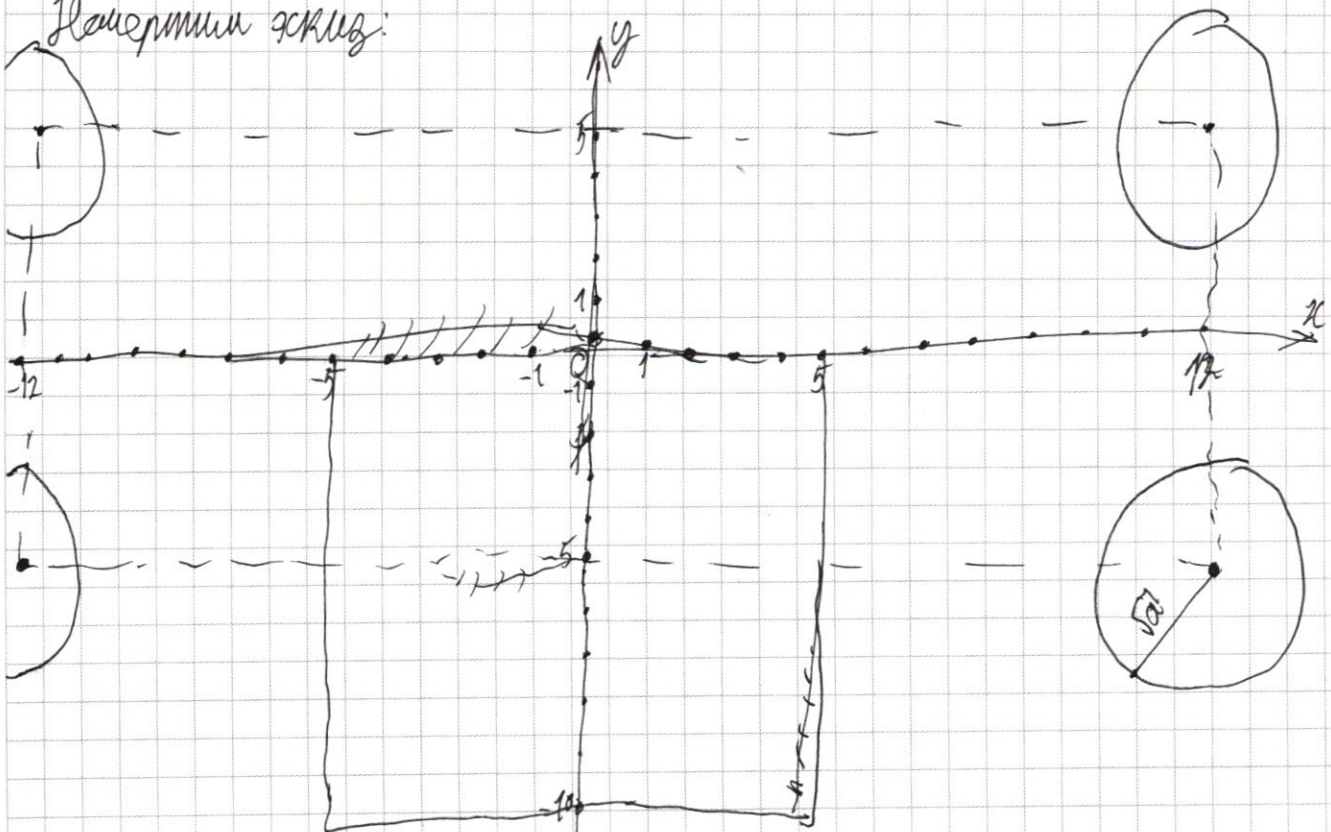
при $x=\pm 5$ $y \in [-10; 0]$, при $x=\pm 5$ $y \in [0; 10]$

при $y \in [-10; 0]$ $x=\pm 5$; при $y \in [0; 10]$ $x=\pm 5$

при $|x| > 5$ решений уравнения нет из-за свойств модулей

при $y > 10$ решений нет из тех же соображений

Несмотря на то:



№5 (продолжение)

при $a < 49$ решений нет: т.к. $a = r^2$ для каждой окружности,

при $a < 49$ ~~не вершина~~ ни одна окружность не имеет
обычных точек с прямоугольником.

При $a = 49$ две нижние окружности касаются боковых
сторон прямоугольника, а верхние ~~ни~~ не имеют обычных точек,
то $a = 49$ подходит.

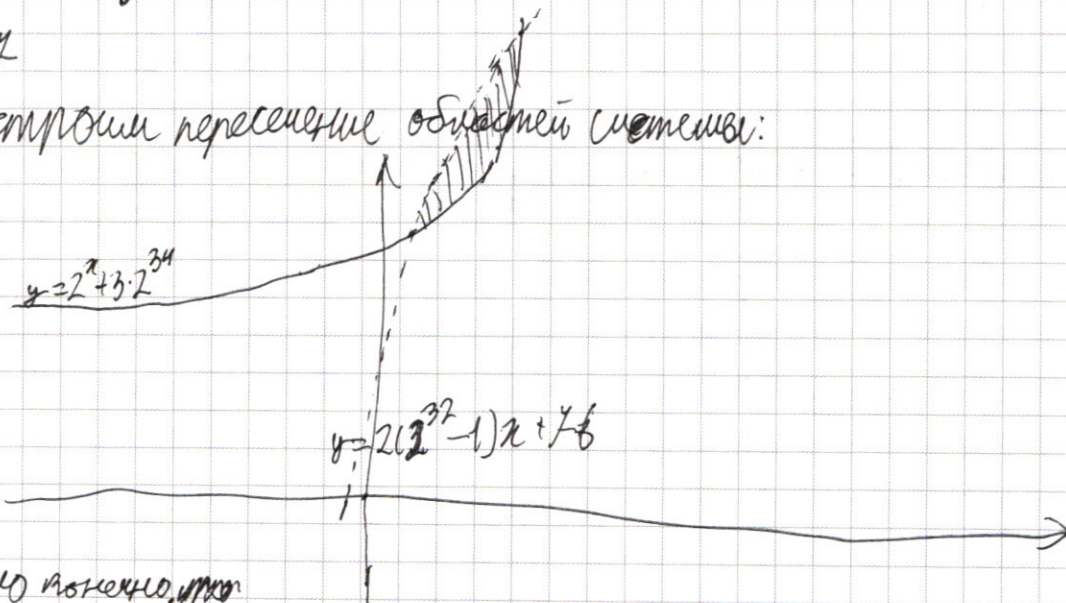
далее ~~и~~ при $a \in [49; 244]$ решений не менее 4: каждая из нижних
окружностей имеет не менее 2 обычных точки (при $a = 514$ все 4 вершины
лежат на нижн. окружностях).

Поскольку верхние окр. пересекают прямоугольник при $a \geq 144$ (при $a = 144$
они ~~только~~ содержат 2 верхние вершины), ~~то~~ при $a \in [244; 584]$ ре-
шений не менее 4 (~~только~~ каждая из верхних пересекает пря-
угольник минимум дважды). Тогда $a = 584$ тоже подходит: единственные
два решения — это $(-5; -10)$ и $(5; -10)$. При $a > 584$ решений у системы
нет.

Ответ: ~~49~~ 49 и 584.

№24

Построим пересечение областей штриховки:

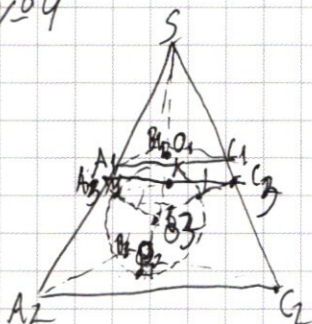


это конечно, что

ответ: 2020.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Nº 4



Построим плоскости $(A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$ из условия $S_{A_1B_1C_1} = 1$. Получим подобные тетраэдры $S_{A_1B_1C_1}$ и $S_{A_2B_2C_2}$. $S_{A_2B_2C_2} = 16$. В них SO_3 отрезается как $\frac{1}{16}$, то

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{16}$ при этом $h_2 = h_1 + 2r$ опоры $h_2 = 16 \text{ м}$, $h_1 = 2r + h_2$, окружена

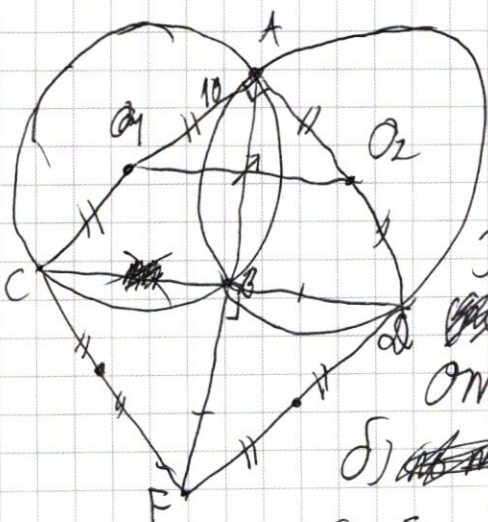
$2R = d = 15h_1 = 1550_1$ Построим сечение атомной модели (К-М) и введем его в A_1, B_1, C_1 .

$$r = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_1}{\frac{17}{2} \log_1} = \frac{1}{S_{\text{max}} \log_1} \Rightarrow S_{\text{max}} = \frac{17}{2}, \angle KSO = 30^\circ$$

Ответ: ~~300~~ $LKSO = 30^\circ$. $S_{\text{сечения}} = \frac{17}{2}$.

N26



Massachusetts

Уже можно доказать, что конфигурация с чертежа Единственная возможная.

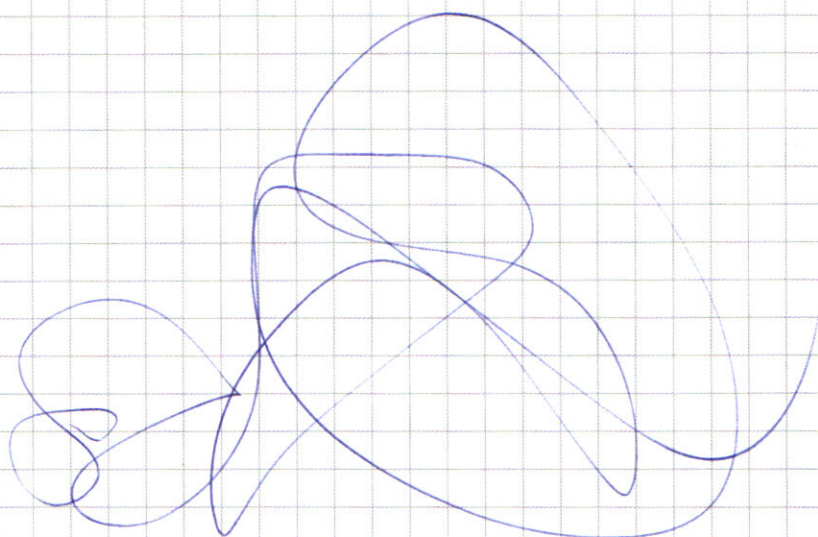
Thonga CF = $AG = 2AC = 20$ ~~gms. of dry matter~~
~~no. of plants. 20 plants.~~

Омбем: 20.

~~SJ MR. Hughes~~

$$\text{The S ACF} = 1.92$$

Omber: 192.



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 13} \\ 3087 \overline{) 3} \\ 1029 \overline{) 3} \\ 343 \overline{) 4} \\ 49 \overline{) 4} \\ 7 \overline{) 4} \\ 1 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 4^3$$

Все 4-е слагаемые по себе

3-е слагаемое по 1, или по 2

Когда все числа будут 11333777 с перем.: $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$
да еще 11333777: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$

$$-2 \sin^2 x - \sin 2x + 2 \sin^2 x \cdot \cos 2x$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8 = 69.35 = (1240) \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \\ \times 64 \\ \hline 320 \\ 1920 \\ \hline 2240 \end{array}$$

$$(\cos 2x - \sin^2 x)(2 \sin^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(4x + \pi) = \cos 4x \cdot \cos \pi - \sin 4x \cdot \sin \pi$$

$$\sin^2 x = \sin$$

$$2 \cos^2 x \cdot \cos 2x = \cos 2x$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos(4x + \frac{\pi}{2})$$

$$4 \cos^2 x \cdot \cos^2 x = \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 4x \cdot \sin^2 x = -\cos^2 x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 4x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 \frac{8x}{2} \cdot \sin^2 \frac{4x}{2} = \cos^2 x - \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 4x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x \sin^2 x$$

$$x = y - 5$$

$$\cos^2 x - \cos^2 x = -2 \sin^2 \frac{15x}{2} \cdot \sin^2 \frac{4x}{2}$$

$$\cos^2 x = 2 \sin^2 \frac{15x}{2} \cdot \sin^2 \frac{4x}{2}$$

$$\cos^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \sin^2 x$$

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ y - x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$



$$y = x - 5$$

$$y = -x - 5$$

$$\cos^2 x \cos^2 x = 2 \cos^2 \frac{7x}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 x = 2 \cos^2 \frac{7x}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2}$$

$$26 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$(y+x)(y+x-y) = 2x^2 + x(y-x) - y^2$$

$$f(x) = 2^{33}x - 2x + 26 - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$f'(x) = 2^{33} - 2 - 2^x \ln 2$$

$$f''(x) = -2^x \ln 2$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$2^{33} - 2 = \ln 2$$

$$2^{33} = 2^{\ln 2}$$

$$2^x - 2 = 2^x \ln 2$$

$$2(2^{33} - 1) = 2^x \ln 2$$

$$(2^{33} - 2) \log_2 e = 2^x$$

$$2x(4-x) + y(4+x)$$

$$f(1) = 2^{33} - 2 + 26 - 2 - 3 \cdot 2^{34}$$

$$= -5 \cdot 2^{33} + 22$$

$$f(0) < 0$$

$$-2(x-2)^2 = -8$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 - xy = 12$$

$$x \ln^2 y \cdot y \log_5 = y \ln x^2$$

$$\ln x^2 \log_5 x + \ln y^5 = \ln x^2$$

$$2 \ln x \log_5 x + \ln y - 2 \ln x = 0$$

$$\frac{\ln x}{\ln y}$$

$$2 \frac{a^2}{8} + 5b - 7a = 0 \quad | : b$$

$$2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 7 \frac{a}{b} + 5 = 0$$

$$2 - 49 - 40 = 9$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7 \pm 3}{4} = 1; \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln x}{\ln y} = 1 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \sqrt{y^5} \end{cases}$$

$$2 \ln x^2$$

$$-2 \ln x^2 = \ln \frac{y^4}{x^2} \cdot \ln y$$

$$\ln y^5 \ln y - \ln x^2 \ln y = -2 \ln^2 x$$

$$y^2 - 2\sqrt{y^5} - 2y^5 + 8\sqrt{y^5} - 4y = 0$$

$$a x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x(x-2) = 0$$

$$x = 2 = y$$

$$18 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 4^5 + 8 \cdot 2^5 - 4 \cdot 1$$

$$8 \cdot 2^3 - 2^4 - 2^2$$

$$5 \cdot 12 \cdot 90 (-5 \cdot 10) \cdot 100 + 484 = 584$$

$$5 \cdot 12 \cdot 510$$

$$144$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

