МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

нужно найти количество 8-мизначных чисел, произведение цифр которых равно 9261

— — — — — — — —

как можно скомбинировать $\{3,3,3,7,7,7\}$
цифры от 0 до 9

1 вар) оставим 3,3,3,7,7,7 и добавим 1,1 ✓

(мы можем добавлять только 1-цы, чтобы произведение не увеличилось)

2 вар) заменим $3\cdot3$ на 9, получим 9,3,7,7,7 и добавим 1,1,1 ✓

заменить можем только так, потому что другие комбинации $3\cdot3\cdot3=27$, $3\cdot7=21$, $7\cdot7=49$ и т.д. дают не однозначное число
⇓
всего 2 варианта

рассмотрим возможные перестановки без повторений

1. 33377711

$n=8$ 3 $k_3=3$ 7 $k_7=3$ 1 $k_1=2$

$$\frac{8!}{3!\cdot3!\,2!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot2} = 10\cdot56 = 560$$

2. 93777111

$n=8$ 3 $k_3=1$ 9 $k_9=1$ 7 $k_7=3$ $k_1=3$

$$\frac{8!}{1!\cdot1!\cdot3!\cdot3!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6} = 20\cdot56 = 1120$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ +\ 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ответ: 1680.

2. $(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt2\cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$
воспользуемся формулами

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2} - \sqrt2\cos 4x + 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 0$$
$$-2\underline{\sin 7x}\sin 2x - \sqrt2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2\underline{\sin 7x}\cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt2(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\left(2\sin 7x-\sqrt{2}(\cos 2x+\sin 2x)\right)(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$\left(2\sin 7x-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)\right)(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$\left(2\sin 7x-2\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+2x\right)\right)\right)(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$2\left(\sin 7x-\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+2x\right)\right)(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$2\cdot 2\sin\frac{7x-\frac{\pi}{4}-2x}{2}\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}+2x}{2}(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$4\cdot\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}(\cos 2x-\sin 2x)=0$$
$$4\cdot\sin\left(\tfrac{5}{2}x-\tfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\tfrac{9}{2}x+\tfrac{\pi}{8}\right)(\cos 2x-\sin 2x)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0\\ \cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0\\ -\cos 2x+\sin 2x=0 \quad \Big| \cdot\frac{1}{\cos 2x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}=\pi k,\ k\in Z\\ \frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\\ \operatorname{tg} 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

(если ~~sin~~ $\cos 2x=0$, то $\sin 2x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ противоречие с основным тригонометрическим тождеством)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z\\ \frac{9}{2}x=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}+2\pi k,\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z\end{array}\right.$$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z;\\ x=\pm\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{9}-\frac{\pi}{8}\cdot\frac{2}{9}+2\pi\cdot\frac{2}{9}k,\ k\in Z;\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

3. $$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1)\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0 & (2)\end{cases}$$

(2) $y^2-(x+4)y-2x^2+8x=0$

$D=(x+4)^2-4\cdot 1(-2x^2+8x)=x^2+8x+16+8x^2-32x=$
$=9x^2-24x+16=(3x+(4))^2=(3x-4)^2\geq 0$

$y_{1,2}=\frac{x+4\pm(3x-4)}{2\cdot 1}$ → $\frac{x+4+3x-4}{2}=\frac{4x}{2}=2x$; → $\frac{x+4-3x+4}{2}=-x+4$

получили систему
$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}\\ \left[\begin{array}{l}y=2x\\ y=-x+4\end{array}\right.\end{cases}$$

1 сл.) $y=2x$ тогда (1)

$x>0$
$x\neq 0$

$(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$
$(x^2\cdot 16\cdot x^4)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$
$x^{-6\ln x}\cdot 16^{-\ln x}=(2x)^{\ln 2-\ln x^6}$
$x^{-6\ln x}\cdot 16^{-\ln x}=2^{\ln 2-\ln x^6}\cdot x^{\ln 2-\ln x^6}$
$x^{-6\ln x}\cdot 2^{-4\ln x}-2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln 2}\cdot x^{-6\ln x}=0$
$x^{-6\ln x}(2^{-4\ln x}-2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln 2})=0$
$x^{-6\ln x}(2^{-4\ln x}-2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot 2^{\ln x})=0$
$x^{-6\ln x}(2^{-4\ln x}-2^{\ln 2-\ln x^6+\ln x})=0$

$x^{\ln 2}=2^{\log_2(x^{\ln 2})}=$
$=2^{\ln 2\log_2 x}=$
$=2^{\ln 2\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=$
$=2^{\ln x}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} x^{-6\ln x}=0 \\ -4\ln x = \ln 2 - \ln x^6 + \ln x \end{array}\right.$ $\quad x>0 \to x^{-6\ln x}>0 \quad \varnothing$

$-4\ln x - \ln 2 + 6\ln x - \ln x = 0$

$\ln x - \ln 2 = 0$

$\ln x = \ln 2$

$x=2$ ✓ $\quad y=4$ ✓

2 сл.) $y=-x+4$ $\quad \to \quad x>0,\ x\neq 0$

тогда (1) $\left(x^2\cdot(-x+4)^4\right)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln\left(\frac{-x+4}{x^7}\right)}$

$x^{-2\ln x}\cdot(-x+4)^{-4\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4)-\ln x^7}$

$x>0$, $\frac{-x+4}{x^7}>0$

$-x+4>0$

$x<4$

$x^{-2\ln x}\cdot(-x+4)^{-4\ln x} - (-x+4)^{\ln(-x+4)-7\ln x}=0$

$x^{-2\ln x}\cdot\left((-x+4)^{-4\ln x}\right) - (-x+4)^{\ln(-x+4)}\cdot(-x+4)^{-7\ln x}=0$

$(-x+4)^{-4\ln x}\left(x^{-2\ln x} - (-x+4)^{\ln(-x+4)-3\ln x}\right)=0$

$>0 \to \neq 0 \Downarrow$

$x^{-2\ln x} = (-x+4)^{\ln\left(\frac{-x+4}{x^3}\right)}$

1 вар. $\quad x=-x+4 \quad 2x=4 \quad x=2$

$2^{-2\ln 2} = 2^{\ln\frac{2}{8}} \Rightarrow 2^{-2\ln 2} = 2^{\ln 2 - \ln 8}$ $(=2^3)$

$2^{-2\ln 2} = 2^{\ln 2 - 3\ln 2} =$

$= 2^{-2\ln 2}$ ✓

2 вар. $\quad x\neq(-x+4)$

$x=1$ -?

$1=3^{\ln\frac{3}{1}}$

$1\neq 3^{\ln 3}$

$3^0\neq 3^{\ln 3}$

$x\neq 1$

$x^{-2\ln x} - x^{\log_x(-x+4)\cdot\ln\left(\frac{-x+4}{x^3}\right)}=0$

$-2\ln x = \log_x(-x+4)\ln\left(\frac{-x+4}{x^3}\right)$

$-2\ln x = \frac{\ln(-x+4)}{\ln x}\ln\left(\frac{-x+4}{x^3}\right) \quad \Big|\cdot \ln x\neq 0$

$-2\ln^2 x = \ln(-x+4)\left(\ln(-x+4)-3\ln x\right)$

$-2\ln^2 x = \ln^2(-x+4) - 3\ln x\cdot\ln(-x+4)$

$\ln^2(-x+4) - 3\ln x\cdot\ln(-x+4)+2\ln^2 x=0$

$\ln(-x+4)\left(\ln(-x+4)-\ln x^3\right)+2\ln^2 x=0$

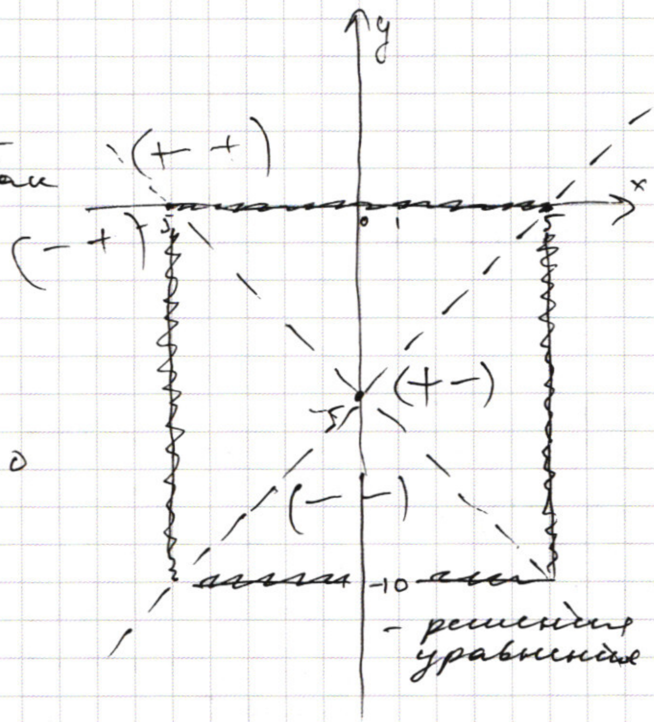
$\ln(-x+4)\ln\frac{-x+4}{x^3}+2\ln^2 x=0 \quad \ldots$

Ответ: $(2;4)$, ...

5. $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (1) \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a & (2) \end{cases}$ 2 реш.

(1) $x+y+5>0$ $\quad y>-x-5$
$y-x+5>0$ $\quad y>x-5$

нарисовали нули модулей и в каждой области определили знак



- решения уравнения (1)

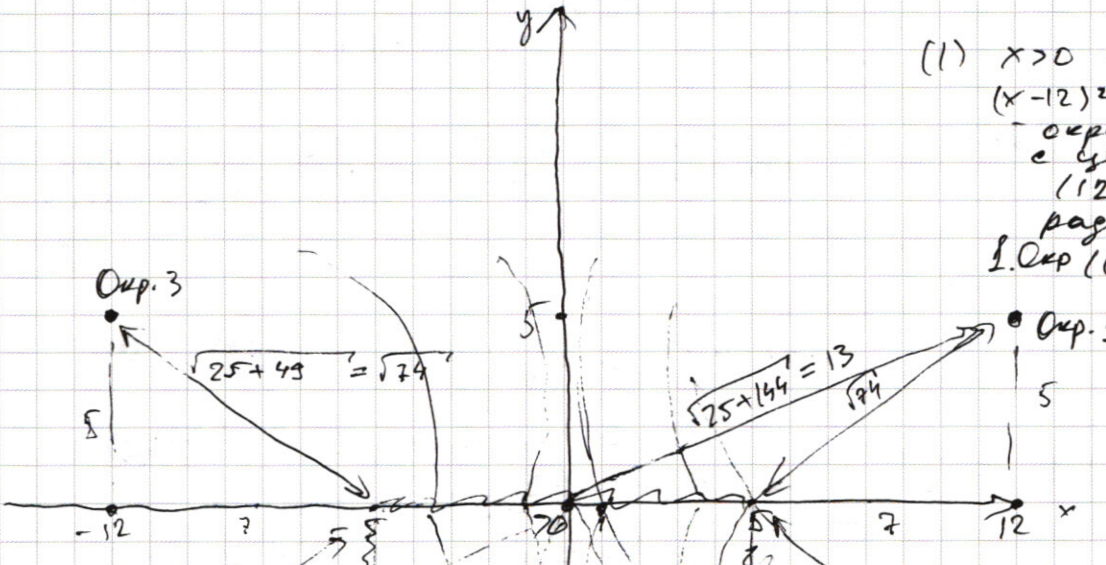
(1) $++$ $\quad x+y+5+y-x+5=10$
$2y+10=10$
$y=0$

(2) $+-$ $\quad x+\cancel{y}+\cancel{5}-\cancel{y}+x-\cancel{5}=10$
$2x=10$
$x=5$

(3) $-+$ $\quad -x-\cancel{y}-\cancel{5}+\cancel{y}-x+\cancel{5}=10$
$-2x=10$
$x=-5$

(4) $--$ $\quad -\cancel{x}-y-5-y+\cancel{x}-5=10$
$-2y-10=10$
$y=\frac{20}{-2}=-10$

(2)



1) $x>0$ $y>0$
$(x-12)^2+(y-5)^2=a$ - окружность с центром $(12,5)$ и радиусом $\sqrt{a}$
1. Окр $((12,5),\sqrt{a})$

2) $x>0$ $y<0$
$(x-12)^2+(y+5)^2=a$
2. Окр. $((12,-5),\sqrt{a})$

3) $x<0$ $y>0$
$(x+12)^2+(y-5)^2=a$
3. Окр. $((-12,5),\sqrt{a})$

4) $x<0$ $y<0$
$(x+12)^2+(y+5)^2=a$
4. Окр $((-12,-5),\sqrt{a})$
центр радиус

нужно, чтобы система имела 2 решения
при $\sqrt{a}\le 0$ нет решений
при $0<\sqrt{a}<7$ нет решений
при $\sqrt{a}=7$ Окр. 2 и Окр. 4 коснутся квадрата 2 реш. V

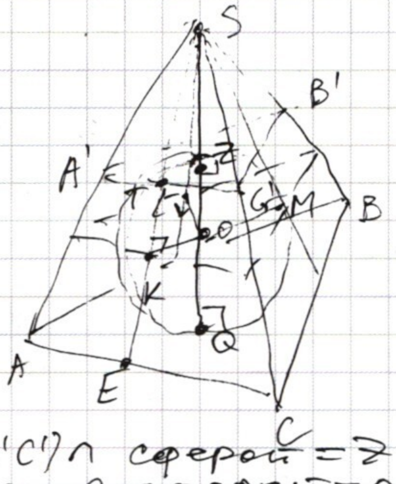
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $7<\sqrt{a}<\sqrt{74}$ будет 4 реш.
при $\sqrt{a}=\sqrt{74}$ будет 4 реш. : $(-5;0), (5;0), (-5;-10); (5;-10)$
при $\sqrt{74}<\sqrt{a}<13$ будет 4 реш.
при $\sqrt{a}=13$ будет 2 реш: $(0;0)$, $(0;-10)$ ✓
при $\sqrt{a}>13$ будет $\varnothing$ реш.

$a=7^2=49$
$a=13^2=169$ | при этих a ровно 2 реш.

Ответ: при $a=49$ и $a=169$.

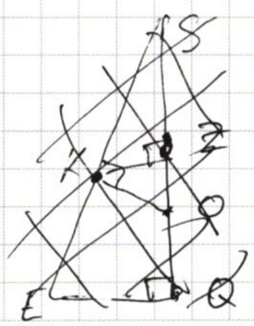
4.

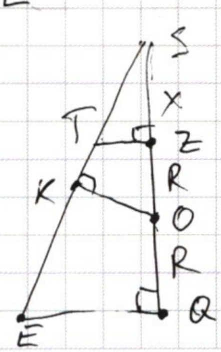


$\angle KSO$ - ?
$S_{KLM}^{сеч}$ - ?
$S_{ABC}=16$
$S_{A'B'C'}=1$
$(A'B'C') \parallel (ABC)$ т.к. обе плоскости $\perp SO$
$(SAC)\cap(ABC) \parallel (SAC)\cap(A'C'B')$
$\Downarrow$
$AC \parallel A'C'$
аналогично $AB \parallel A'B'$
$BC \parallel B'C'$
$\Downarrow$
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
$\Downarrow$
k - коэффициент подобия
$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{16}{1}$ $k=4$

$(A'B'C') \cap$ сферой $= Z$
$(ABC) \cap$ сферой $= Q$

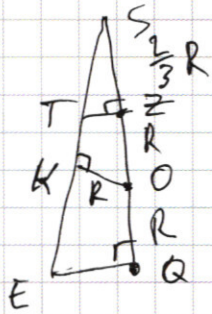
$A'B'C' \cap (SK) = T$
$ABC \cap (SK) = E$





TZ — радиус окр., вписанной в $A'B'C'$
EQ — радиус окр., вписанной в ABC
$\frac{TZ}{EQ} = \frac{1}{k} = \frac{1}{4}$ $ZO=OQ=R$
пусть $SZ=x$
тогда $\triangle STZ \sim \triangle SEQ$
$\frac{x}{x+2R} = \frac{TZ}{EQ} = \frac{1}{4}$ $4x=x+2R$ $x=\frac{2}{3}R$

тогда



из $\triangle SOK$

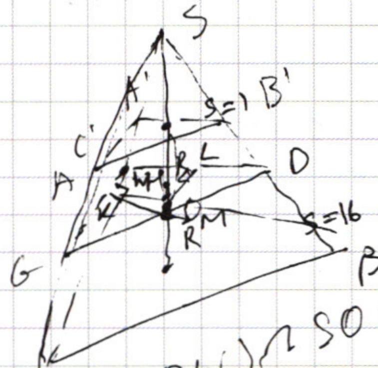
$\sin KSO = \frac{KO}{OS} = \frac{R}{(\frac{2}{3}+1)R} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$\cos KSO = \frac{4}{5}$.

пусть $(KML) \cap (SC) = G$

$(KML) \cap (SB) = D$

$(KML) \cap (SA) = W$

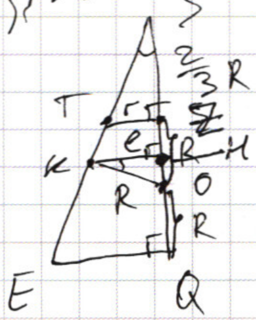


пусть $(GDW) \cap SO = H$

$S_{A'C'B'} = P \cdot r$ — r — радиус окр. впис. в $\triangle A'C'B'$, P — полупериметр $\triangle A'C'B'$

$S_{A'C'B'} = 1$

пусть ℓ — радиус окр. впис. в $\triangle DGW$



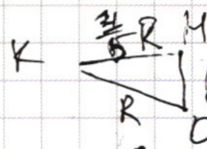
$\angle KSO = \angle OKH$

$\sin OKH = \frac{OH}{KO}$

$\cos OKH = \frac{\ell}{R} = \frac{4}{5}$

$\ell = \frac{4}{5}R$

$\triangle A'B'C' \sim \triangle GDW$ и коэф. подобия $\frac{10}{13}$



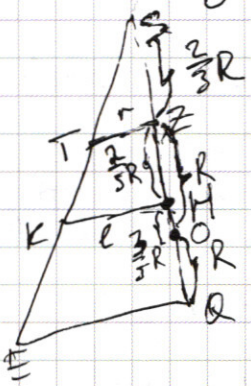
$\sqrt{1-\frac{16}{25}}R = \frac{3}{5}R$

16 × 16 = 256

$S_{GDW} = P \cdot r \cdot \frac{256}{100} = 2{,}56$

$ZH = ZO - OH = R - \frac{4}{5}R = \frac{1}{5}R$

$\frac{SZ}{SH} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{2}{3}R + \frac{2}{5}R} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{10+8}{15}R} = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{18} = \frac{10}{18}$



$\frac{r}{\ell} = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{18} = \frac{10}{18}$

$\frac{r}{\ell} = \frac{SZ}{SH} = \frac{10}{18}$

$\frac{P}{\frac{P_{GWD}}{2}} = \frac{10}{18}$ $\qquad \frac{P_{GWD}}{2} = \frac{18}{10}P$

$\ell = \frac{18}{10}r$

Ответ: $\sin \angle KSO = \frac{3}{5}$, $S_{сеч.\,KLM} = 2{,}56$. ~~1,69~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. _ _ _ _ _ _ _ _

3,3,3,7,7,7, 1...

произведение цифр

3 3 3 7 7 7 1 1

9 3 7 7 7 1 1 1

1 1 3 3

9261 | 3
3087 | 3
1029 | 3
343

343 | 7
49 | 7
7 | 7
1

$343 \cdot 27$: 2401 + 686 = 9261

$49 \cdot 7 = 343$

A_n^k, P_n, C_n^k

$\frac{n!}{3!\,3!\,2!} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot2} = 10\cdot56 = 560$

$\frac{4!}{2!} = 3\cdot4 = 12$

1 2 3 4 5   3!

3 2 1
4 3 2
5 4 3

$\frac{4!}{4}$, $\frac{5!}{2!}$

1123, 1132, 1213, 1231, 1321, 1312, 2113, 2131, 2311, 3112, 3121, 3211

$\frac{8!}{5!\,5!\,6!}$

$\frac{8!}{3!\,3!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6} = 20\cdot56 = 1120$

$\frac{n!}{k!}$

1680

1123
4321

$\frac{4!}{2!}$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$

1'2'3'3, 2'3'2'3, 3'2'3'1 2, 2'1'3'2, 3'1'2'2, 3'2'1'2

4+4+6

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 5x + 4x$

~~cos 5x cos 4x − sin 5x sin 4x − cos 5x − √2 cos 4x +~~
~~+ sin 5x cos 4x + cos 5x sin 4x + sin 5x = 0~~

$\cos 5x(\cos 4x - 1 + \sin 4x) - \sin 5x(\sin 4x + \cos 4x + 1) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$\cos 4x(\cos 5x - \sqrt{2} + \sin 5x) - \sin 4x(\sin 5x \cancel{+} \cos 5x) = 0$

$-\cos 5x + \sin 5x = 0$

$\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - (\sin 5x - \cos 5x)(\sin 4x + 1) = 0$

$\cos 4x$

3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0\end{cases}$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x^7}}$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 - 4\cdot1\cdot(-2x^2+8x) =$
$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{x+4\pm(3x-4)}{2\cdot1} = \frac{x+4+3x-4}{2}$, $\frac{x+4-3x+4}{2}$

$\frac{4x}{2} = 2x$, $\frac{-2x+8}{2} = -x+4$

$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -x+4 \end{array}\right.\end{cases}$

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -x+4 \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $y = 2x$

$(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\frac{2x}{x^7}}$

$x^{-6\ln x} \cdot 16^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 \cancel{x}x^6}$

$x^{-6\ln x} \cdot 16^{-\ln x} = 2^{\ln\frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}}$

$x^{-6\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} = 2^{\ln\frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}}$

$x^{-6\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} - 2^{\ln 2 - \ln x^6} \cdot x^{\ln 2 - \ln x^6} = 0$

$\cancel{x^{-6\ln x}} \cdot 2^{-4\ln x} - 2^{\ln 2} \cdot 2^{-\ln x^6} \cdot x^{\ln 2} \cdot \cancel{x^{-\ln x^6}} = 0$

$x^{-6\ln x}(2^{-4\ln x} - 2^{\ln 2} \cdot 2^{-\ln x^6} \cdot x^{\ln 2}) = 0$

$= 2^{\log_2 x^{\ln 2}} = 2^{\ln 2 \log_2 x} =$

$= 2^{\cancel{\ln 2}\frac{\ln x}{\cancel{\ln 2}}} = 2^{\ln x}$

$x^{-6\ln x}(2^{-4\ln x} - 2^{\ln 2 - \ln x^6 + \ln x})$

$x^{-6\ln x}$

$-4\ln x = \ln 2 - \ln x^6 + \ln x$

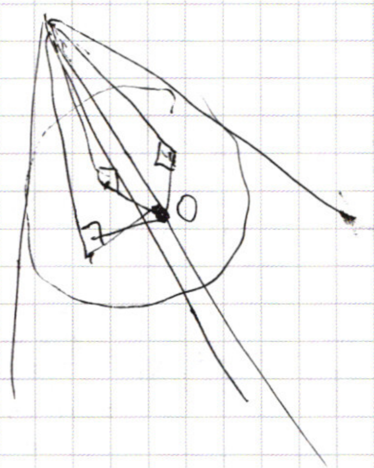
$\ln 2 - 6\ln x + \ln x + 4\ln x = 0$

$\ln 2 - \ln x = 0$

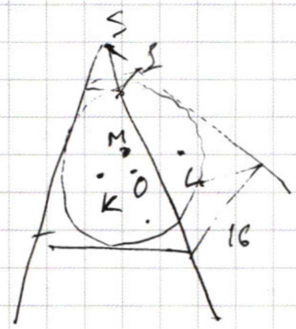
$x = 2$

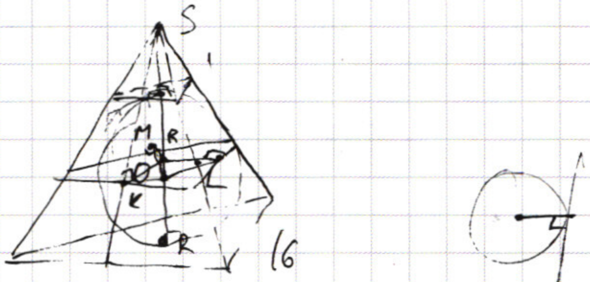
2) $y = -x + 4$

$x^2 \cdot$



4.





5. $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

1. $x+y+5 \geq 0$

$y \geq -x-5$

$y \geq x-5$

$++ \quad \cancel{x}+y+5+y-\cancel{x}+5 = 10$

$2y = -10+10$

$y_1 = +0$

$+- \quad x+\cancel{y}+\cancel{5}-\cancel{y}+x-\cancel{5} = 10$

$2x = 10$

$x = 5$

$-+ \quad -\cancel{x}-\cancel{y}-\cancel{5}+\cancel{y}-x+\cancel{5} = 10$

$-2x = 10$

$x = -5$

$-- \quad -\cancel{x}-y-5-y+\cancel{x}-5 = 10$

$-2y-10 = 10$

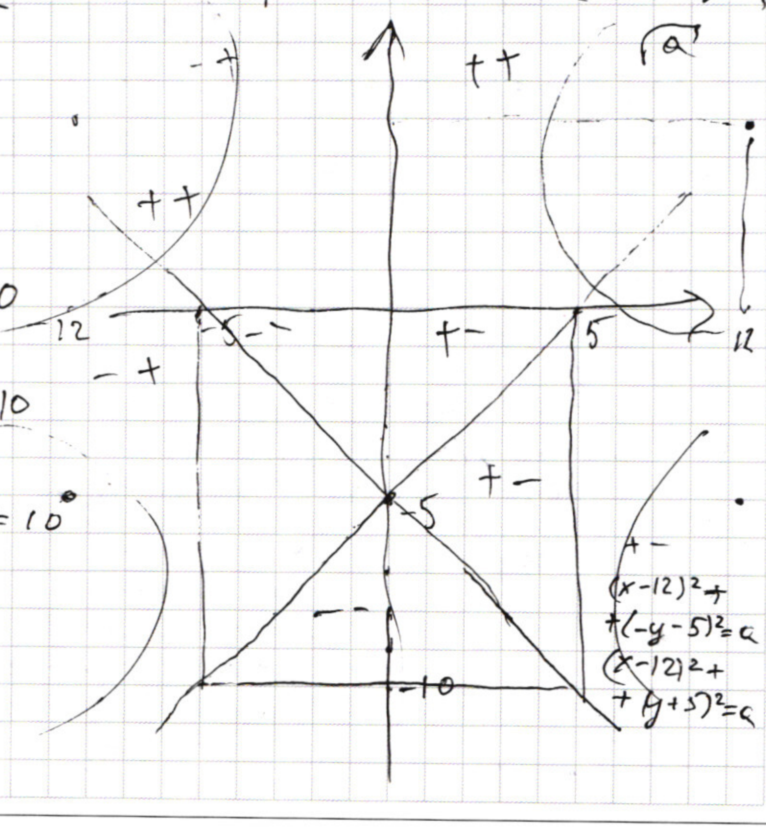
$-2y = 20$

$y = -10$

2р.

2р.

2) $++ \quad (x-12)^2+(y-5)^2$



$+-$

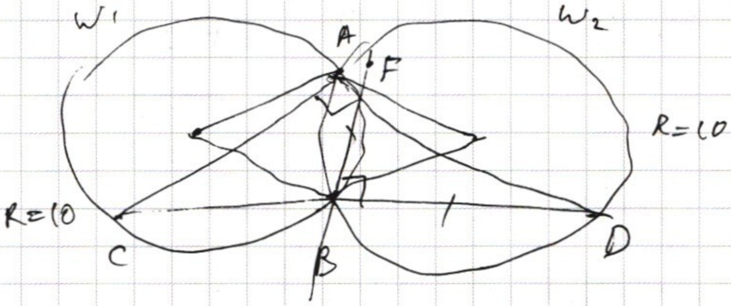
$(x-12)^2 + (-y-5)^2 = a$

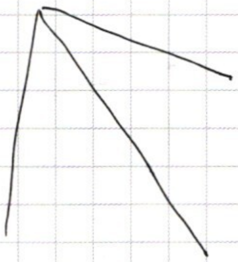
$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$

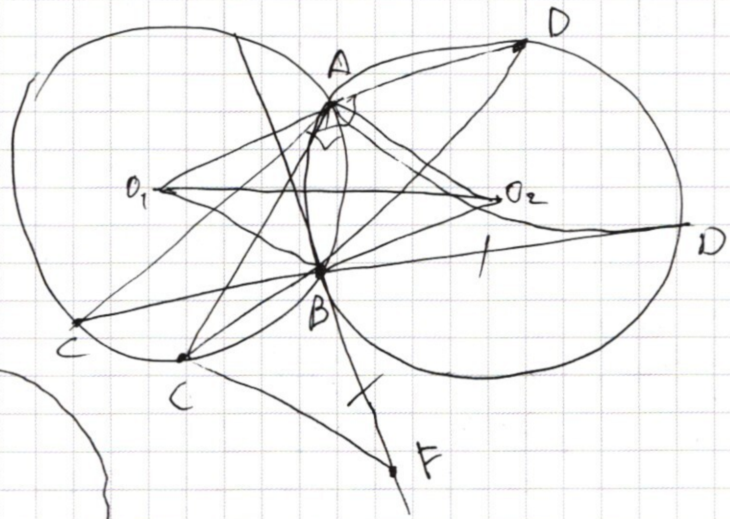
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

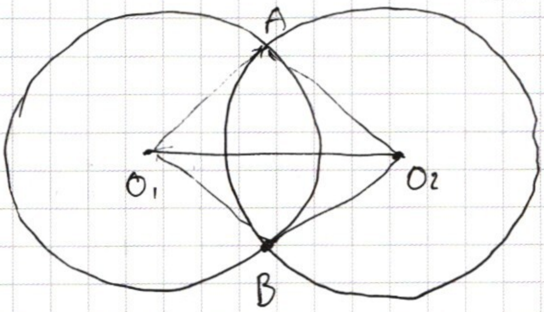
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

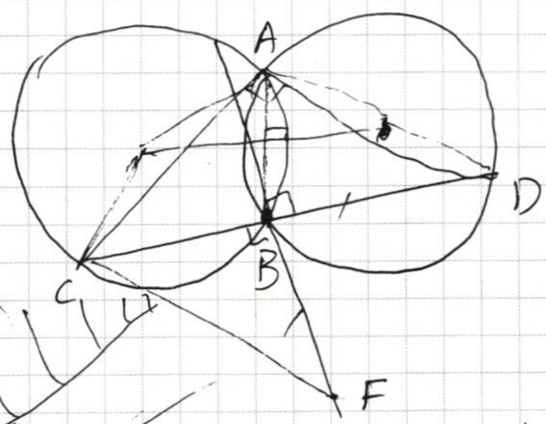
6.









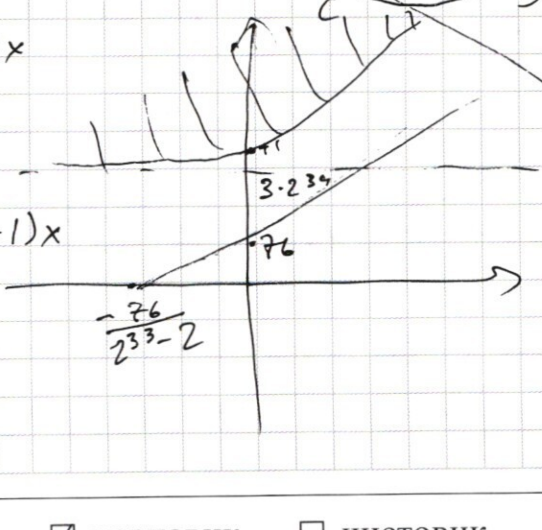


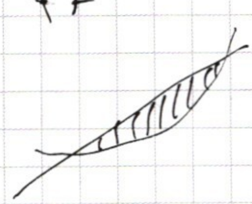
7. $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2^{33}x - 2x$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32}-1)x$





$(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2}\cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$

15:35
13.08
2ч ~ 27м.

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x$

$2\sin 7x(-\sin 2x + \cos 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - 2(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin 2x \cos\frac{\pi}{4})) = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - 2\sin(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)\, 2\,(\sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0$

$2(\cos 2x - \sin 2x)\, 2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} \cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$4(\cos 2x - \sin 2x)\sin(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8})\cos(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$

$-2\ln x \quad x^{-2\ln x}$

$\ln\frac{-x+4}{x^3}$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = (\log_b a)^{-1}$

$\log$

$(-x+4)^{\ln(-x+4)} =$

$= (-x+4)^{\frac{1}{\log_{(-x+4)} e}}$

$= (-x+4)^{(\log_{(-x+4)} e)^{-1}}$

$\frac{-1\cdot x^3 - (-x+4)3x^2}{x^6} = 0$

$(\log_a b)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{\ell\ln a} \quad \frac{-x+4}{x^3}$

$-x^3 - (-x+4)3x^2 =$
$= -x^3 + 3x^3 - 12x^2$
$2x^3 - 12x^2 = x^2(2x - 12) \quad x = 6$

$x^{-2\ln x} \cdot (-x+4)^{-4\ln x} - (-x+4)^{\ln(-x+4)} \cdot (-x+4)^{-7\ln x} = 0$

$(-x+4)^{-4\ln x}(x^{-2\ln x} - (-x+4)^{\ln(-x+4)} \cdot (-x+4)^{-3\ln x}) = 0$

$x^{-2\ln x} - (-x+4)^{\ln(-x+4) - \ln x^3} = 0$

$y^{\ln y}$

$x^{-2\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4) - \ln x^3}$

$x^{-2\ln x} = (-x+4)^{\ln(\frac{-x+4}{x^3})}$

$x = -x + 4$
$2x = 4$
$x = 2$ ✓

$x = 2 \qquad -2\ln 2 = \ln\frac{2}{x^3} =$
$= -2\ln 2 = \ln 2 - 3\ln 2$
$-2\ln 2 = -2\ln 2$ ✓

$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x^7}}$

$x \neq 2 \qquad -2\ln x = 0 \qquad \ln x = 0 \quad x = 1$

$x^{2\ln x} y^{-4\ln x} =$

$3^{\ln\frac{3}{1}} = 3^{\ln 3}$

$= y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^7}$

$-2\ln x = \log_x(-x+4) \cdot \ln(\frac{-x+4}{x^3})$

$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} =$
$= y^{\ln y} \cdot y^{7\ln x}$

$-2\ln x = \frac{\ln(-x+4)}{\ln x} \cdot (\ln(-x+4) - \ln(x^3))$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$-2\ln x$

1р.

$2\sqrt{2} > 3$
$\sqrt{8} > \sqrt{9}$ ~~$\sqrt{10}$~~

$-2\ln^2 x = \ln(+4 + (-x))\ln(\frac{-x+4}{x^3})$

$x > 0$
$x < 4$
$0 < x < 4$

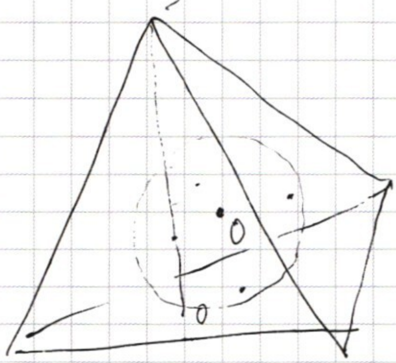
$\ln^2(-x+4) - 3\ln x \cdot \ln(-x+4) + 2\ln^2 x = 0$

$(\ln(-x+4) - \sqrt{2}\ln x)^2 + (2\sqrt{2} - 3)(\ln x \cdot \ln(-x+4)) = 0$
$-2\sqrt{2}\ln(-x+4)\cdot\ln x$

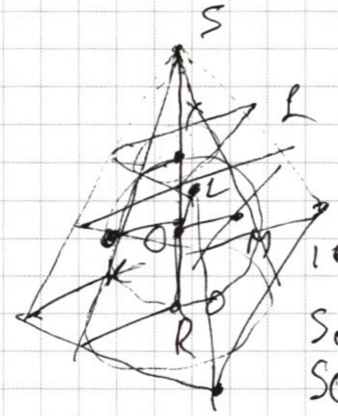
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$k = y$



$\frac{x}{x+2R} =$

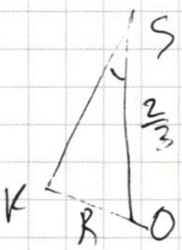
$S_O = p \cdot r$

$SO = y \cdot p \cdot R$

$y^2 = \frac{1}{16}$

$y = \frac{1}{4}$

$\frac{p \cdot r}{y \cdot p \cdot R} = \frac{1}{16}$



$\frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$

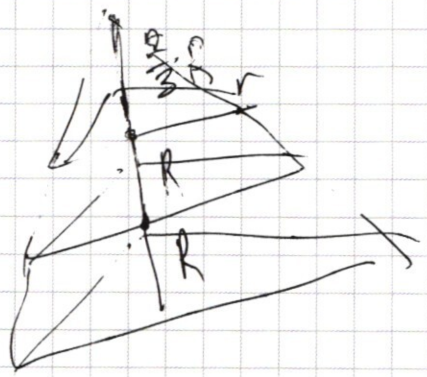
$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+2R}$

$x + 2R = 4x$

$2R = 3x$ $\quad x = \frac{2}{3}R$

$\cos = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$

S_{KMN}



$\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{5}{3}R} = \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$p \cdot r = 1$

$p \cdot \frac{5}{2} \cdot r \cdot \frac{5}{2} = 1 \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$