

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Дано число 9261, его можно представить как:

$$3^3 \cdot 7^3 = 27 \cdot 343 = 9261$$

Следовательно, возможно только 2 варианта, когда:

- 1) число состоит из трех "3" (троек), трех "7" (семерок) и двух "1" (единиц)
- 2) число состоит из трех "7" (семерок), одной "3" (тройки), одной "9" (девятки) и трех "1" (единиц).

$$\Rightarrow 1) P = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 10 = 560$$

$$2) P = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$3) 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

№ 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin 7x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin 7x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$2 \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) / (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin (2x + 45^\circ)$$

$$\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$

$$2 \cdot \sin \left(\frac{2x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2x + \frac{\pi}{4} + 2x}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Отв: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\ln x} &= y^{\ln \left(\frac{4}{x^2} \right)^{\sqrt{3}}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$1) \ln (x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln \left(\frac{4}{x^2} \right)}$$

$$-(2 \ln x + 4 \ln y) \ln x = \ln y \cdot (\ln y - 7 \ln x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$(\sqrt{2} \ln x - \sqrt{2} \ln y) (\sqrt{2} \ln x - \sqrt{2} \ln y) = 0$$~~

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln y - 7 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y = 3 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y + \ln y = 0$$

$$(2 \ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) = 0$$

$$2) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$-(2x - y)(x + y - 4) = 0$$

$$3) \begin{cases} x^2 = y \\ x = y \\ (2x - y)(x + y - 4) = 0 \end{cases}$$

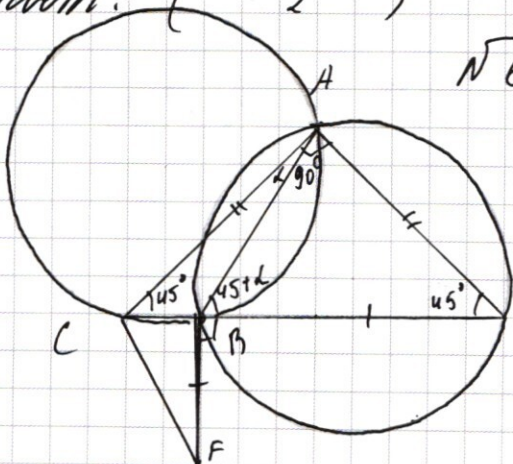
$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - x^2)(x + x^2 - 4) = 0 \\ (2x - x)(x + x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2; 2);$$

$$(2; 4);$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right); (2; 2); (2; 4).$$



$$R = 10$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 \quad (\text{по т. Пифагора})$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BF^2}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = \frac{AB}{\sin \angle BDA} \quad (\text{по т. синусов})$$

$$2R = \frac{AB}{\sin \angle BDA}$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACB = \sin \angle BDA$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle ACD + \angle CDA = \frac{\pi}{2} \\ \angle ACD = \angle CDA = \frac{\pi - \angle CAD}{2} = 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

Тогда $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2R = \frac{BD}{\sin(90 - \alpha)}$$

$$CB = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$BD = 2R \cdot \sin(90 - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

$$\Rightarrow BD^2 + BC^2 = 4R^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2$$

Следовательно $4R^2 = CF^2$
 $CF = 2R = 20$

Ответ: 20

а) $CB = 12 = 2R \sin \alpha$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin(45 + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{AC}{\sin(\alpha + 45)} = 2R \Rightarrow AC = 2R \sin(45 + \alpha) = 14\sqrt{2}$$

б) $\triangle CBF$: $CB = 12$; $CF = 20$; $BF = BD = 2R \cdot \cos \alpha =$
 $= 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$

Тогда $\angle BCF = x$; $\sin x = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin(45+x)$$

$$\sin(45+x) = \sin 45 \cos x + \cos 45 \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 7\sqrt{2} = 49 \cdot 2 \cdot 2 = 196$$

Ответ: 196

$\sqrt{7}$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$$

$$76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} > 0$$

$$f(x) = 76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} > 0$$

~~$$f(x) = 76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$~~

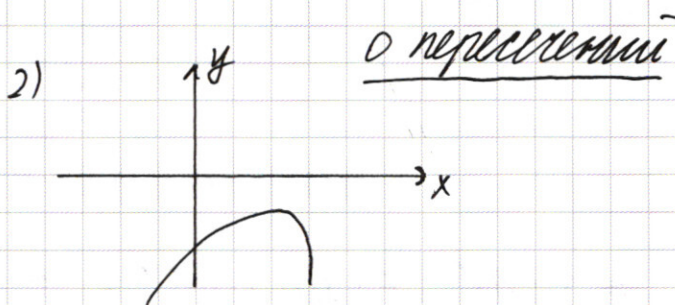
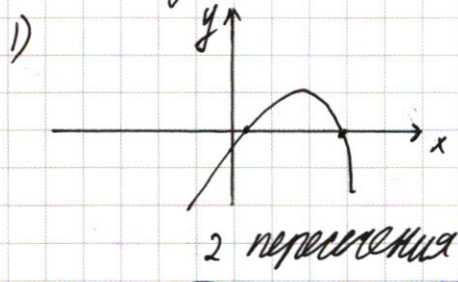
$$f'(x) = 2^{33} - 2 - 2^x \ln 2$$

$$2^{33} - 2 - 2^x \ln 2 > 0$$

$$2^x \ln 2 < 2^{33} - 2$$

Мы видим, что $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает,
а затем убывает (т.к. знак впоследствии меняется на
противоположный)

$\Rightarrow 2$ случая:



Найдём $(\cdot)$ max (максимум), тогда если в этой $(\cdot)$ $f(x) > 0$, то $f(x) > 0$ будет иметь набор решений:

$$2^{33} - 2 = 2^x \ln 2$$

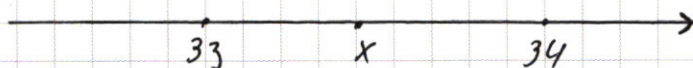
$$2^{33} - 1 = 2^{x-1} \ln 2$$

$$2^{x-1} = \frac{2^{33} - 1}{\ln 2}$$

$$x-1 = \log_2 \left(\frac{2^{33} - 1}{\ln 2} \right)$$

$$x = \log_2 \left(\frac{2^{33} - 1}{\ln 2} + 1 \right)$$

$$x = \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2}$$



$$f \left(\log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \right) = 76 + 2^{33} \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} - 2 \cdot \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} - 2^{\log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2}} - 3 \cdot 2^{34}$$

$$f \left(\log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \right) = 76 + (2^{33} - 2) \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} - \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} - 3 \cdot 2^{34}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^{33} - 2 > 2^{32}$$

$$\log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} > 33 - 1 = 32$$

$$+ \left(\log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \right) > 0$$

Найдем пересечения с осью Ox

$$76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} = 0$$

$$(2^{33}x - 3 \cdot 2^{34}) + (76 - 2x - 2^x) = 0$$

при $x=6$

$$(2^{34} \cdot 3 - 3 \cdot 2^{34}) + (76 - 12 - 2^6) = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$x=6$ — одна из 2^x точек

$$(2^{33}x - 3 \cdot 2^{34} - 2^x) + (76 - 2x) = 0, \text{ при } x=38$$

$$(2^{33} \cdot 38 - 3 \cdot 2^{34} - 2^{38}) + (76 - 2 \cdot 38) = 0$$

$$2^{33}(38 - 6 - 32) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 0 = 0$$

Необходимо $x \in (6; 38)$

Найдем только значения y соответствующие значению x .

$$+ (x+1)f(x) = 76 - 76 + 2^{33}(x+1) - 2^{33}x - 2(x+1) + 2x - 2^{x+1} + 2^x - 3 \cdot 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{33} - 2 - 2^x$$

Необходимо одному значению x соответствует

$$|2^{33} - 2 - 2^x| \text{ значений } y$$

$$\text{при } x = 34 - |2^{33} - 2 - 2^x| = 2^{33} + 2$$

$$\text{при } x = 33 - |2^{33} - 2 - 2^x| = 2 \text{ значения } y$$

$$\text{при } x = 32 - |2^{33} - 2 - 2^x| = 2^{32} - 2$$

$$\Rightarrow \text{Всего решений: } \sum_{n=9}^{37} |2^{33} - 2^{n-2}| = \sum_{n=9}^{32} (2^{33} - 2^{n-2}) +$$

$$+ \sum_{n=34}^{37} (2^n - 2^{33} + 2) + 2 = 2^{33} \cdot 24 - 2^9 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{23}) -$$

$$- 2 \cdot 24 + 2^{34} (1 + 2 + 2^2 + 2^3) - 4 \cdot 2^{33} + 2 \cdot 4 + 2 = 3 \cdot 2^{36} -$$

$$- 2^9 (2^{24} - 1) - 2^4 \cdot 3 + 2^{34} (2^4 - 1) - 2^{35} + 2^3 + 2 = 3 \cdot 2^{36} - 2^{33} +$$

$$+ 2^9 - 3 \cdot 2^4 + 2^{38} - 2^{34} - 2^{35} + 2^3 + 2 = 2^{33} (24 - 1 + 32 - 2 - 4) +$$

$$+ 2 (2^8 - 24 + 4 + 1) = 49 \cdot 2^{33} + 237 \cdot 2 = 474 + 49 \cdot 2^{33}$$

$$\text{Ответ: } 474 + 49 \cdot 2^{33}$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Найти все значения a , при которых система имеет 2 решения.

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$O_1(12; 5) R^2 = a$$

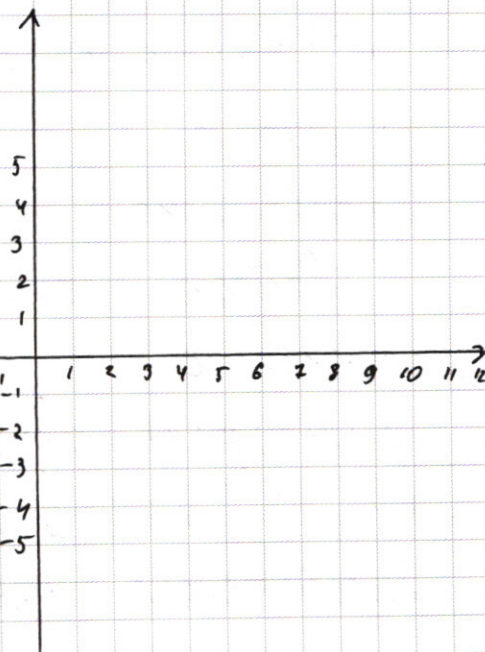
$$O_2(-12; 5) R^2 = a$$

$$O_3(-12; -5) R^2 = a$$

$$O_4(12; -5) R^2 = a$$

Из-за модуля $|x|$ и $|y|$

уравнение имеет 4 окр.

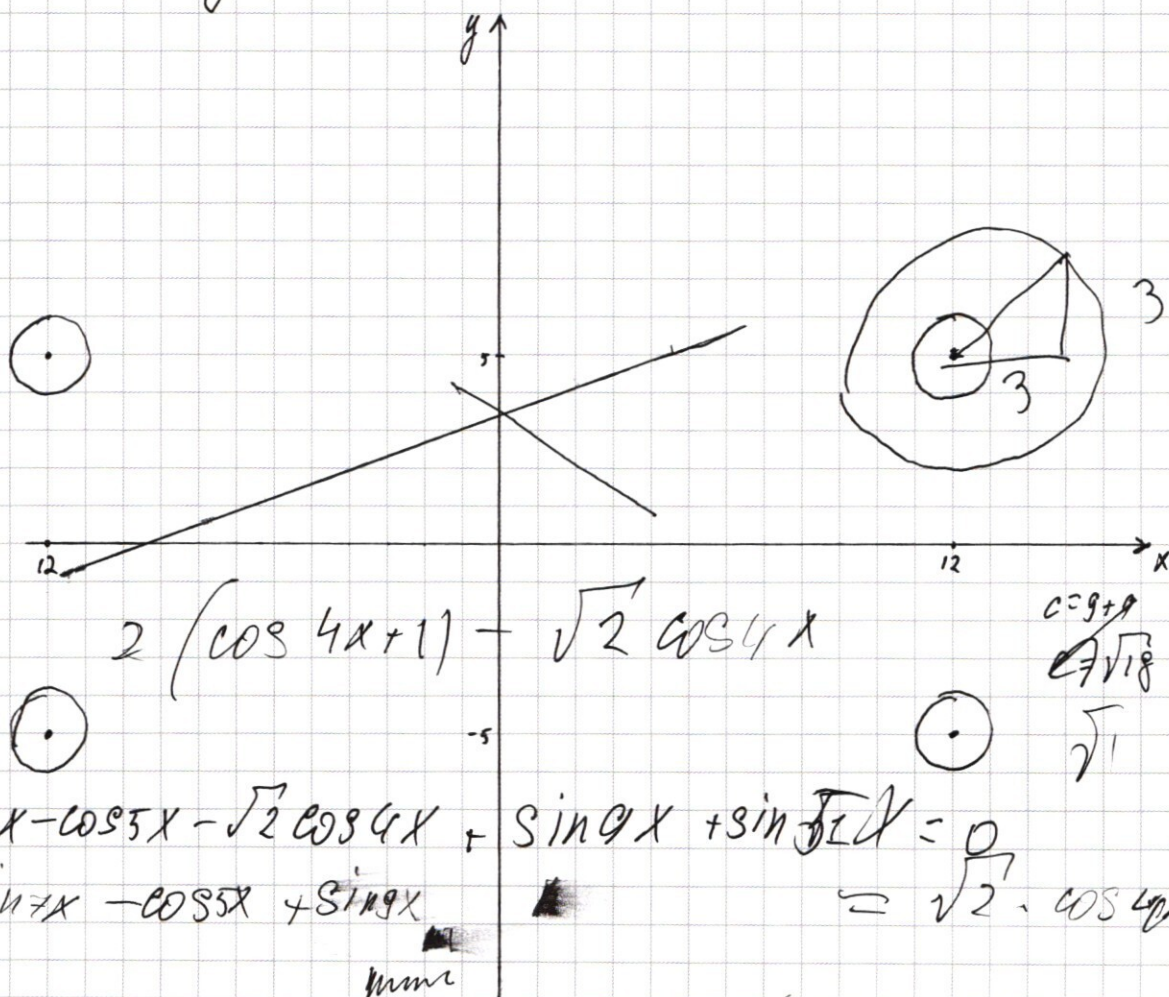


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{5} \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$1) (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$



$$2(\cos 4x + 1) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$c=9+9 \\ \sqrt{18} \\ \sqrt{1}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$2 \sin 7x - \cos 5x + \sin 9x$$

$$= \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1-2}{1+\sqrt{2}} \sin)$$

$$2\sin 7x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x /$$

$$2\sin 7x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \\ y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + (2^{33} - 2)x \\ y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + x \cdot 2^{33} - 2x \end{cases}$$

~~343~~ ~~49~~ ~~7~~

343

$\times 27$

2401

686

9261

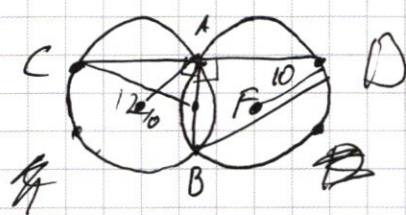
~~9261~~

6
49
 $\times 7$
343

6720 $\overline{) 12}$
560
60
42
42
0

~~9261~~ ~~9261~~

$$S = 12 \cdot 5 \cdot 2 = 120 - 28 \Rightarrow$$



$$S = 12 \cdot 5 \cdot 2 = 120 - 28 \Rightarrow$$

S =

~~9261~~ ~~9261~~

~~9261~~ ~~9261~~

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

3
140
 $\times 8$
1120

$\Rightarrow$ Возможно 2 варианта: ① 3 - "3", 3 - "7" 2 - "1"

$$\times 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \quad ② \quad 3 - "7", 1 - "3"$$

$$\times 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \quad 1 - "9" \quad 3 - "1"$$

$$P = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

$$+ \frac{1120}{560 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1680}{120}$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{560}{12 \cdot 2} = 23 \frac{1}{3}$$

$$P = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3!} = 1120$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{120}{8 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1680}{8 \cdot 4 \cdot 2} = 26 \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ (1680)

2R

$$\frac{AB}{\sin \angle BDA} = 2R$$

~~$$\frac{\sin \angle ACB}{AB}$$~~