

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.е. восьмизначное число можно составить из:

$3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1$ или $9, 7, 7, 7, 3, 1, 1, 1$, что

$$\frac{8!}{3!3!} \text{ и } \frac{8!}{3!2!} \text{ вар., т.е. всего } \frac{8!}{3!3!} + \frac{8!}{3!2!} =$$

$$= \frac{8!}{3!3!} (1 + 3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} (1 + 3) = 4^2 \cdot 8 \cdot 5 = 4480 \text{ вар-б}$$

ответ: 4480

N3

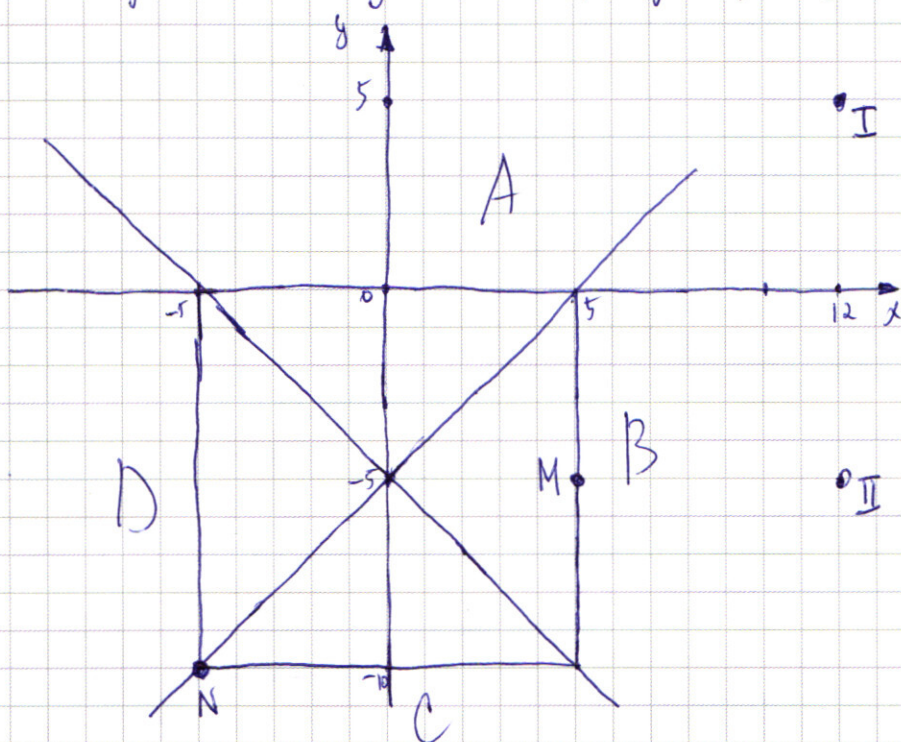
$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \Leftrightarrow y^{-\ln x (2 \log_y x + 4)} = y^{\ln(y/x^7)} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \\ \ln \frac{y}{x^7} = -\ln x (2 \log_y x + 4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \ln \frac{y}{x^7} = -2 \log_y x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \log_x \frac{y}{x^7} = -2 \log_y x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \log_x y - 7 = -2 \log_y x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ t = \log_y x \\ \frac{1}{t} - 7 = 2t - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ t = \log_y x \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ t = \log_y x \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{см. сл.} \\ \text{стр.} \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \begin{cases} x = y \\ -2x^2 + 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = y \\ x^4 - x^3 - 6x^2 - 8x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = y \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \begin{cases} x = y \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = y \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

 $\sqrt{5}$ 

Заменим, что если окружности ~~первой~~^{второй} ~~и третьей~~^{и четвертой} полукруга пересекают первый график, то и x-осцу. полу-ги и наоборот в силу симметрии обоих графиков относительно ОУ см след. стр. →

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда два решения существуют только когда окружность I пересекает первый гр. в N , или когда окружность II пересекает первый гр. в M .
или решений 4, 6, 8. Т.е.

$$1) a = (5 - (-10))^2 + \cancel{(-10)}(12 - (-5))^2 = 514$$

$$2) a = (-5 - (-5))^2 + (12 - 5)^2 = 49$$

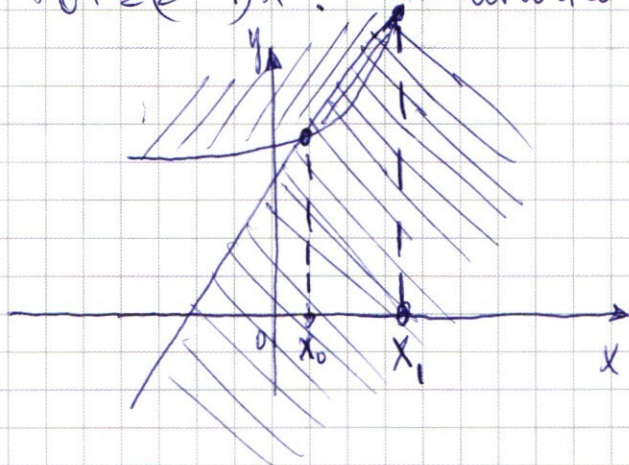
Order: npu $a = 49$ und $a = 514$

N7 *Yta*

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3y} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x \end{cases}$$

Заметим, что ~~вторая~~ вторая производная $y = 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$ это

$y'' = \ln^2 2 \cdot 2^x$, а $y = 76 + 2(2^{32} - 1)x$ $y'' = 0$, т.е. при $x > 0$ найдется x_1 , где $2^{x_1} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$, и при $x > x_1$ ~~$2^x + 3 \cdot 2^{34} >$~~ $2^x + 3 \cdot 2^{34} > 76 + 2(2^{32} - 1)x$. Следовательно, построим график системы.

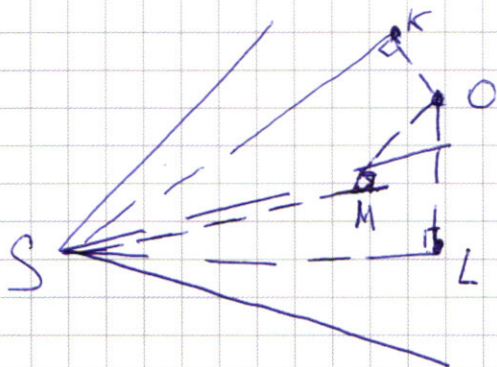


Заменим, что при $x=6$ и $x=38$ выражения равны;
Тогда $x_0=6$, а $x_1=38$
Заменим, что кол-во увелич.
решений при $x=a$ равно
 $7 \cdot 6 + 2(2^{32}-1) \cdot a - 2^a + 3 \cdot 2^{34}$, т.к.

верная граница включается а нижняя-нет. Тогда достаточно найти $\sum_{i=7}^{34} 76 + 2(2^{32} - 1)n - 2^n \cdot 3 \cdot 2^{34} =$ см. след. стр. $\rightarrow$

Orbit: $29 \cdot 2^{37} - 864$

NH


$$\frac{1}{16} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c}$$

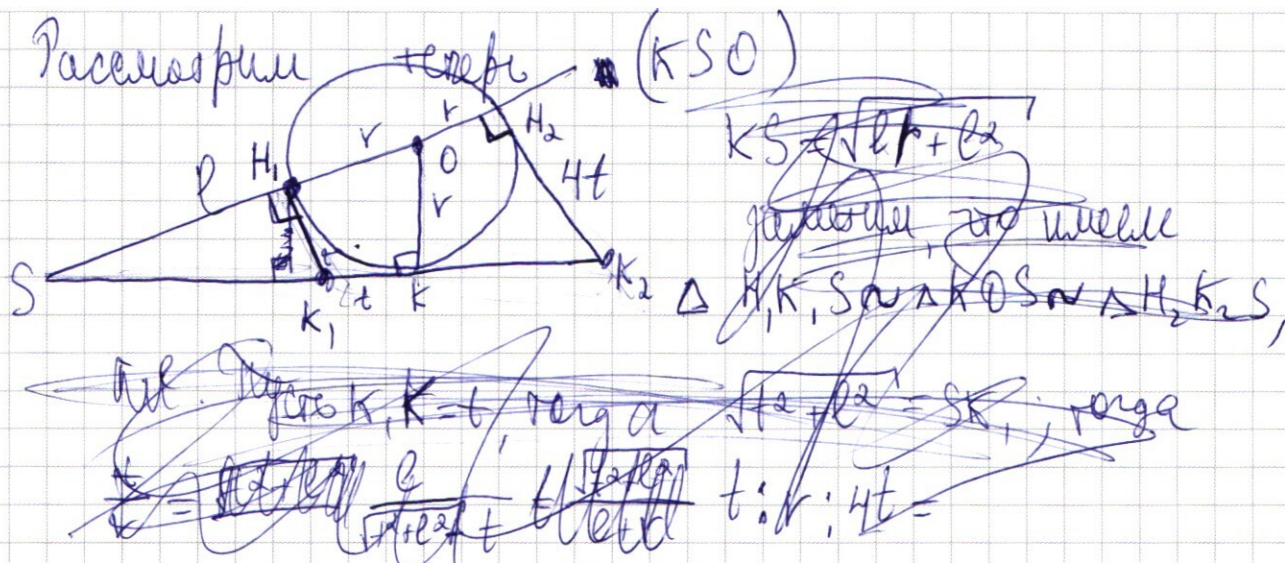
~~Пусть φ —~~

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}, \text{ по формулам, что искомого параллелограмм}$$
~~Protophyta - Tierwelt - heteromorphus~~

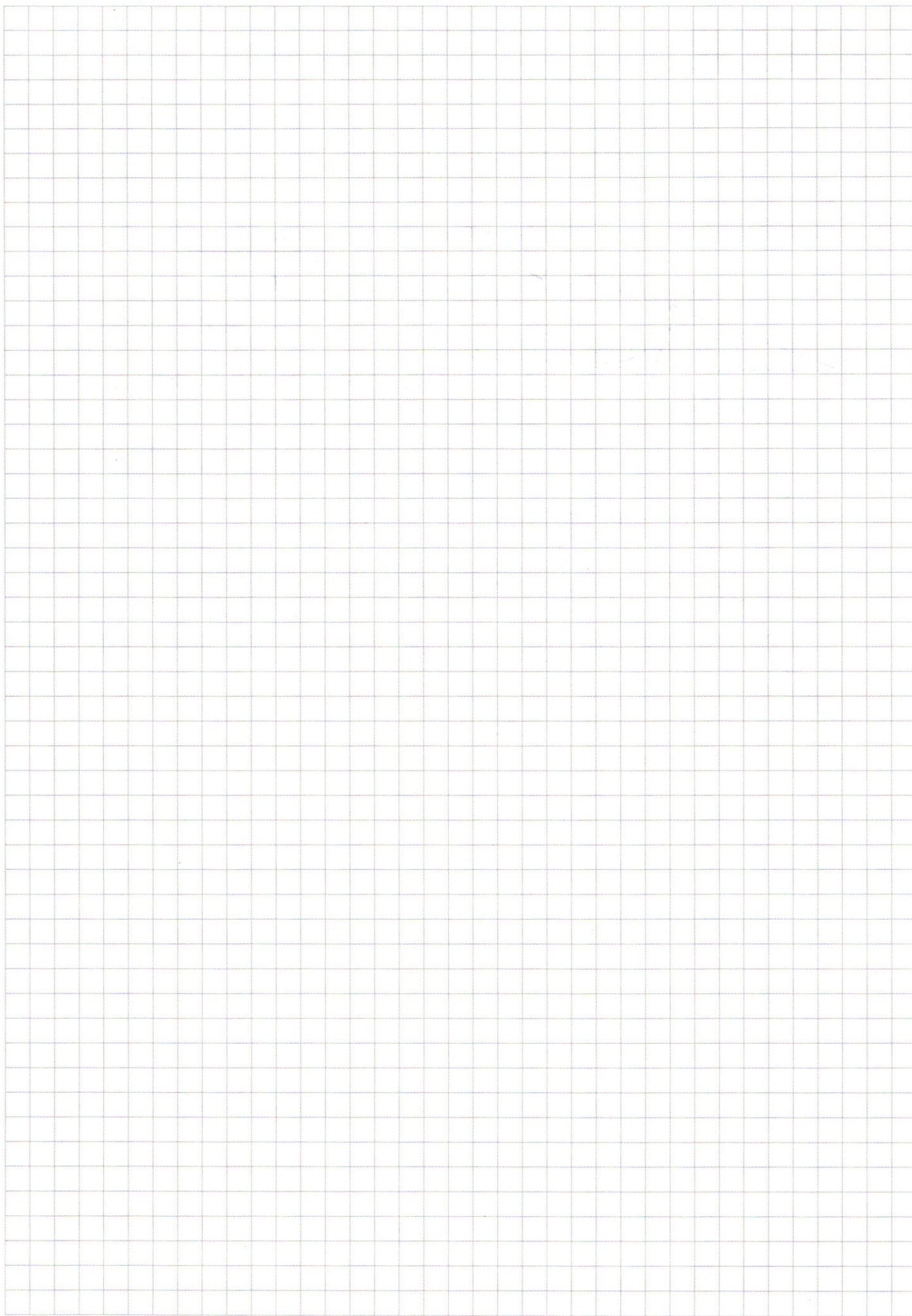
2) Пусть высота нефтяной поверхности h , а ~~радиус~~ радиус
сферы r , тогда $h_1 : h_2 = l_1 (l_1 + 2r) = 0,25$, $\frac{l}{l+2r} = \frac{1}{4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = 1,5l$ ам. шег. сф. $\rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

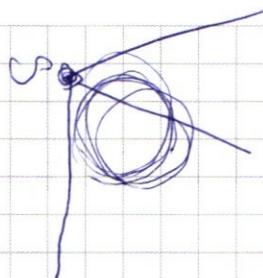
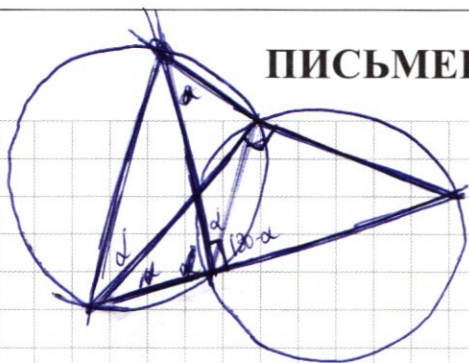
3) Расселовский



$r = 1,5 \text{ l}$ ~~$K/S = \sqrt{r^2 + l^2}$~~ ~~Tinggi~~ ~~$\angle OSK = \arccos$~~
 $\angle OSK = \arcsin \frac{r}{2,5\sqrt{2}} = \frac{2}{5}$; ~~$\angle OSK = \arcsin \frac{2}{5}$~~
 Jarak: $\angle OSK = \arcsin \frac{2}{5}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sum_{i=1}^5 2^{3i} \cdot 2^i - 2^i - 3 \cdot 2^i - 76$$

$$(2^3 - 1) \cdot (2^3 - 1)$$

$$-(2^3 + 2^8 - 2^5)$$

$$-3 \cdot 2^9 \cdot 2^3 - 76 \cdot 2^9$$

$$2^{37} \cdot 2^9 - 1$$

$$\frac{918 \cdot 10}{128} = 58$$

$$58 \cdot 32 = 1856$$

$$\frac{864 \cdot 132}{64 \cdot 127} = 132$$

$$(2^{32} - 1) \cdot 7$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$(2^{32} - 1) \cdot 7$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$(2^{32} - 1) \cdot 7$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$(2^{32} - 1) \cdot 7$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

$$2^9 \cdot 2^9 = 2^{18}$$

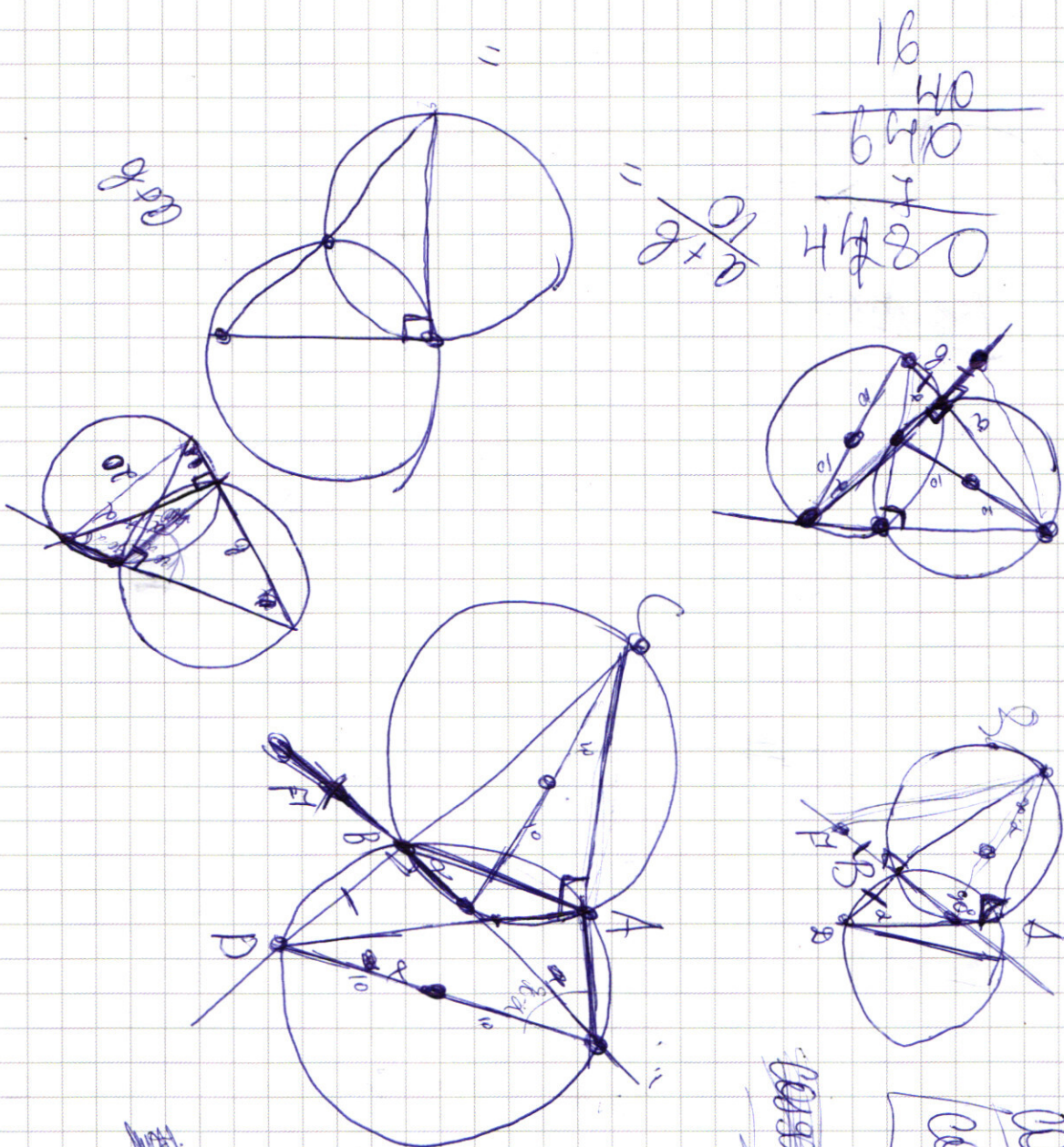
$$\begin{array}{r} 992 \\ 31 \cdot 32 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ 31 \cdot 32 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ 31 \cdot 32 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ 31 \cdot 32 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ 31 \cdot 32 \\ \hline 992 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 16 \\ 40 \\ \hline 640 \\ \hline 4480 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = 5 \cos 3x + 4 \cos x + 4 \cos 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x$$

$$\cos 9x - \cos 5x$$



$$\cos 9x - \cos 5x =$$

$$\cos 9x - \cos 5x =$$

$$\cos 9x - \cos 5x =$$

$$\cos 9x - \cos 5x =$$

$$\cos 9x - \cos 5x =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

