

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ - 91 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ - 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

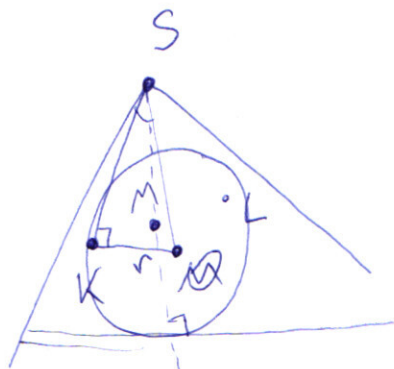
$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ - 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 101010.$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$



$$x \geq 1.$$

$$2^x$$

$$\cosh x = \cos^2 2x - \sin^2 2x.$$

$$\begin{matrix} x = \\ x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y > 1. \\ y < \end{matrix}$$

научен.

$$7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1$$

$$y > 0.$$

$$4111 \quad 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1.$$

$$7^3 \cdot 3^3 \cdot 1^3$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y < x \end{cases}$$

$$7 \cdot 3 = 21$$

$$3 \cdot 3 = 9.$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}.$$

$$7, 3, 9, 1.$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x = 3 \cdot 2^{34} > 0. \text{ ---}$$

$$1000 + 120$$

$$1120.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$ (1) $a = ?$,
 $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ (2) равно 2 решения.

• (1) уравнение задаёт параллелограмм.

Строим прямые 1) $y = -x - 5$

и 2) $y = x - 5$.

Т.О (0;0) - проверим
знак в каждой из 4 частей
плоскости.

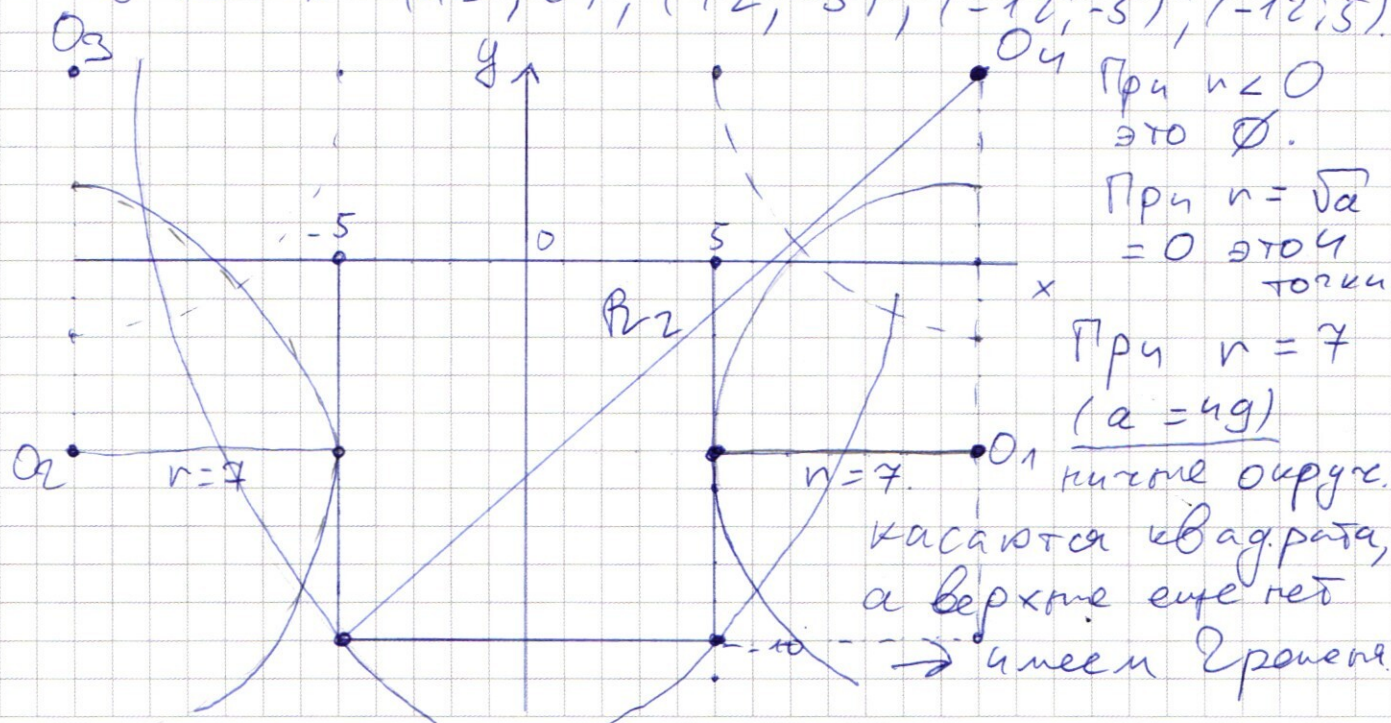
++: $x+2y+5-x+5=10$
 $2y=0 \Rightarrow y=0$

--: $y = -10$

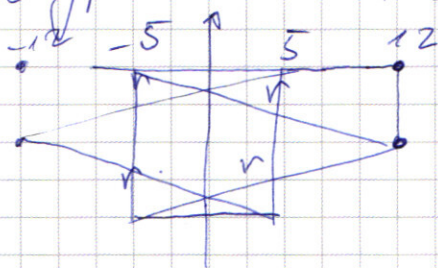
-+: $-x-y-5+y-x+5=10$
 $x=-5$

+ -: $x=5$

(2) уравнение задаёт 4 окружности с центрами
в точках $(12; 5); (12; -5); (-12; -5); (-12; 5)$



При $n > 7$ две нисшие окружности могут иметь с квадратом или 4 общие точки, или ни одной.



- граничный случай для 4 общих точек.
• при этом же граничном
 $r = \sqrt{5^2 + 17^2} = \sqrt{314}$

Верхние окружности имеют 4 общие точки с квадратом, когда обе проходят через одну из вершин квадрата (см. рис. R2)

$$R_2 = \sqrt{5^2 + 17^2} = \sqrt{314}$$

$$R_2 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 314$$

Ответ: $a = 49$; $a = 314$

$$\text{Доз. } \int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 4(-2x^2 + 8x) = 9x^2 - 24x + 16$$

$$= (3x - 4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x \\ y_2 = -x+4 \end{cases}$$

(1) Возьмем $\ln$ от выражения:

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^7})})$$

$$-\ln x (\ln x^2 + \ln y^4) = (\ln y - \ln x^7) \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

$$\text{Пусть: } \ln x = t \quad \ln y = k$$

$$-\frac{t}{2} (2t + 4k) = (k - 7t) k$$

$$\cdot k^2 + 2t^2 - 3kt = 0$$

$$k^2 - 3tk + 2t^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$D = 9t^2 - 4 \cdot 2t^2 = t^2 \quad \sqrt{D} = t$$

$$k_{1,2} = \frac{3t \pm t}{2} \rightarrow k_1 = 2t \quad k_2 = t \Rightarrow \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases}$$

из этого и записав ОДЗ для углов. вращения (1):

$$y > 0, \quad x > 0.$$

Система уравнений по ОДЗ: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$

$$(3) \begin{cases} y = x & (1) \\ y = x^2 & (2) \\ y = 2x & (3) \\ y = -x + 4 & (4) \end{cases}$$

1 и 3:

$$y = 2y$$

• $y = 0, x = 0$ — не подходит по ОДЗ.

1 и 4:

$$y = -y + 4$$

$$\bullet 2y = 4 \Rightarrow y = 2, x = 2$$

2 и 3:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$x = 0$ — не подходит.

$$\bullet x = 2, y = 4$$

2 и 4:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \quad \text{— не подходит}$$

$$\bullet x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = 18 - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4);$

$$\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; 18 - \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\text{Д02. } \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

По формуле суммы:

$$\sqrt{2} \left(\frac{\cos 9x + \sin 9x}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\cos 5x - \sin 5x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cos(9x - \varphi) - \sqrt{2} \cos(5x + \varphi) = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \varphi. \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \varphi.$$

$$\bullet \cos(9x - \varphi) - \cos(5x + \varphi) = \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$$

Введем сумму (разность) косинусов.

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$x+y = \alpha$$

$$x-y = \beta, \text{ тогда } \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$= 2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{-4x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\alpha - \beta = 5x + \frac{\pi}{4} - 9x + \frac{\pi}{4} = -4x + \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \sin 7x \sin(-2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $CB = 20 \sin \angle$, $BD = 20 \cos \angle = BF$

$\triangle CBF$ - прямоугольный, $CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} =$

$= \sqrt{20^2 \cos^2 \angle + 20^2 \sin^2 \angle} = 20^2 (\cos^2 \angle + \sin^2 \angle)$

$CF = \sqrt{20^2 \cdot 1} = 20$

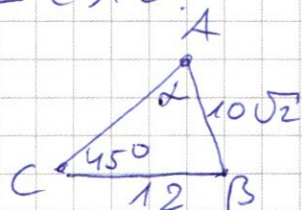
2) $BC = 12$, тогда $\sin \angle = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\cos \angle = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$BD = BF = \frac{20 \cdot 4}{5} = 16$

$\angle ACF = \beta$

• $\triangle CAB$



• $S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \beta}{2}$

• $\angle ABC = 180 - 45^\circ$

$= \arcsin \frac{3}{5}$

$= 135^\circ - \arcsin \frac{3}{5}$

$= 135^\circ - \arccos \frac{4}{5}$

По теореме косинусов.

$AC^2 = (10\sqrt{2})^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10\sqrt{2} \cos(\angle ABC)$

$\cos(135^\circ - \arccos \frac{4}{5}) = \cos(135^\circ) \cos(\arccos \frac{4}{5}) + \sin(135^\circ) \sin(\arccos \frac{4}{5})$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} =$

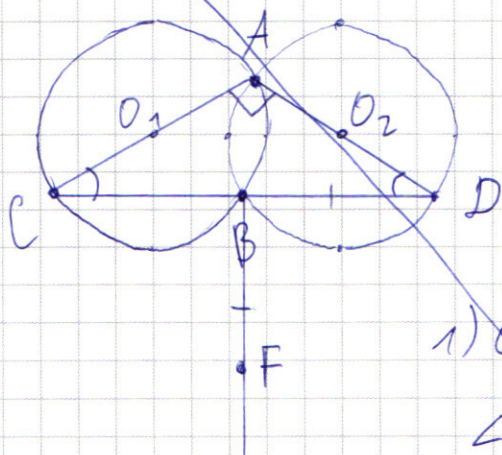
$\sin(\arccos \frac{4}{5}) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos \frac{4}{5})}$

$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$\cos = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$

$AC^2 = 100 \cdot 2 + 144 + 2 \cdot 12 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10}$
 $= 344 + 12 \cdot 4 = 344 + 48 = 392$

№6



$$n=10$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

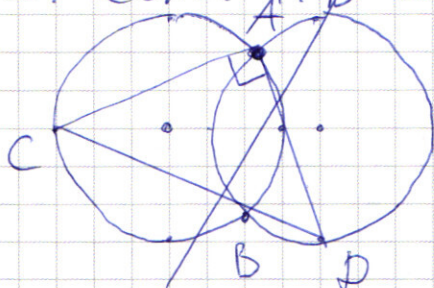
a) CF - ?

б) BC = 12, S_{ACF} - ?

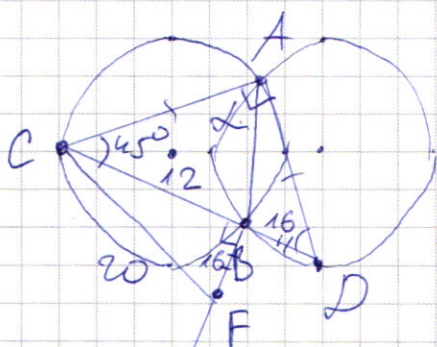
Решение:

1) Окр O_1 и O_2 равны, значит $\angle ACD = \angle ADB$ как углы

опирающиеся на одну дугу AB $\Rightarrow CA = AD$.
Тогда, если $A, B \in CD$, то



№6.



$$n=10$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$\frac{BF}{BD}$$

a) CF - ?

б) BC = 12, S_{ACF} - ?

$$1) \angle ACD = \angle ADC$$

как углы опирающ.
на равные дуги AB
равных окружностей.

$$\Rightarrow CA = AD, \angle ACD = 45^\circ$$

$$\bullet \text{ Пусть } \angle CAB = \angle$$

2) По th. синусов:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2n$$

$$AB = \frac{\sqrt{2} \cdot 20}{2} = 10\sqrt{2}$$

3) $\triangle CAB$ и $\triangle DAB$ вписаны в равные
окружности, а значит $\frac{CB}{\sin \angle} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \angle)} = 2n$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 1680

Дано:

 $x, y \in \mathbb{Z}$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \quad (1)$$

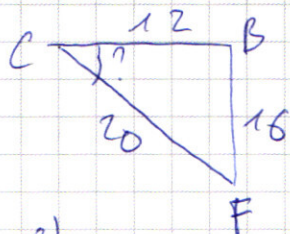
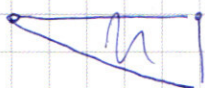
$$y < 76 + 2(2^{32} - 8)x \quad (2)$$

• 2^x — чётное, $x \geq 5$.

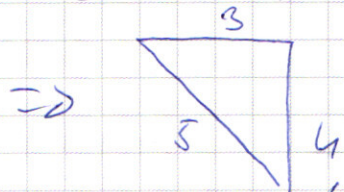
(1) выражение положительно, тогда $\rightarrow$ для чётных
члена решения, $76 + 2(2^{32} - 8)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$.

$$AC^2 = 49 \cdot 4 \cdot 2, \sqrt{AC^2} = 7 \cdot 2 \sqrt{2} = 14\sqrt{2} = AC$$

3) $\triangle CBF$



$$\angle BCF = ? = \varphi$$



$$\sin \varphi = \frac{4}{5}$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \sin(45^\circ + \varphi)$$

$$= \sin 45^\circ \cos \varphi + \sin \varphi \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4+3}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin B}{2} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10}}{2} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 7\sqrt{2}}{10 \cdot 2} = 14\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{2} = 196$$

Ответ: а) $CF = 20$

б) $S_{ACF} = 196$

Юл.

$$17 = 9268 = 3087 \cdot 3 = 1029 \cdot 3 \cdot 3 = 343 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 49 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 7^3 \cdot 3^3$$

Цифры могут быть 7, 3, 9, 8

Возможные наборы: $\overbrace{7, 7, 7}^3, \overbrace{3, 3, 3}^3, \overbrace{1, 1}^2$
или $\overbrace{7, 7, 7}^3, \overbrace{9, 9}^2, \overbrace{1, 1, 1}^3$

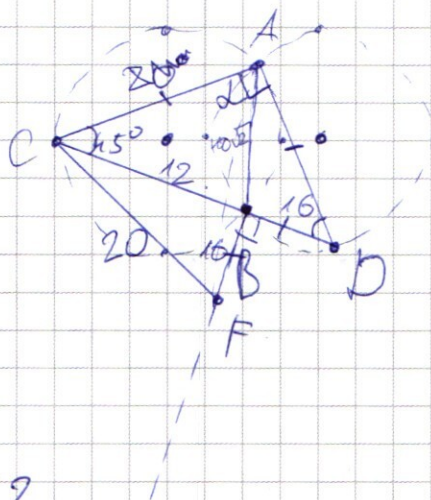
$$N = N_1 + N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$$

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 20 = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$N = 560 + 1120 = 1680$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$B C = 12$$

SACF - 9

$$w = 10$$

$\sin \beta$

CF - ?

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 20$$

CF - 7

$$AB = \frac{\sqrt{2} \cdot 20}{2} = \sqrt{2} \cdot 10.$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \sin B}{2}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin (90^\circ - \alpha)} = 20$$

$$\frac{CB}{\sin L} = \frac{BD}{\cos L}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 14 \\ \times 7 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$CB \cos \angle = BD \sin \angle$$

$$CB = 20 \sin 4$$

$$BD = 20 \cos 45^\circ = BF$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 20$$

CA-7

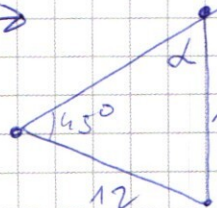
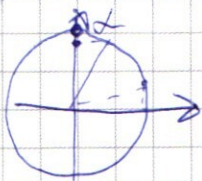
$$BF = \frac{20 \cdot 4}{5} = 16$$

$$\frac{12}{\sin \angle} = 20$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ - 45 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$



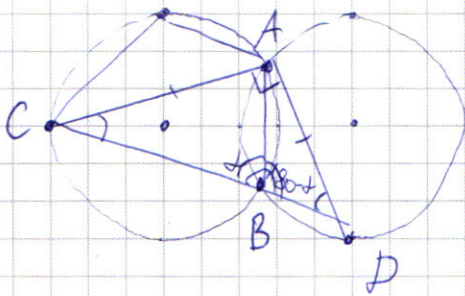
№ 6.

$$r = 10$$

392.

$$\angle + \beta = 180^\circ$$

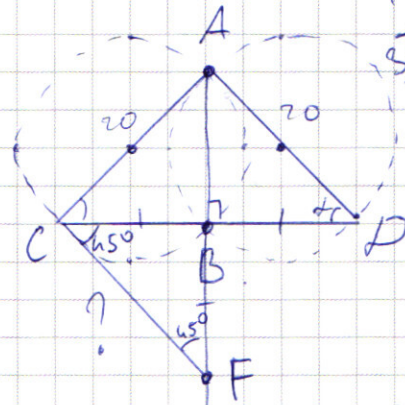
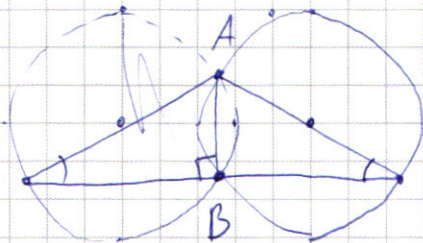
$$\frac{150 + 46}{2} = 196.2$$



$$r = 10$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ + 8 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (50 + 48) \cdot 4 \\ 98 \cdot 4 \\ 49 \cdot 2 \cdot 4 \end{array}$$



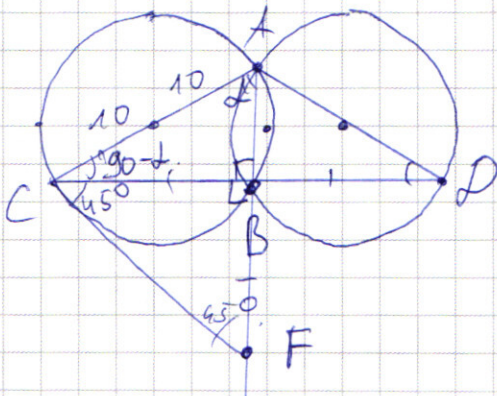
$$180 - 2\alpha$$

$$BF = BD$$

$$\frac{45 + 4}{2} = 49$$

$$CF = ?$$

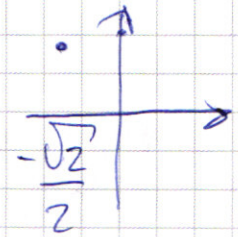
$$\frac{32}{3} \cdot \frac{4}{9}$$



$$CF = ?$$

$$\sin \alpha$$

$$90 + 45 = 135$$



$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2R = 20$$

$$CB = 20 \sin \alpha$$

$$200 \cdot 344$$

$$\cos(\angle - \beta) = \frac{3 - 4}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$= \cos \angle \cos \beta$$

$$r = 10$$

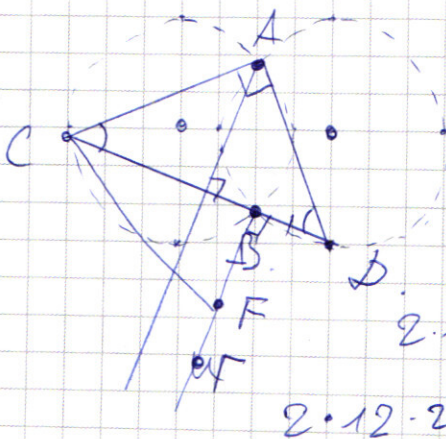
$$CF = ? + \sin \angle \sin \beta$$

$$= \cos(135^\circ) \cos(\arccos \frac{4}{5})$$

$$\sin(\arccos \frac{4}{5})$$

$$\sin \angle = \sqrt{1 - \cos^2 \angle}$$

$$= 1 -$$



$$2 \cdot 12 \cdot 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a$$

$$a = 8$$

$$\begin{array}{l} x = 12 \quad x = -12 \\ y = 5 \quad y = -5 \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x \geq 0 & x \geq 0 & x < 0 & x < 0 \\ y \geq 0 & y < 0 & y < 0 & y \geq 0 \end{array}$$

$$(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$$

$$(x - 12)(y + 5) = a$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y + 10 = 10$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y - 10 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$-y = 10$$

$$y = -10$$

$$-2x = 10$$

$$x = \frac{10}{-2} = -5$$

$$r = \sqrt{a}$$

$$n = 7$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 15 \\ \times 15 \\ \hline 175 \\ + 151 \\ \hline 225 \\ + 289 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1511 \\ 289 \\ 12 + 25 \\ + 5 \\ \hline 314 \\ 17 \end{array}$$

$$\text{503.} \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln\left(\frac{y}{x+1}\right) \quad (1) \\ y^2 - x y - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + (-2x^2 + 8x) \cdot 4$$

$$= x^2 + 8x + 16 - 8x^2 + 32x = -7x^2 + 40x + 16$$

$$y^2 - 4y + (-2x^2 + x(8-y) - 4y + 9^2) = 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} D = x^2 + 8x + 16 - 4(-2x^2 + 8x) \\ D = 64 - 16y + y^2 \end{cases}$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$= \frac{x+4+3x-4}{2}$$

$$= \frac{4x}{2} = 2x$$

$$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2}$$

$$= \frac{-2x+8}{2}$$

$$= -x+4$$

$$x^{2\ln x} \cdot \ln x$$

$$x^{\log_2 x} \cdot \log_2(\quad)$$

$$\log_2 x^{\log_2 x}$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 x$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln y)$$

$$(-7+4)kt$$

$$-3$$

$$= (\ln y - 7\ln x) \ln y \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$-2t^2 - 4kt = k^2 - 7kt$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

2.
$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

3.
$$\begin{cases} \ln x = \ln y \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases}$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sin \quad \log_2 2 \quad 2^0 = 1.$$

$$\text{Don. y-ma.}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

$$\sin x \quad \cos \varphi \quad \sin \varphi.$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y).$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi).$$

$$\sqrt{2} \cos(9x - \varphi) - \sqrt{2} \cos(5x + \varphi) = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left(\frac{\sin 5x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 5x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = \sin(x - \varphi)$$

$$= -\sqrt{2} (\cos \varphi \cos 5x - \sin \varphi \sin 5x)$$

$$= -\sqrt{2} \cos(\varphi + 5x).$$

$$\cos(x+y)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(4x+5x-\varphi)$$

$$= \cos(5x+\varphi) = \cos 4x.$$

$$= \cos 4x \cos(5x-\varphi) - \sin 4x \sin(5x-\varphi)$$

$$- \cos(5x+\varphi) = -\cos 4x = 0.$$

$$\cos 4x (\cos(5x-\varphi) - 1) - \sin 4x \sin(5x-\varphi)$$

$$\cos 4x (\cos(5x-\frac{\pi}{4}) - 1) - \cos(5x+\varphi) = 0.$$

$$- \sin 4x \sin(5x-\frac{\pi}{4})$$

$$- \cos(5x+\frac{\pi}{4})$$

$$\cos 9x$$

$$\cos(x) - \cos y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases}$$

$$- 2 \sin x \sin y = \cos(x+y)$$

$$- \cos(x-y)$$

$$- \cos(x+y)$$

$$x = \alpha - y.$$

$$\alpha - 2y = \beta$$

$$- 2y = \beta - \alpha$$

$$2y = \alpha - \beta$$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$x = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \beta - \cos \alpha =$$

$$- 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x - 1 \quad 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x - 1}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 1 - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$= -\sin^2 x - \sin^2 x + 1$$

$$\cos x = -2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 = -2 \sin^2 x + 1$$