

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

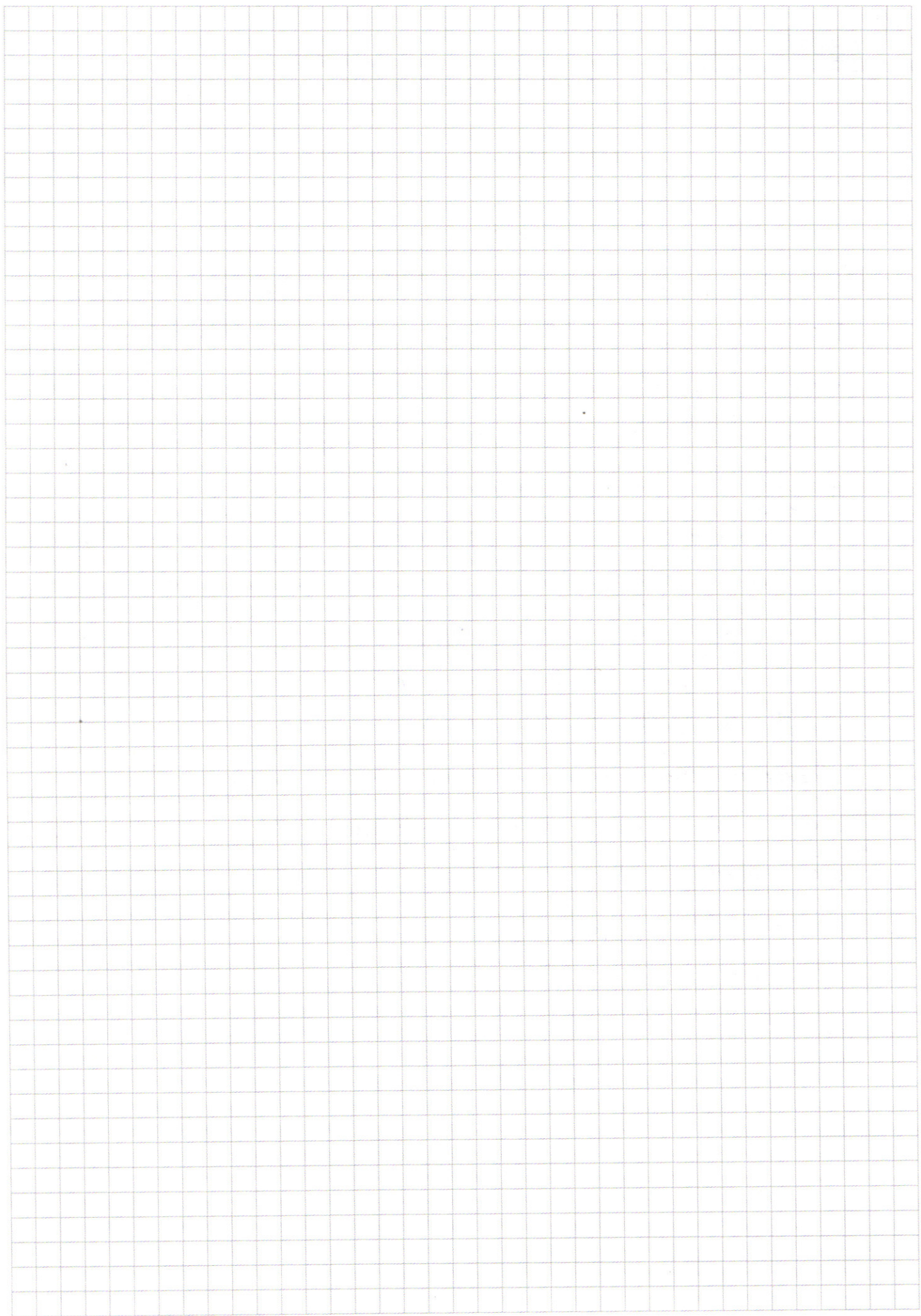
№1

Решение: разобьём число 9261 на простые множители.
 $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. Число семь в произведении цифр не может быть представлено как часть произведения (например, ~~число~~ если у нас есть две тройки в произведении цифр, то ~~они~~ они в числе могут быть как цифрами 3 и 3, так и цифрами 9 и 1), а тройки - могут. Тогда в нашем восьмизначном числе могут быть такие цифры:

3 3 3 7 7 7 1 1 или

9 3 3 7 7 7 1 1 1.

Заметим, что три секёрки есть в каждой вариации, тогда ~~чисел~~ ~~цифр~~ ~~из~~ с тремя секёрками $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$.
 Далее, если у нас в числе три тройки, а остальные единицы (две штуки), то таких чисел $C_8^3 \cdot C_5^2 = 56 \cdot C_5^2 = 56 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 560$, так как в каждом варианте с секёрками мы должны рассмотреть каждый вариант расстановки троек, а так как единицы остаются, то они увеличивают количество возможных вариантов.
 Если у нас двоек, тройка и три единицы, то для каждого положения секёрок надо рассмотреть все варианты расположения единиц $\Rightarrow C_8^3 \cdot C_5^3 = 56 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 560$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и т.в. у нас остаются две разные дуги (9 и 3),
то $560 \cdot 2 = 1120$. Тогда всего восьмидесяти
чисел: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

№4

Решение:

Пусть точка касания верхней
плоскости
граней — M , нижней — N ,

точки пересечения плоскостей верхней

и нижней плоскостей с гранью, содержащей точку K —
 A и B соответственно, тогда рассмотрим

$\triangle SAM$ и $\triangle BSN$. Пусть $SM = x$, тогда $MN = 2R \Rightarrow$
 $\frac{AM}{BN} = \frac{SM}{SN} = \frac{x}{x+2R}$. Так как отношение площадей

сечения $\frac{1}{16}$, то отношение линейных размеров
 $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{1}{4} = \frac{SM}{SN} = \frac{x}{x+2R} \Rightarrow 4x = x+2R$
 $3x = 2R,$

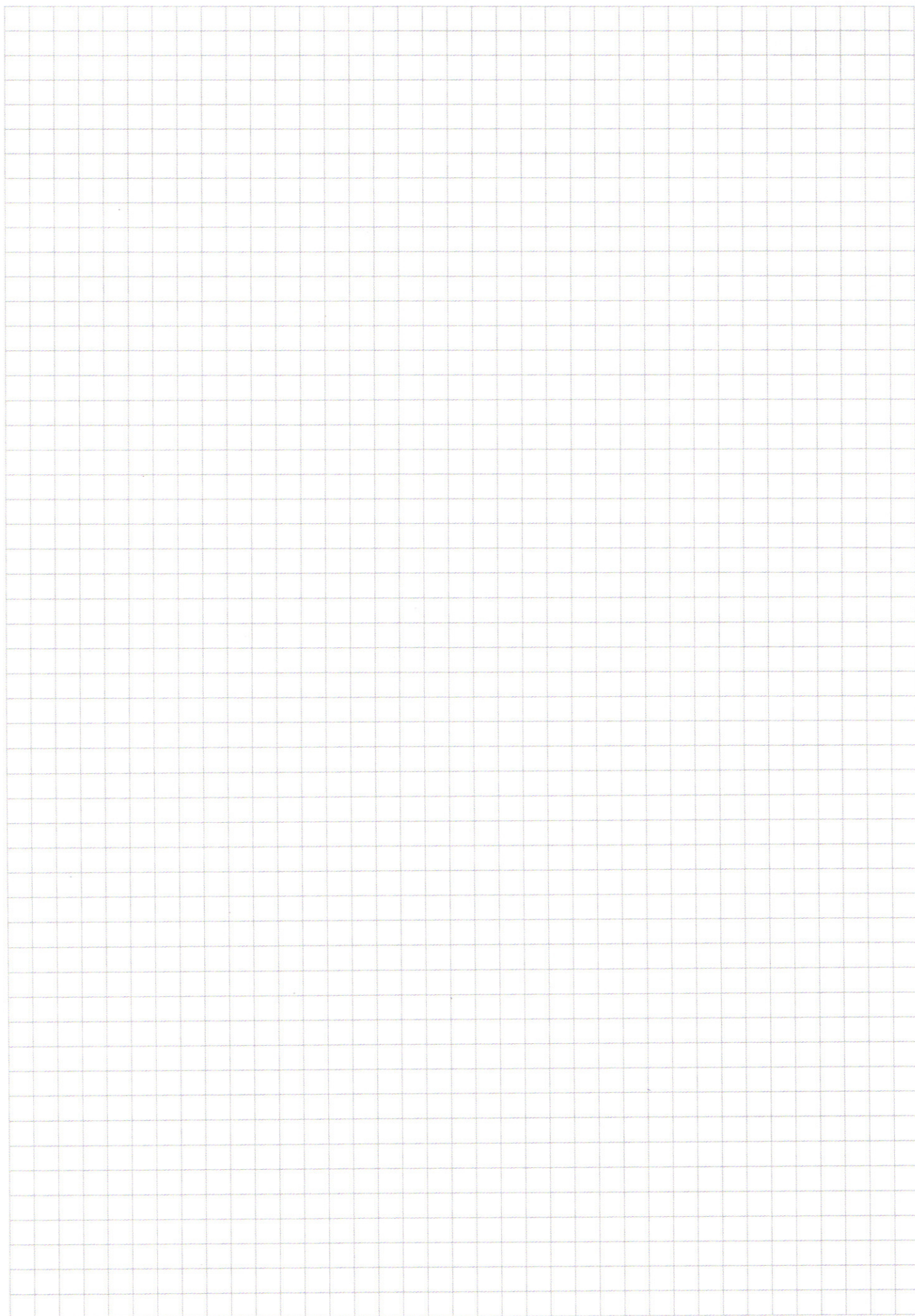
тогда в $\triangle KSO$: $\angle KSO$: $KO \perp SK$ (так как
сфера касается грани) $\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{OK}{SO}$;

$OK = R$; $SO = SM + MO = x + R = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R \Rightarrow$

$\sin \angle KSO = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ т.в. $\triangle KSO$ — прямоугольный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin \angle KOS = \cos \angle KSO = \frac{4}{5}$.

Пусть P — точка пересечения SO и $(KMN) \Rightarrow$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 KP \perp SO &\Rightarrow \text{в } \triangle KPO : PO = KO \cdot \cos \angle KOP = \\
 &= R \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}R \Rightarrow SP = SO - PO = x + R - \frac{3}{5}R = \frac{2}{5}R + x = \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}x\right) + x = 1\frac{3}{5}x \Rightarrow \text{в } \triangle SAM \text{ и } \triangle KSP \Rightarrow \\
 \frac{AM}{KP} &= \frac{SM}{SP} = \frac{x}{\frac{3}{5}x} = \frac{5}{3} \text{ и т.к. это линейные} \\
 \text{отношения, то} &\quad \frac{1}{S_{KMN}} = \left(\frac{AM}{KP}\right)^2 = \frac{25}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{S_{KMN}} &= \frac{25}{64} \Rightarrow \\
 S_{KMN} &= \frac{64}{25}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\sin \angle KMN = \sin \angle KSO = \frac{3}{5}$; $S_{KMN} = 2,56$

$$\begin{cases}
 (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\
 y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0
 \end{cases}$$

Решение: $x > 0$; $x \neq 0$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$y^2 - (x+4)y + 3x - 2x^2 = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 32x + 3x^2 = 4x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

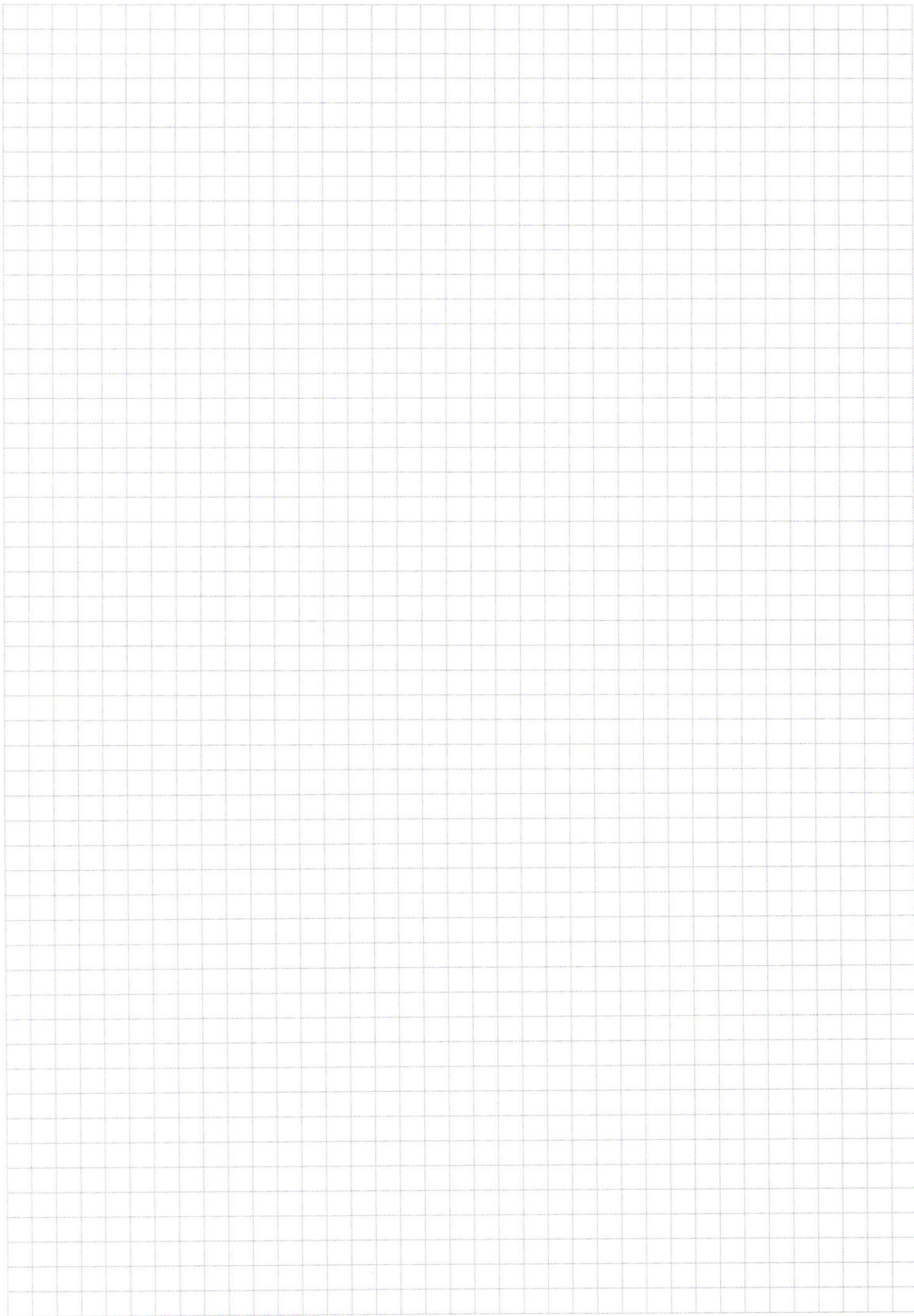
$$y_1 = \frac{x+4+3x-4}{2}$$

$$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2}$$

$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -x+4$$

1) если $y_1 = 2x \Rightarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$(2x)^{-4\ln x} \cdot x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$(2x)^{\ln x^{-4}} \cdot x^{\ln x^{-2}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$2^{\ln x^{-4}} \cdot x^{\ln x^{-4} + \ln x^{-2}} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$\frac{2^{\ln x^{-4}}}{2^{\ln \frac{2}{x^6}}} = \frac{x^{\ln \frac{2}{x^6}}}{x^{\ln x^{-6}}}$$

$$2^{\ln \frac{1}{2}} = x^{\ln 2}$$

$$2^{\ln \frac{1}{2}} = 2^{\ln x}$$

$$\frac{x^2}{2} = x$$

$$x^2 = 2x \rightarrow x = 0$$

$$x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$$

2) если $y = 4 - x \rightarrow$

$$(4-x)^{\ln x^{-4}} \cdot x^{\ln x^{-2}} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2})}$$

$$(4-x)^{\ln x^{-4}} \cdot x^{\ln x^{-2}} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^{\ln(4-x)^{-4}}$$

$$(4-x)^{\ln \frac{x^{-4}}{(4-x)}} = x^{\ln \frac{(4-x)^{-4}}{x^2}}$$

$$\begin{cases} 4-x = x \\ \frac{x^{-4}}{4-x} = \frac{x^2}{(4-x)^4} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x^{-4}}{4-x} = x \\ (4-x) = \frac{x^2}{(4-x)^4} \end{cases}$$

$$x = 2 \rightarrow$$

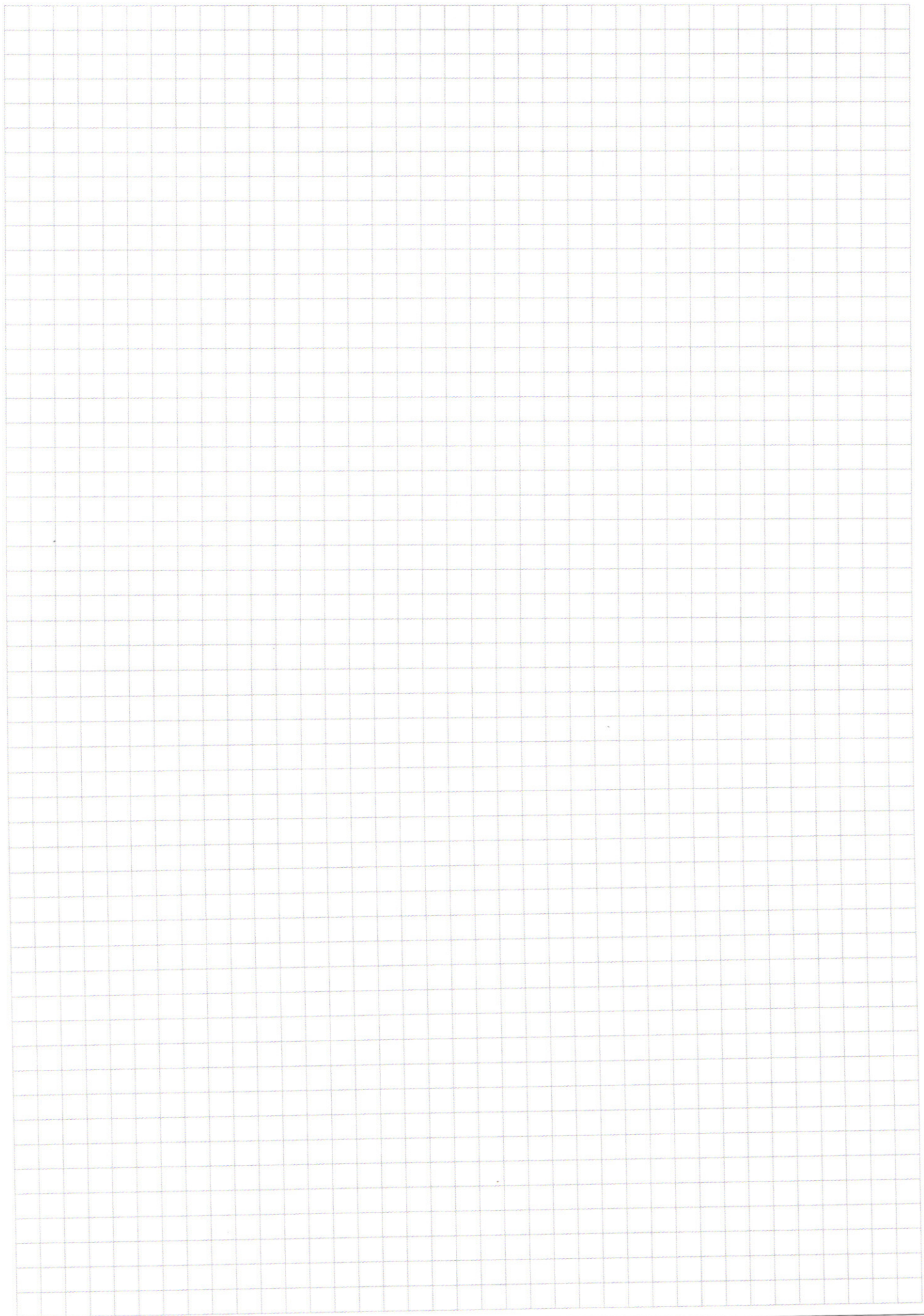
$$\frac{x^{-4}}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$x = (4-x)^4, \text{ т.е. } x > 0$$

$$\rightarrow 1 = x^5(4-x) \rightarrow$$

$$4-x = 1 \rightarrow x = 3$$

Ответ: $x = 2$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

$$\begin{aligned} 1) \quad \angle CAB &= \frac{1}{2} \angle CO_1B \\ \angle BAD &= \frac{1}{2} \angle BO_2D \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAB + \angle BAD = 90^\circ = \frac{1}{2} (\angle CO_1B + \angle BO_2D)$$

$$\Rightarrow \angle CO_1B + \angle BO_2D = 180^\circ \Rightarrow$$

$$CB^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cos \angle CO_1B$$

$$BD^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cos \angle BO_2D$$

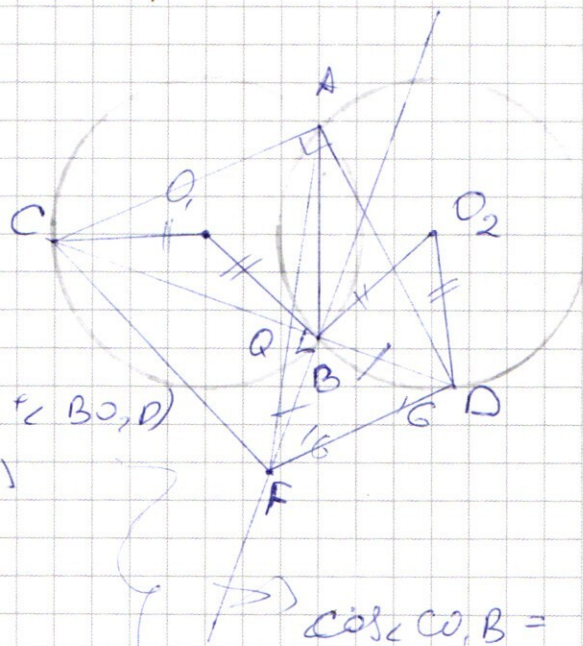
$$\Rightarrow \text{м.р. } \triangle CBF \quad \angle CBF = 90^\circ \Rightarrow$$

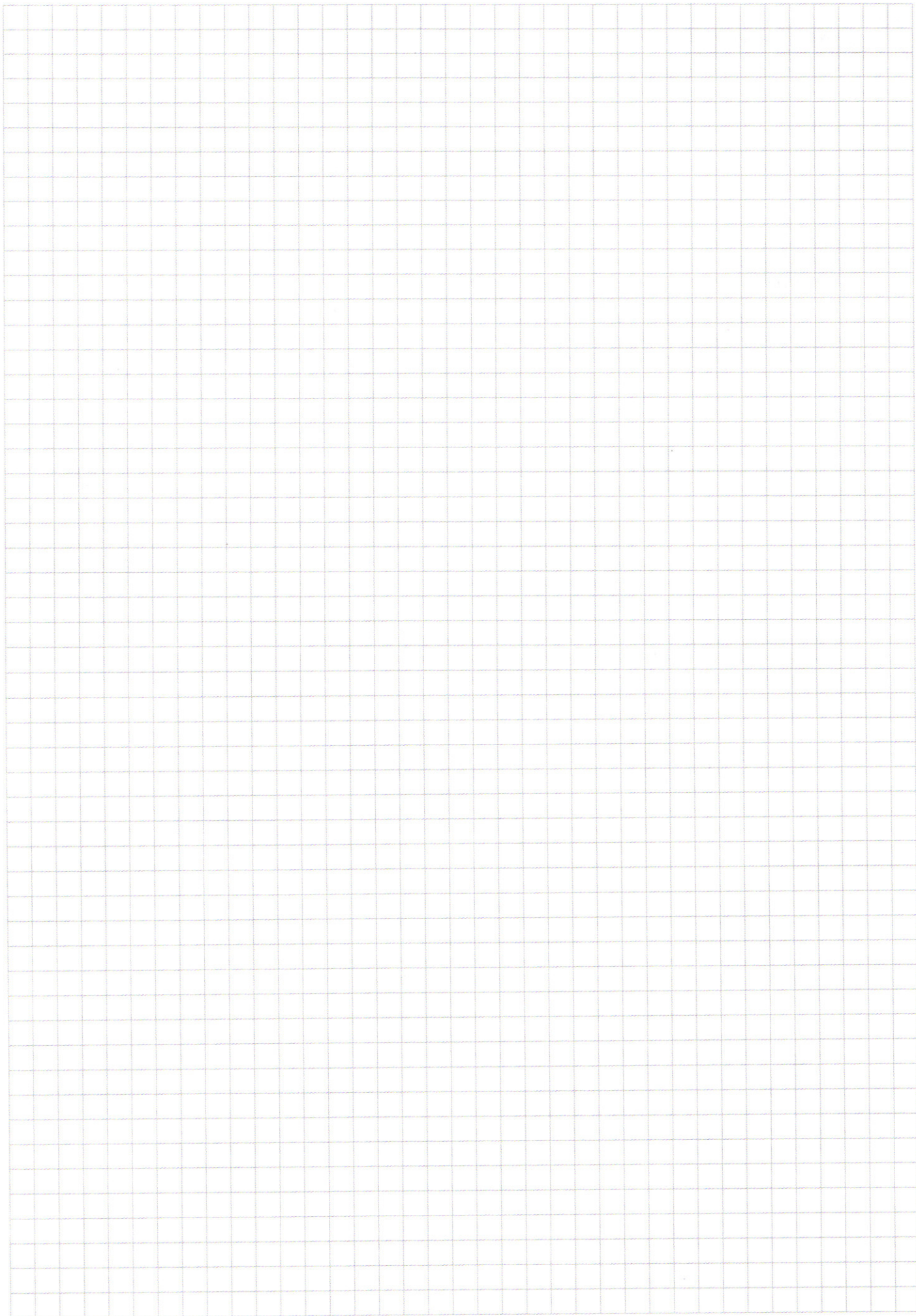
$$\begin{aligned} CF^2 &= CB^2 + BD^2 = 100 - 200 \cos \angle CO_1B + \\ &\quad + 200 - 200 (-\cos \angle CO_1B) = \\ &= 400 \Rightarrow CF = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{м.р. } BC &= 12 \Rightarrow BF = BD = \sqrt{400 - 144} = \\ &= \sqrt{256} = 16 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ACF} &= S_{\triangle CBF} + S_{\triangle BFD} = S_{\triangle COF} = \frac{1}{2} (12 + 16) \cdot 16 = \\ &= 32 \cdot 8 = 304; \text{ м.р. } \triangle CAB = \triangle FQD \text{ (по I признаку)} \\ AQ &= QF; CB = BD; \angle CAQ = \angle FQD \text{ (верт.} \end{aligned}$$

Ответ: $CF = 20$; $S_{\triangle ACF} = 304$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations and a geometric diagram.

Top section:

$$C_2^3 = \frac{2!}{3! \cdot 5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 16$$

Left side:

$\sin x + \sin x$

$\sin x \cdot \sin x$

$\sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 60^\circ = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\sin x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Right side:

Diagram of a triangle with internal lines.

$100 \cdot 64 \cdot 4 = 256$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 26 + 2^{33} - 2^x$

$2^x + 2 \cdot 2^{34} + 2 \cdot 2^{33} - 26 + 2^x < 0$

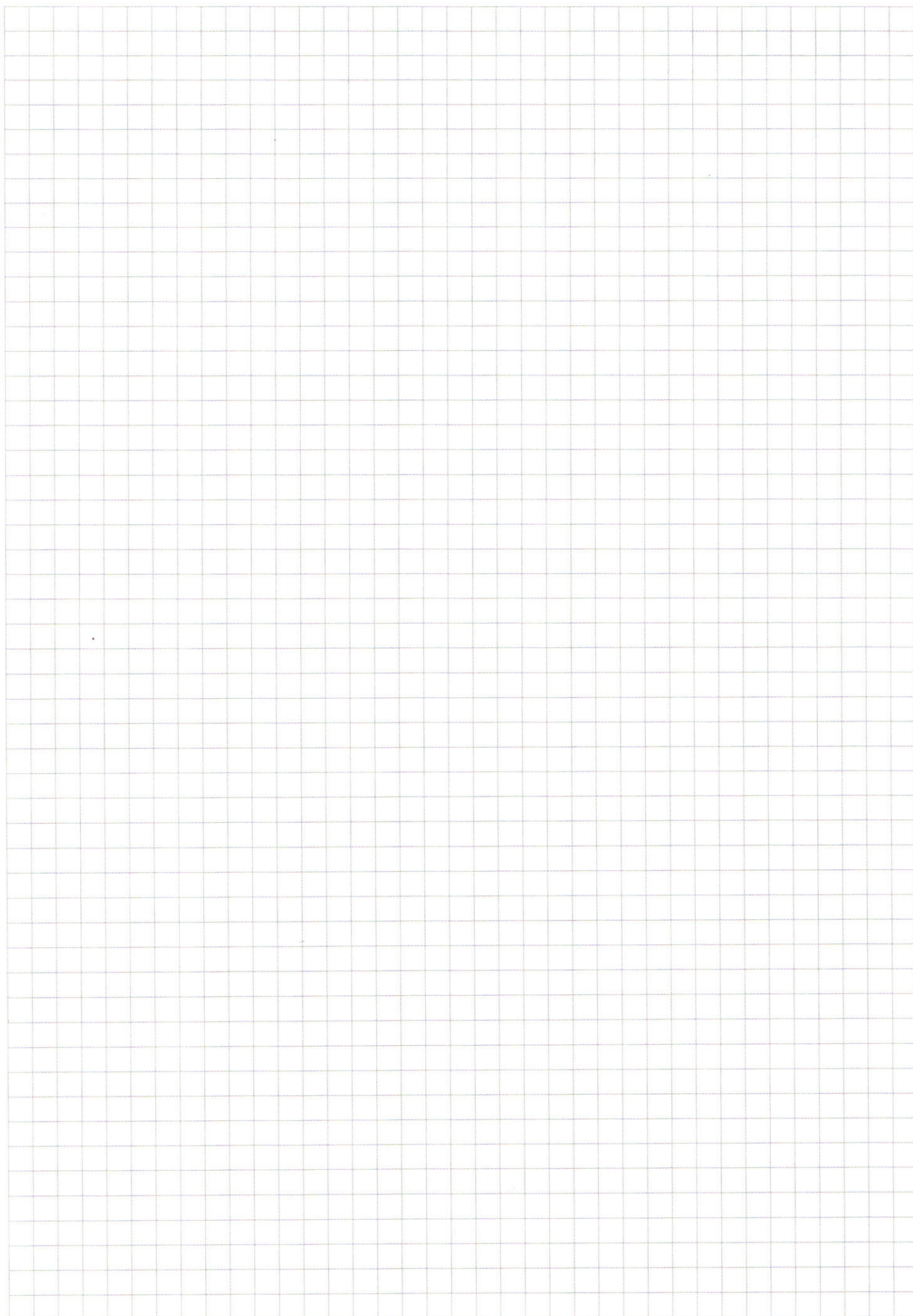
$2^x + 2 \cdot 2^{34} + 2^{35} + 2^x < 26$

$2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{34} + 2^{35} - 2^{33} = 2^{35} \cdot \frac{2^x + 2^{34} + 2^{35} - 2^{32}}{2^{35}}$

$2^x + 2^{35} + 2^{33} + 2^x < 26$

$x < -2^{35} - 2^{32}$

$2^x < 26$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)