

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 = \cancel{3 \cdot 7} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Восьмизначное число должно содержать три тройки, три семерки и ~~две~~ две единицы; или три семерки, ~~одна~~ одна тройка, ~~две~~ три единицы, одна девятка

Рассмотрим первый случай:

$8!$ - кол-во перестановок всего набора разрядов на $(3! \cdot 3! \cdot 2!)$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{\overset{\substack{\text{кол-во} \\ \text{перест.} \\ \text{троек}}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{\underset{\substack{\text{кол-во} \\ \text{перест.} \\ \text{семерок}}}{2 \cdot 6}} \cdot \frac{\overset{\substack{\text{кол-во} \\ \text{перестан.} \\ \text{единиц}}}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}}{= 560}$$

Рассмотрим второй случай:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 560 \cdot 2$$

↑ кол-во перест. "7"
↑ кол-во перест. "1"

Сложим полученные числа: $560 + 560 \cdot 2 = 560 \cdot 3 = 1680$

Ответ: 1680.

N 5

$$1) |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad ? \text{ а 2 рещ.}$$

$$2) (|x|-2)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$(1): |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

Рассмотрим 4 случая раскрытия модулей по определению:

$$1) \quad x+y+5 \geq 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 \geq 0$$

$$y \geq -5-x \quad \text{и} \quad y \geq -5+x$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2y+10=10$$

$$y=0$$

$$2) \quad x+y+5 < 0 \quad \text{и} \quad \cancel{y-x+5 \geq 0} \quad y-x+5 \geq 0$$

$$y < -5-x \quad \text{и} \quad y \geq -5+x$$

$$-x-y-5 + y-x+5 = 10$$

$$-2x=10$$

$$x=-5$$

$$3) \quad x+y+5 \geq 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 < 0$$

$$y \geq -5-x \quad \text{и} \quad y < -5+x$$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$4) \quad x+y+5 < 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 < 0$$

$$y < -5-x \quad \text{и} \quad y < -5+x$$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

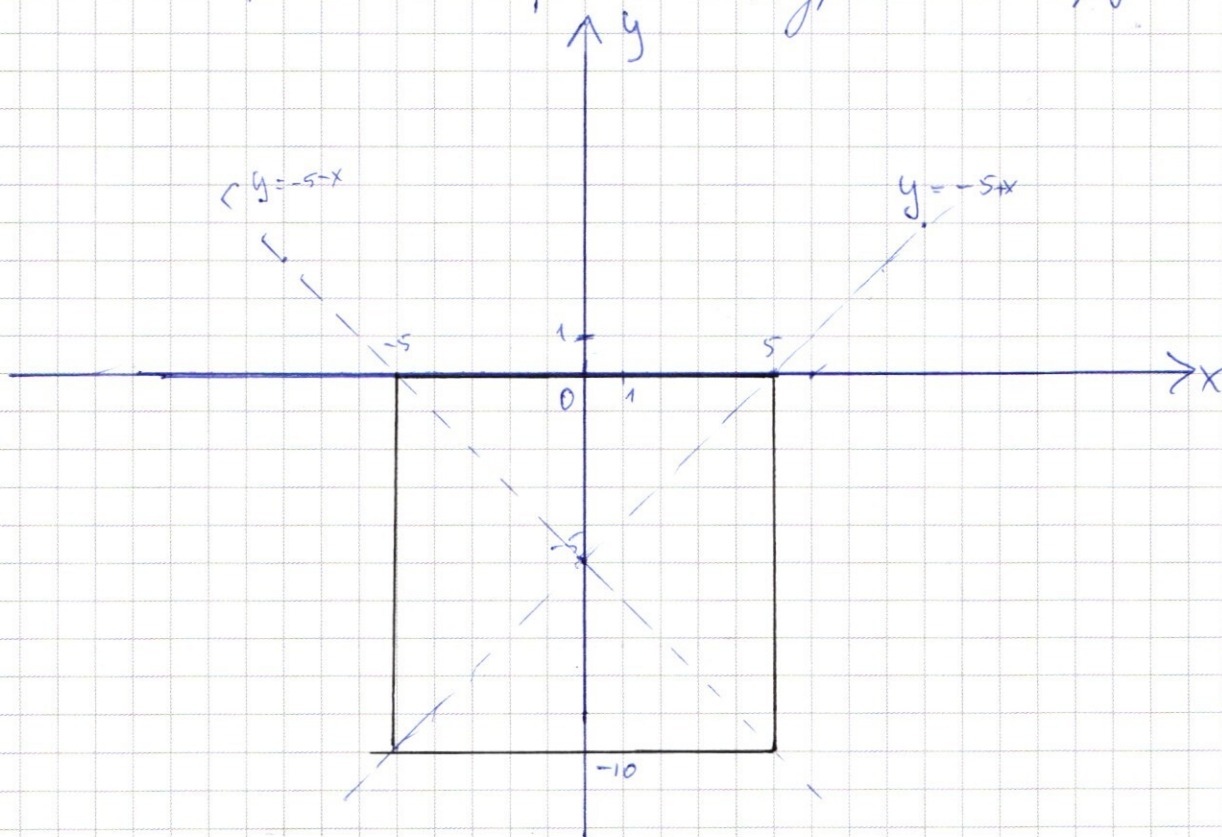
$$-2y-10=10$$

$$-2y=20$$

$$y=-10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Построим мн-во решений (1) уравн. в коорд.пл-ти



проанализируем (2) уравн:

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \quad \text{— ~~уравнение окружности~~}$$

попробуем раскрыть первый ~~то~~ модуль:

$$(|x| - 12)^2$$

$$x \geq 0, (x - 12)^2$$

$$x < 0, (-x - 12)^2 = (-(x + 12))^2 = (x + 12)^2$$

по аналогии раскрываем второй модуль

$$(|y| - 5)^2; \quad y \geq 0: (y - 5)^2$$

$$y < 0: (-(y + 5))^2 = (y + 5)^2$$

~~Мы получили уравнение четырех окружностей:~~

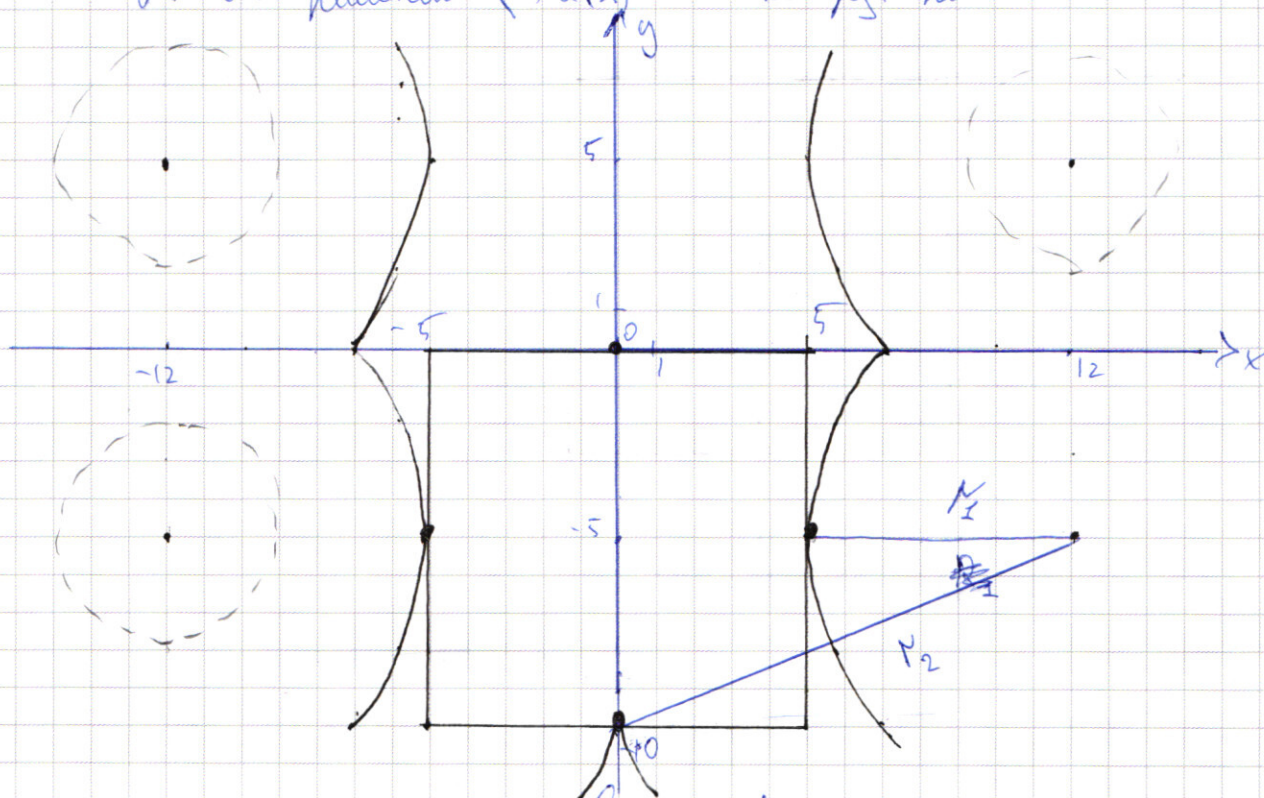
Раскрыв модули одновременно мы получим др-е
 четырёх окружностей с центрами в точках $\begin{cases} (12; 5) \\ (12; -5) \\ (-12; 5) \\ (-12; -5) \end{cases}$

радиусом $\sqrt{a}$, причем каждая окружность существует
 только в той четверти (на коорд. пл), в которой находится
 ее центр. (т.к. при раскрытии модулей кривые $x=0, y=0$,
 задают коорд. пл-та)

Изобразим.

Также окр-ти
 существ. на
 осях.

Ищ-ва решения (1) и (2) на коорд. пл-тах.



От параметра a зависит радиус окр-ти.

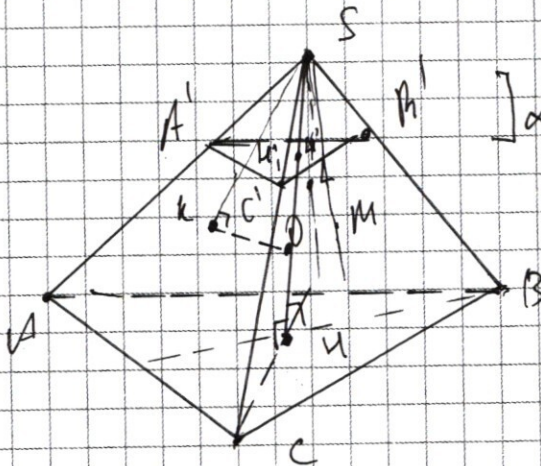
На рисунке обозначу подходящие радиусы окр-тей
 решив ур-ие.

$$\begin{cases} \sqrt{a} = r_1 \\ \sqrt{a} = r_2 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{a} = 7 \\ \sqrt{a} = \sqrt{12^2 + 5^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$$

Ответ: $a = 49; 169$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

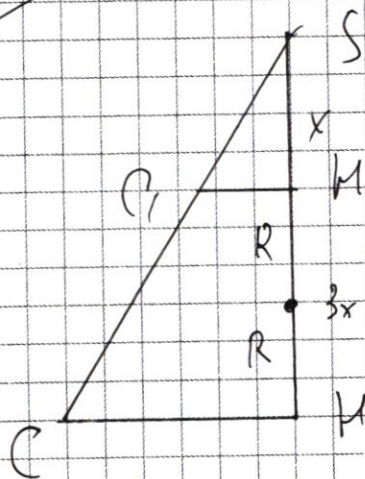
φ - иск.



N 4

$$\alpha = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16};$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C';$$



$$\frac{CM}{CM_1} = 4 = \sqrt{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SM_1}{SM} = \frac{1}{4};$$

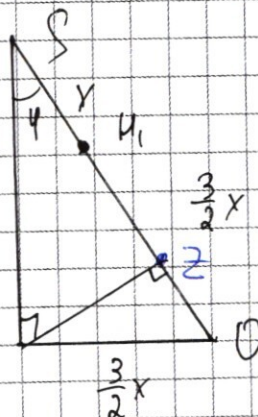
$$\begin{aligned} SM_1 &= x \\ SM &= 4x \\ \Rightarrow MM_1 &= 3x = 2R \end{aligned}$$

$$R = \frac{3}{2}x$$

$$SK = \sqrt{\left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2} = 2x$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x + \frac{3}{2}x - 0.2}{5.0}\right)^2 = k$$

$$\frac{0.2}{k_0} = \frac{k_0}{5.0}$$



$$\sin \varphi = \frac{kO}{SO} = \frac{\frac{3}{2}x}{x + \frac{3}{2}x} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{5}{2}x} = \left(\frac{3}{5}\right)$$

Ответ: $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad \text{ОДЗ: } x > 0, y > 0$

(2) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

(2): $y^2 + y(x-4) - 2x^2 + 8x = 0$

$\Delta = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$

$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{x+4 \pm |3x-4|}{2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$

$= \frac{4x}{2} = 2x$

$\frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = -x+4$

$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$

Рассм (1):

ОДЗ: $x > 0, y > 0$
 $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$
 $x < 4$

$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

$y = 2x$

$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$
 $x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

прологарифмируем обе части

$$\ln(x) \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \ln \frac{2}{x^2}$$

$$\log_{\frac{1}{x^2}}(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-1} = x$$

$$\frac{x^2}{2} = x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 - \text{не мож. по } \log \\ x=2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3087 \cdot 3 = 1029 \cdot 3 \cdot 3 = 343 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{3087} \\ 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{30} \\ 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{4} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

$$(45)^{\ln 2} = 4^{\frac{4}{2}} = 4^2$$

$$4^{-5 \ln 2} = 4^{-5 \cdot \ln 2} = 4^{-5 \ln 2}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$77733311$$

$$77739111$$

$$\begin{array}{r} 348 \\ \underline{27} \\ 2401 \\ \underline{686} \\ 9281 \end{array}$$

$$560$$

$$\begin{array}{r} 1680 \overline{) 3} \\ \underline{15} \\ 18 \end{array}$$

$$1: \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2}$$

$$2: \frac{8!}{3! \cdot 3!} =$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \underline{3} \\ 1680 \end{array}$$

$$(2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8)$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560 + 560 \cdot 2 = 560 \cdot 3 = 1680$$

$$\ln(x) \ln \frac{1}{2} = \ln 2 \ln \frac{2}{x^2}$$

$$\log_x \left(\frac{2}{x^2} \right) = \frac{\log \frac{2}{x^2}}{2} = \frac{\log 2 - 2 \log x}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2x$$

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 4y = 0$$

$$(x^2(2x-4))^{-\ln x} = \text{~~2x-4~~}$$

а.б.

x > 0

а.б.

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2} = c$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln y} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \cdot y^{\frac{1}{x^2}}$$

$$x \neq 0, y \neq 0$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{(-4\ln y - \ln \frac{y}{x^2})} = 1$$

$$y^2 - 4y = 0$$

$$y(y-4) = 0$$

$$y = 2 - 4$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{\ln x^4 - \ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\ln x^{-4} - \ln \frac{y}{x^2} = \ln \left(\frac{x^{-4} \cdot x^2}{y} \right) =$$

$$= \ln \left(\frac{x^3}{y} \right)$$

$$y = 2x - 4$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot (2x-4)^{\ln \frac{x^3}{2x-4}} = 1$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{\ln \frac{x^3}{y}} = 1$$

$$144 + 25 = 169$$

$$5; -5$$

$$7^2 = 49$$

$$0; -10 \quad 169$$

$$12^2 + 5^2 = 169$$

$$x^{-2\ln x} \cdot \frac{x^3}{2x-4} = 1$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot y^{\ln \frac{x^3}{y}} = 1$$

$$\frac{\ln \frac{x^3}{2x-4}}{x^{2\ln x}} = 1$$

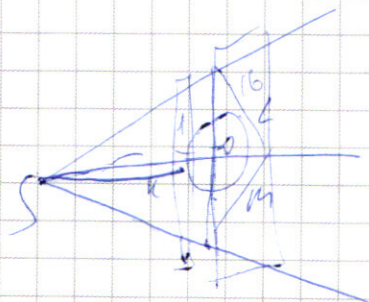
$$\ln \left(x^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot y^{\ln \frac{x^3}{y}} \right) = \ln(1)$$

$$x^{2\ln x} = (2x-4)^{\ln \frac{x^3}{2x-4}}$$

$$\ln \frac{1}{x^2} \ln x + \ln \frac{x^3}{y} \ln y = 0$$

~~х~~

$$\frac{1}{x^{2\ln x}} \cdot (2x-4)^{\ln \frac{x^3}{2x-4}} = 1$$

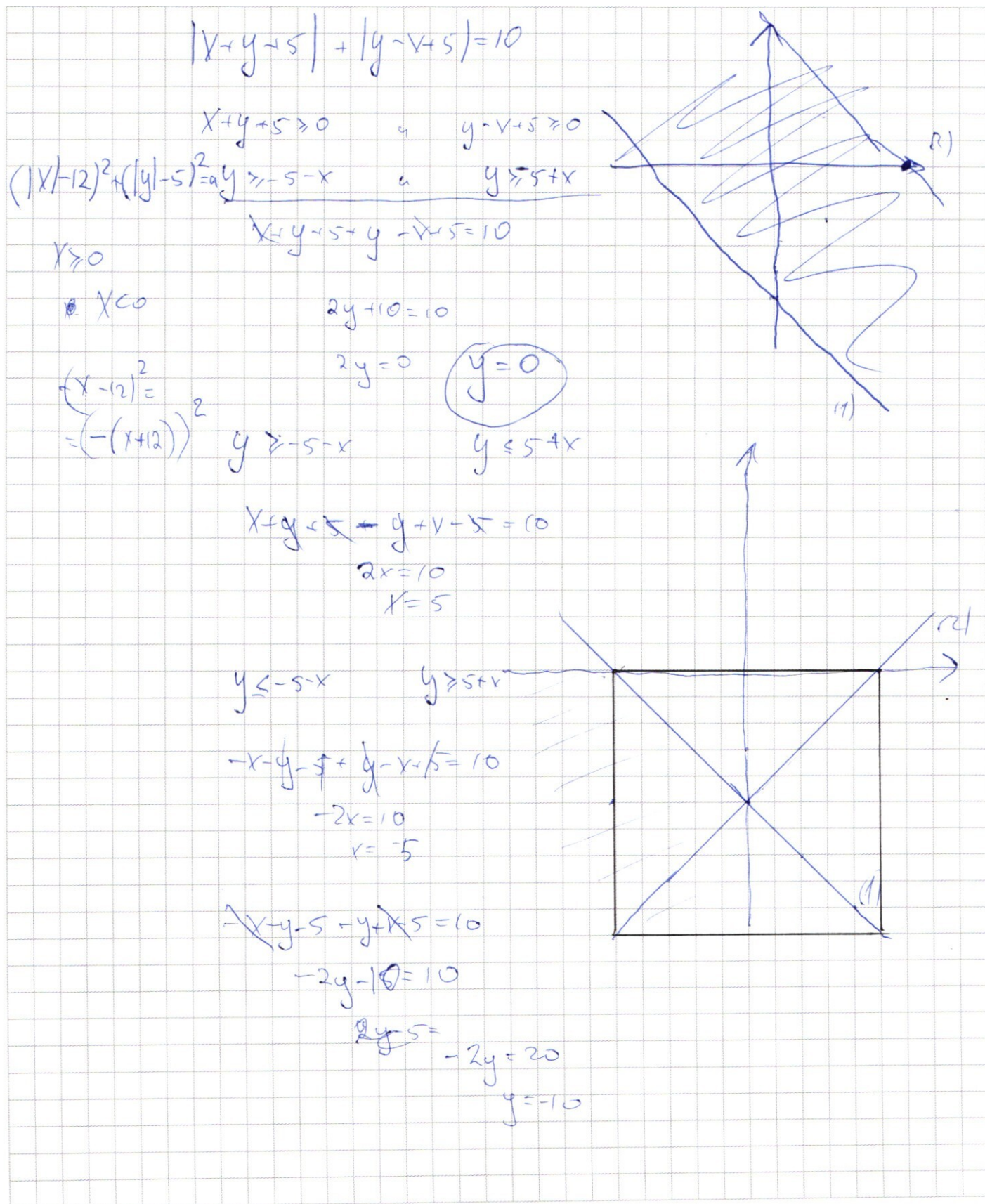


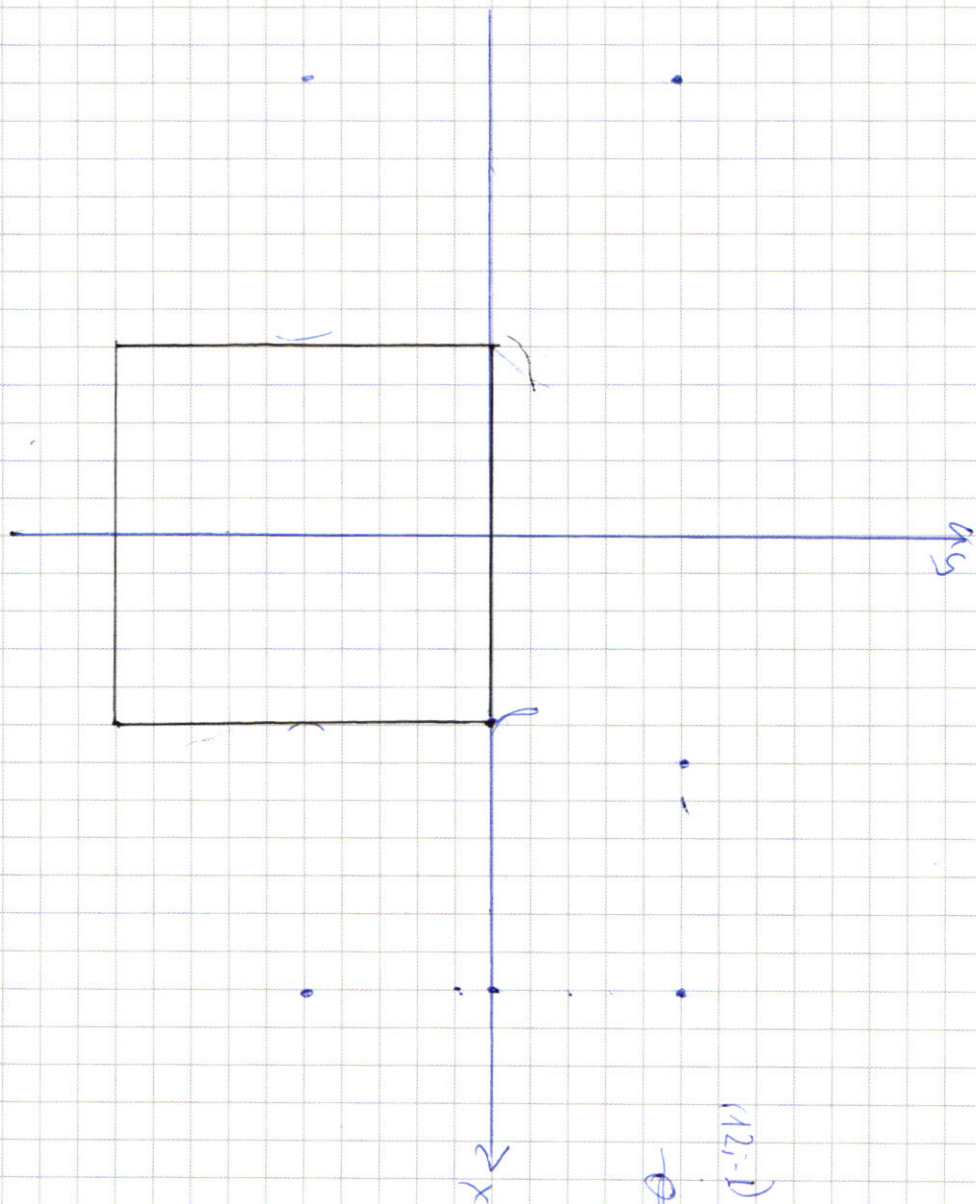
$$\ln y = \frac{\ln \frac{1}{x^2} \ln x}{\ln \frac{x^3}{y}}$$

$$y = \frac{\ln \frac{1}{x^2} \ln x}{\ln \frac{x^3}{y}}$$

$$2x = 0 \quad \ln \frac{x^2}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





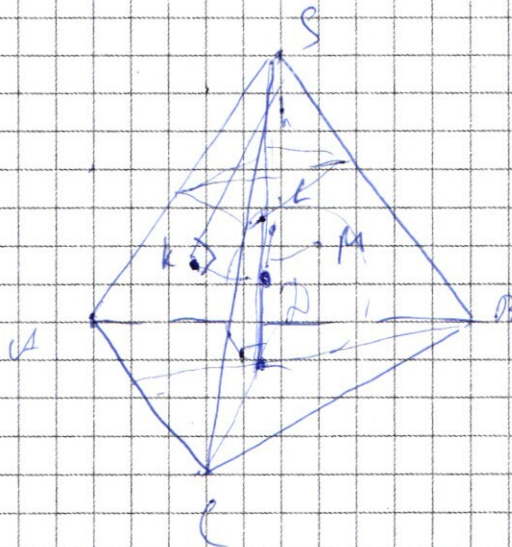
$(12, -1)$

$x = 36$

$\phi = 16 - 16$

360°

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} \quad k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{h}{h \cdot 0} = \frac{1}{4}$$

$$X \quad \frac{3x}{2}$$

$$S_{\text{мд}} = \frac{3x}{2}$$

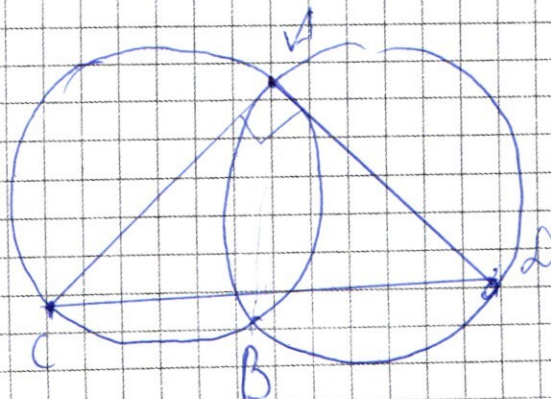
$$S_{\text{мд}} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{5x}{2}} = \frac{3}{5}$$

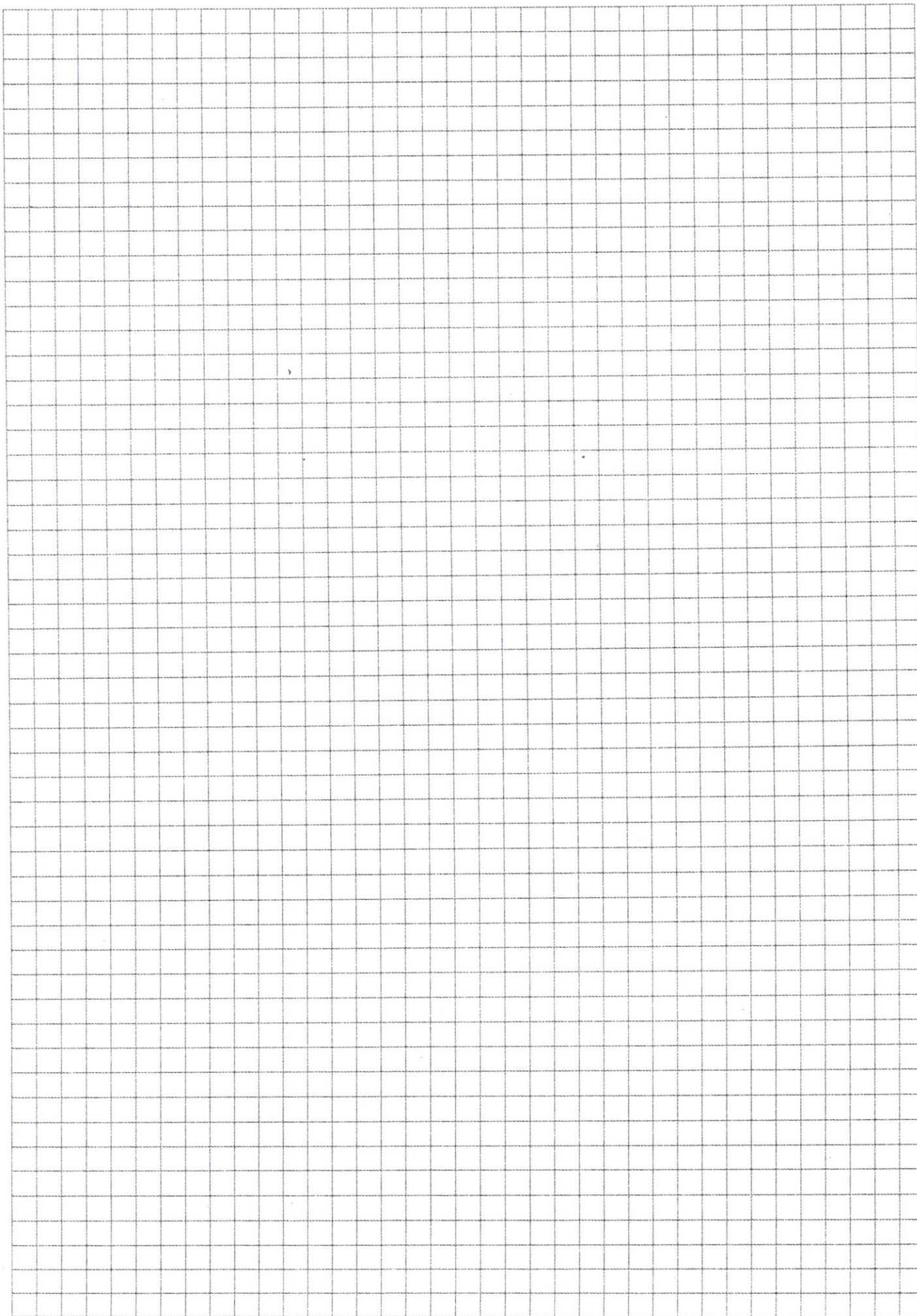
$$\frac{a_x}{a_{xx}} = \frac{b}{b_{xy}}$$

$$ab + ay = ab + bx$$

$$ay = bx$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + i \sin \beta \cos \alpha + i \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta)$$

$$\cos(4x+5x) = \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \cos 5x$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \cos 4x \sqrt{2} +$$

$$+ \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$-\cos 4x(\cos 5x - \sqrt{2})$$

$$\cos 4x(\cos 5x - \sqrt{2} + \sin 5x) + \sin 4x(-\sin 5x + \cos 5x) - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x(\cos 4x - 1 + \sin 4x) + \sin 5x(-\sin 4x + \cos 4x) = 0$$

$$\cos 5x(\cos 4x - 1) - \sin 4x \sin 5x - \cos 4x \sqrt{2} + \sin 5x(\cos 4x + 1) = 0$$

$$\sin 4x \cos 5x =$$

$$= \cos 5x(\cos 4x - 1 + \sin 4x) + \sin 5x(\cos 4x + 1 - \sin 4x) - \cos 4x \sqrt{2} = 0$$

$$\cos 4x - 1 + \sin 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x - 1 + 2 \sin 2x \cos 2x =$$

$$\cos 4x - 1 + \sin 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x - 1 + 2 \sin 2x \cos 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x - 1 + 2 \sin 2x \cos 2x =$$

$$= -2 \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x =$$

$$= 2 \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$- \sin^2 2x - (1 - \cos^2 2x) + \sin 4x =$$

$$= -\sin^2 2x - \sin^2 2x + \sin 4x =$$

$$2 \cos 5x \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) + 2 \cos 2x \sin 5x (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 4x \sqrt{2} = 0 - 2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x =$$

$$= 2 \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) = \sin 2x (-2 \sin 2x + 2 \cos 2x) =$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2 \cos 5x \sin 2x + 2 \sin 5x \cos 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 (\cos 2x - \sin 2x) \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x)$$

$$\cos 2x - \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x$$

$$2 \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) \quad \sqrt{2} = 2 \cos^2 x$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1) - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x (\cos 4x + 1) - \sin 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= \cos^4 x - 2 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - 4 =$$

$$\cos 4x (\cos 5x - \sqrt{2}) - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x + \sin 4x (\cos 5x) = \cos^2 x$$

$$\cos 4x (\cos 5x - \sqrt{2} + \sin 5x) + \cos 5x$$

$$y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 4(2x^2 + 8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 7x^2 - 24x + 16$$

$$9x^2 - 24x + 16 =$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0$$

$$= (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$3x-4 \geq 0$$

$$3x \geq 4$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$x < \frac{4}{3}$$

$$y = 2x + 4$$

$$y = -x$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{-2x^2 - 24x + 16}}{2}$$

$$9x^2 - 24x + 16$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 =$$