МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра6
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

~~Существует 2 варианта,~~ Эти восьмизначные числа будут состоять из цифр: 7,7,7,3,3,3,1,1 или 7,7,7,3,9,1,1,1.

$S_1 = \frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!} = 8\cdot7\cdot5\cdot2 = 560$, $S_2 = \frac{8!}{3!\cdot3!} = 8\cdot7\cdot5\cdot4 = 1120$,

где S_1 и S_2 - количество таких чисел при 1-ом и 2-ом варианте набора цифр, из которого состоит восьмизначное число соответственно.

$S_1 + S_2 = 1680$

Ответ: 1680

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x}+7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 - 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ
$x>0$
$y>0$

Рассмотрим варианты когда $y=1$, и когда $x=1$.

$y=1$

(1) $x^{-2\ln x} = 1$

$\left[\begin{array}{l} -2\ln x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1 \end{array}\right.$

$x=1$

(2) $1-1-2+8-4=0$

$2=0$ - противоречие $\Rightarrow y\neq1$

$x=1$

(1) $y^{-4\ln 1} = y^{\ln y}$

$y^{\ln y} = 1$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ \ln y = 0 \end{array}\right.$

$y=1$, но мы доказали, что $y\neq1 \Rightarrow x\neq1$

(1) $x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-7\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$x^{\left(\frac{\log_x y}{\log_x y}\right)\cdot(-2\ln x)} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$y^{-2\ln x\cdot\log_y x} = y^{\ln y - 3\ln x}$ $\quad y\neq1 \Rightarrow -2\ln x\cdot\log_y x = \ln y - 3\ln x$

№3

$\ln_x(3-2\log_y x) = \ln y$

$\log_y x(3-2\log_y x)=1$

$2\log_y^2 x - 3\log_y x + 1 = 0$

$(\log_y x - 1)(\log_y x - \frac{1}{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \log_y x = 1 \\ \log_y x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array}\right.$

если $y = x$

(2) $y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$

$-2y^2 + 4y = 0$

$y^2 = 2y$

$y = 2$ ($y \neq 0$ но т.к не удовлетворяет ОДЗ)

$x = 2$

если $y = x^2$

(2) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4\cancel{y} - 4x^2 = 0$

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$.

$(x-2)(x^2+x-4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$ (лишний корень т.к не удовлетворяет ОДЗ)

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: ~~(2; 4) и~~ $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

$x = 2$ и $y = 4$,

$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ и $y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

рассмотрим функции $f_1(x) = 2^x + 3\cdot 2^{34}$ и $f_2(x) = 76 + 2(2^{32}-1)\cdot x$

$f_1'(x) = 2^x$

$f_2'(x) = 2^{33} - 2$

~~$f_1'(x) > f_2'(x)$ при $x \in (33, \infty)$~~

$f_1'(x) = f_2'(x)$ только при $x = \log_2 2^{33} - 2$, функции непрерывные $\Rightarrow$ прямая $y = 76 + 2(2^{32}-1)x$ пересекает экспоненту $y = 2^x + 3\cdot 2^{34}$ не больше, чем в 2 точках $\Rightarrow$ у уравнения $76 + 2(2^{32}-1)x = 2^x + 3\cdot 2^{34}$ не больше 2 корней. Методом подбора находим эти корни.

$x = 6$ и $x = 38$

~~$S = 76 + 2^{33}x - 2x = 2$~~

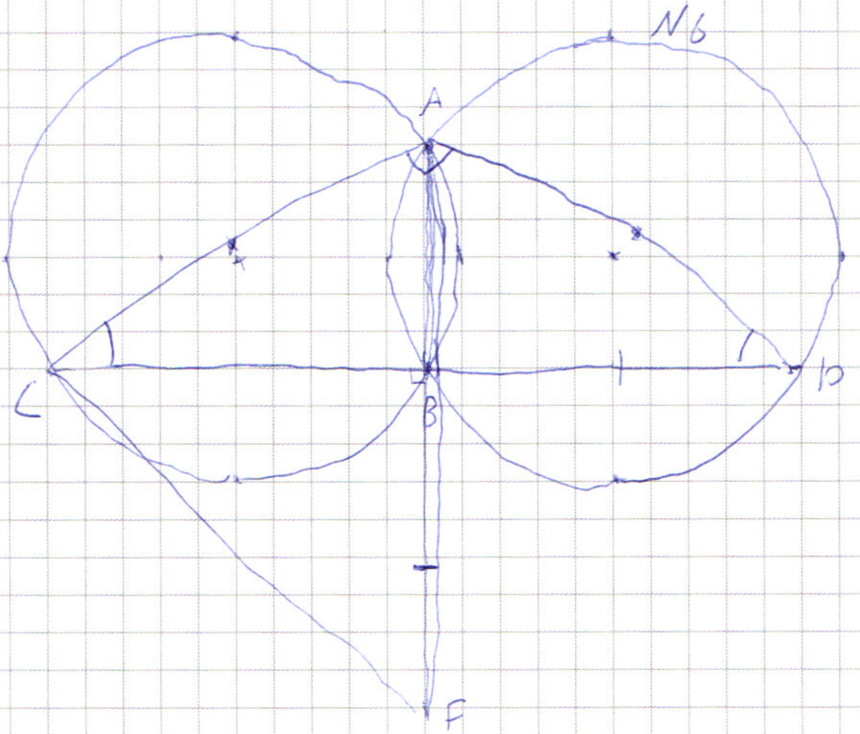
$S = ((76 + 2^{33}\cdot 7 - 2\cdot 7) - (2^7 + 3\cdot 2^{34})) + ((76 + 2^{33}\cdot 8 - 2\cdot 8) - (2^8 + 3\cdot 2^{34})) +$
$+ \ldots + ((76 + 2^{33}\cdot 37 - 2\cdot 37) - (2^{37} + 3\cdot 2^{34}))$, где S - искомое кол-во пар

$S = 31\cdot 76 + \frac{7+37}{2}\cdot 31\cdot 2^{33} - (7+37)\cdot 31 - 2^{38} + 2^7 + 31\cdot 3\cdot 2^{34} =$

$= 836\cdot 2^{33} + 1120$

Ответ: $836\cdot 2^{33} + 1120$

№6



~~(∠AB не обязательно 90°)~~

а) Так как в двух равных окружностях вписанные углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну и ту же хорду AB, эти углы равны.

$\angle ACD = \angle ADC = 45^0 \Rightarrow \Delta ACD$ равнобедренный $\Rightarrow AC = AD$.

$AB = \cancel{\frac{\sqrt2}{2} \cdot 10 = 5\sqrt2}$ $AB = 10\sqrt2$

$\frac{CB}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 20$

$CB^2 = \overset{400}{\cancel{20}} \cdot \sin^2 \angle CAB$

$\frac{BD}{\sin(90 - \angle CAB)} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \cancel{2\sqrt5}\,20$

$BD^2 = \overset{400}{\cancel{20}} \cos^2 \angle CAB$

$CB^2 + BD^2 = \cancel{20}\,400$

$CB^2 + BF^2 = \overset{400}{\cancel{20}} = CF^2$

$\cancel{CF = \sqrt{20} = 2\sqrt5}$ $CF = \sqrt{400} = 20$

Ответ: а) 20.

~~б) $CB^2 = 20 \cdot \sin^2 \angle CAB$~~
~~$144 = 20 \cdot \sin^2 \angle CAB$~~
~~$36 = 5 - 5\cos^2 \angle CAB$~~
~~$\cos^2$~~

б) $CB^2 = 400 \cdot \sin^2 \angle CAB$
$144 = 400 \cdot \sin^2 \angle CAB$
$144 = 400 - 400\cos^2 \angle CAB$
$\cos^2 \angle CAB = \frac{256}{400}$ $\cos_{\angle CAB} = \frac{4}{5}$, $\sin \angle CAB = \frac{3}{5}$
~~$BD^2 = 400\cos^2 \angle CAB$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$BD^2 = 400 \cdot \cos^2 \angle CAB$

$BD^2 = 256$

$BD = 16 = BF$

$S_{\triangle ACF} = \frac{AB + BF}{}$

№5

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5\geq 0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5\leq 0 \\ x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+5\leq 0 \\ y-x+5\geq 0 \\ x=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+5\leq 0 \\ y-x+5\leq 0 \\ \cancel{x=} - \; y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

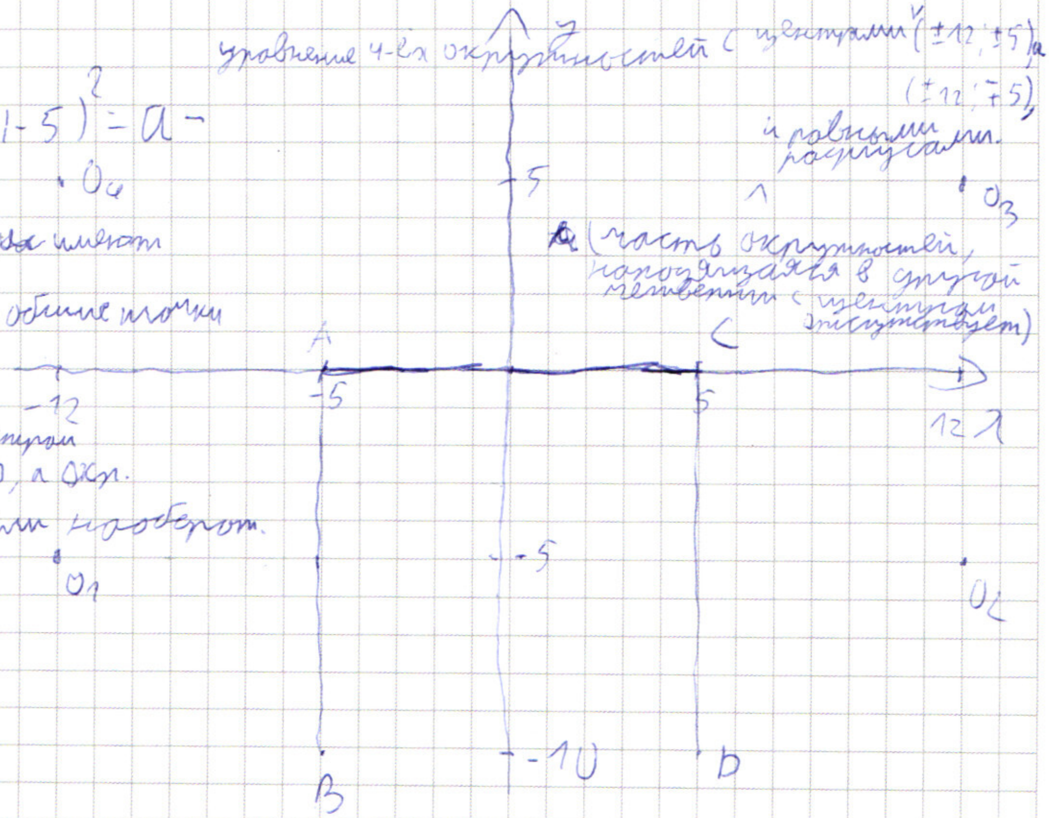
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-5;5] \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y\in[-10;0] \\ x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} y\in[-10;0] \\ x=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} \cancel{x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)} \\ \begin{cases} y=0 \\ x\in\varnothing \end{cases} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\begin{cases} x\in[-5;5] \\ \cancel{y=0} \end{cases}$

(O_1, O_2, O_3, O_4)

уравнение 4-ех окружностей с центрами $(\pm 12;\pm 5)$ и $(\pm 12;\mp 5)$, и равными радиусами.

$((|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$ –



A (часть окружностей, находящаяся в другой четверти с центрами отсутствует)

Окружности ~~не~~ имеют с ломаной BACD 2 общие точки только если окр. окружность с центром O_1 касается CD, а окр. с центром O_2 – AB или наоборот.

$$\left[\begin{array}{l} a = \cancel{4}\, 7^2 = 49 \\ a = 17^2 = 289 \end{array}\right.$$

Ответ: $a=49$, $a=289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 3\cdot 3087 = 3\cdot 3\cdot 1029 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 343 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7$

$33331777 = \frac{8!}{4!\,3!} = 8\cdot 7\cdot 5$

$22\cdot 31 + 31\cdot 6 - 28\cdot 32$

$28\cdot 31$

$93311777 = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$

31×32 992

$99111777 = \frac{8!}{2!\,3!\,3!} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2$

$128 + 992 = 1120$

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos(9x - 45^\circ) - \cos(5x + 45^\circ) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$8\cdot 7\cdot 5\cdot 9$

28×37, 868, 836

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 9x\cos 5x - \sqrt{2}\sin 9x\sin 5x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$ $\quad D = 17$ $\quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$\cos x \cdot \cos($

№3

ОДЗ $x > 0$, $y > 0$

$x^{8-6\ln x} = x^{-6\ln x}$

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x^7}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$x^{-2\log_x e}$

$x^{\log_x y}$ $\quad x = y^{\log_y x}$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$y^{-3\ln x} = y^{-3\frac{\log_y x}{\log_y e}}$

$\frac{\ln x}{\ln y} = \log_y x$

$(\log_y x - 1)(\log_y x - 0{,}5) = 0$

$-2\ln x = \log_y \ln y - 3\ln x$

$\log_y x = 1$ $\quad \log_y x = 0{,}5$ $\quad \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$

$x^{-2\ln x} = x^{-2\frac{\log_y x}{\log_y e}} =$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-7\ln x}$

$= 1$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$3\log_y x - 2\log_y^2 x = 1$

$-2\ln x\cdot\log_y x = \ln y - 3\ln x$ $\quad \ln x\cdot\log_y e(3 - 2\log_y x) = 1$ $\quad 2\log_y^2 x - 3\log_y x + 1 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_y e^{\ln x(3\cdot 2\log_y x)} = 1 \quad e^{\ln}$ $\quad x\in(7;37)$

$S_{(x)} = 76 + 2(2^{32}-1)\cdot x$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5\geq 0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+5\geq 0 \\ y-x+5\leq 0 \\ x=5 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} 5+x\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \\ x\in[-5;+5] \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y\in[\\ x=5 \end{cases}$

$2^7+2^8+2^9 = 2^{10}-2^7$

$(2^x)' = (e^{\ln 2\cdot x})' = (e^x \cdot e^{\ln 2})' = 2^x$ $\quad x=38$

№7

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$ $\quad y \geq 2^x(3\cdot 2^{34-x}+1)$

$y < 76 + 2(2^{32}-1)\cdot x$ $\quad 2^2$ $\quad 2^{33}(6+2^{x-33})\ x\cdot 2^{33}$

$x=6 \quad x\cdot 5$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32}-1)\cdot x$

$64 + 3\cdot 2^{34} = 76 - 12 + 3\cdot 2^{34}$

$\frac{7+37}{2}\cdot 31 = 22\cdot 31$

$19\cdot 2^{34} = 19\cdot 2^{34}$

$x=6$

$x=38$ $\quad 2^7 + 3\cdot 2^{34} \quad 76 + 2^{33}\cdot 7 - 14$

$2^x + 3\cdot 2^{34} \quad 76 + 2(2^{32}-1)\cdot x$ $\quad 66 + 6\cdot 2^{33} \quad 7\cdot 2^{33}$

$66 \quad 2^{33}$

$2^x(2^{34-x}\cdot 3) - 2^x(x\cdot 2^{33-x} - 6\cdot 2^{33-x} - 1) + 76$

$2^x(2^{33-x}(x-6) - 1) + 76$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

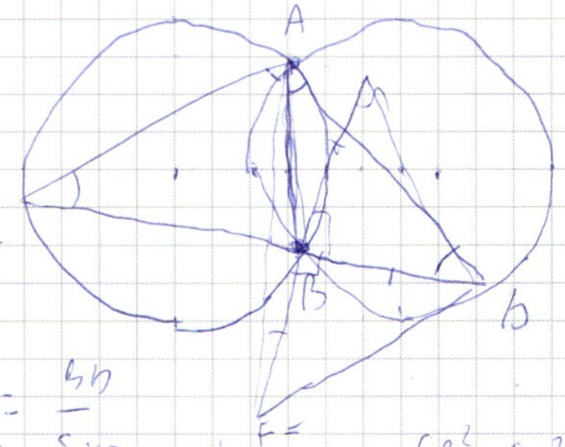
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cancel{\cos 3x \, \cos x + \sin}$ $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 9x\cdot\cos 5x - \sqrt{2}\sin 9x\cdot\sin 5x + \sin 9x +$

$+ \sin 5x = 0$

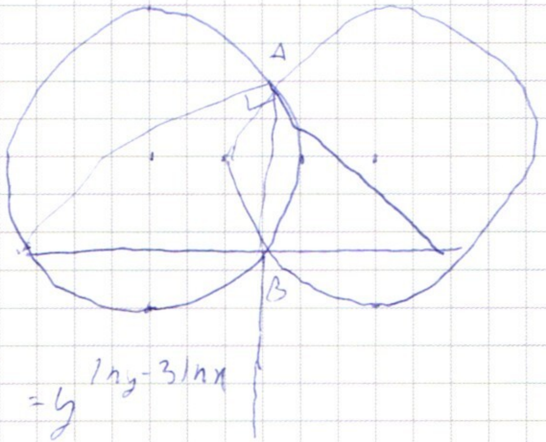


$\sqrt{CB^2 + BD^2} - ?$

$$\begin{array}{r} \times\; 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

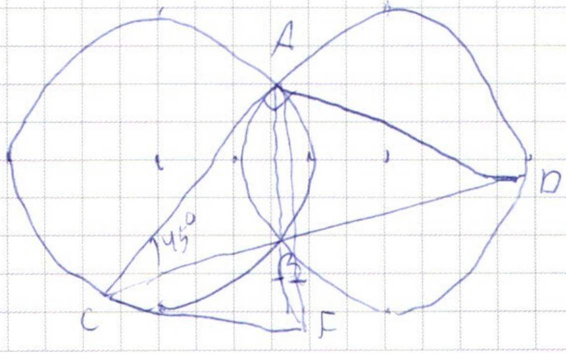
$\dfrac{CB}{\sin\angle CAB} = \dfrac{BD}{\sin(90 - \angle CAB)}$ $F =$ $CB^2 = \sin^2\angle CAB$

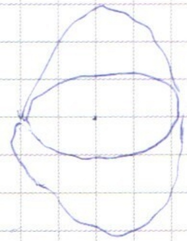
$$\begin{array}{r} \times\; 343 \\ 81 \\ \hline 343 \\ 2744 \\ \hline 27783 \end{array}$$



$AB^2 =$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)