

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Тогда восьмизначное число должно содержать 3 цифры 3, 3 цифры 7 и 2 цифры 1.

Тогда общее число таких чисел равно:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 56 \cdot 10 = 560$$

Ответ 560

$$\sqrt{2} \cos 3x - \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad | : \cos 2x \neq 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \sin 7x = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\text{Если } \cos 2x = 0, \text{ то } \sin 2x = \pm 1, \text{ т.е.}$$

$$0 = \pm 1 - \text{неверно} \Rightarrow \cos 2x \neq 0$$

$$\pm \sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \neq$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5}{2}x + \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \left(\frac{5}{2}x + \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[3]{x} \int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad y^2 - 2xy - 2x^2 + xy + 8x - 4y = 0$$

$$y(y - 2x) + x(y - 2x) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$y = 2x \quad \text{или} \quad y = 4 - x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x} \quad | \cdot y^{4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\text{Если } y = 2x:$$

$$x^{-2\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^2}} \quad | \cdot x^{\ln x^2} > 0$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^2} + \ln x^2} = x^{-\ln x^2 + \ln x^2}$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln 2} = 1$$

$$\text{П.к. } a^{\log_c b} = a^{\frac{\log a b}{\log a c}} = b^{\log_c a}, \text{ то}$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot 2^{\ln x} = 1$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2} + \ln x} = 1$$

$$2^{\ln \frac{2}{x}} = 1 \implies \ln \frac{2}{x} = 0 = \ln 1 \quad (\text{п.к. } y = 2^x \text{ монот. возр.})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $y = \ln x$ - мон. возраст, то
 $\frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$

Если $y = 4 - x$

$$x^{-2 \ln x} = (4 - x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$f(x) = x^{-2 \ln x} = e^{-2 \ln^2 x}$$

- монотонно убывающая ф-я при $x > 0$

$$g(x) = (4 - x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}} = e^{\ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}} = \text{мон. возраст. ф-я при } x > 0$$

Пусть $f(x) = g(x)$ - ед. реш.

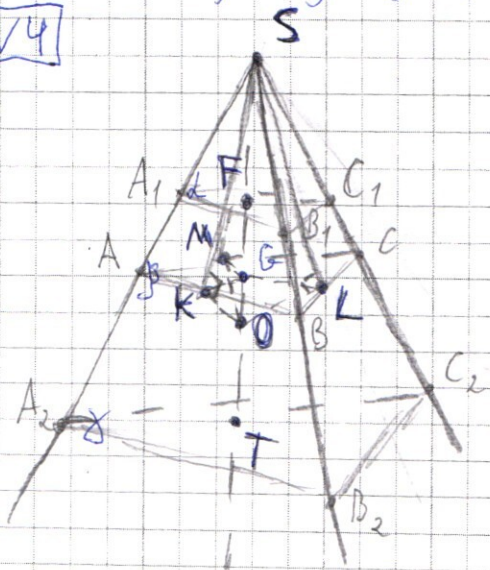
Если $x = 2$: $f(2) = 2^{-2 \ln 2}$

$$g(2) = 2^{\ln \frac{2}{8}} = 2^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2 \ln 2} \Rightarrow x = 2 - \text{корень}$$

Пусть $y = 4 - 2 = 2$

Ответ: $(2; 2); (2; 4)$.

✓4



Дано: $S_1 = 1, S_2 = 16$.

Найти: $\angle KSO, S_B$.

Решение.

Пусть $KO = OL$ (как радиусы), $SK = SL$

(как касательные), SO - общая, то

$$\triangle SKO = \triangle SLO \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{высота из } K \text{ на } SO \text{ и высота}$$

$$\text{из } L \text{ на } SO \text{ пересекаются в одной}$$

$$\text{точке } G \Rightarrow SO \perp KG, SO \perp LG \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO \perp (KLM)$$

$$SO \perp KLM$$

$$L \perp SO$$

$$K \perp SO$$

$$\Rightarrow \beta \parallel L \parallel \gamma \quad (\beta - \text{плоскость, содержащая } KL, M)$$

Так. $L \parallel \beta \parallel \gamma$, то $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC \sim \triangle A_2 B_2 C_2$ (как сечения перпендикулярных уга) $\Rightarrow$ высоты пирамиды $SA_1 B_1 C_1, SA_2 B_2 C_2$

$$SA_2 B_2 C_2$$

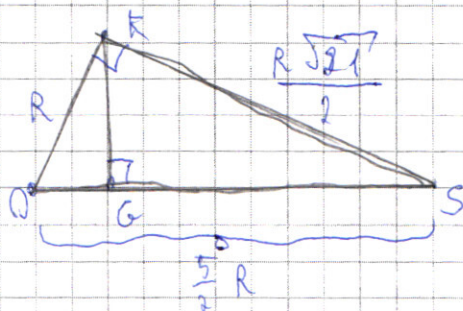
(.) F, G, T - точки пересечения L, β, γ с $SO \Rightarrow SF, SG, ST$ - высоты пирамиды

$$\text{Также } \frac{SF}{ST} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{4} = \frac{SF}{SF + 2R} \quad (R - \text{радиус окружности})$$

$$4SF = SF + 2R \Leftrightarrow SF = \frac{3}{2}R$$

$$\text{Также } \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SF + R} = \frac{R}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{2}{5} \quad (\triangle SKO - \text{прямоугольный, т.к. } SK - \text{касательная})$$

В $\triangle OKS$:



$$KS = \sqrt{\frac{25}{4}R^2 - R^2} = \frac{R\sqrt{21}}{2}$$

$$KG = \frac{KO \cdot KS}{OS} = \frac{R \cdot \frac{R\sqrt{21}}{2}}{\frac{5}{2}R} = \frac{R\sqrt{21}}{5}$$

$$GS = \sqrt{KS^2 - KG^2} = \sqrt{\frac{21R^2}{4} - \frac{21R^2}{25}} = R \sqrt{\frac{25 \cdot 21 - 4 \cdot 21}{4 \cdot 25}} = \frac{21R}{10}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{K_1 F}{K_2 G}} = \sqrt{\frac{SF}{SG}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}R}{\frac{21R}{10}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 21}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$S_2 = S_1 \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$\text{Итак, } \angle KSO = \arcsin \frac{2}{5}, S_2 = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$\sqrt{5} \int |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$$

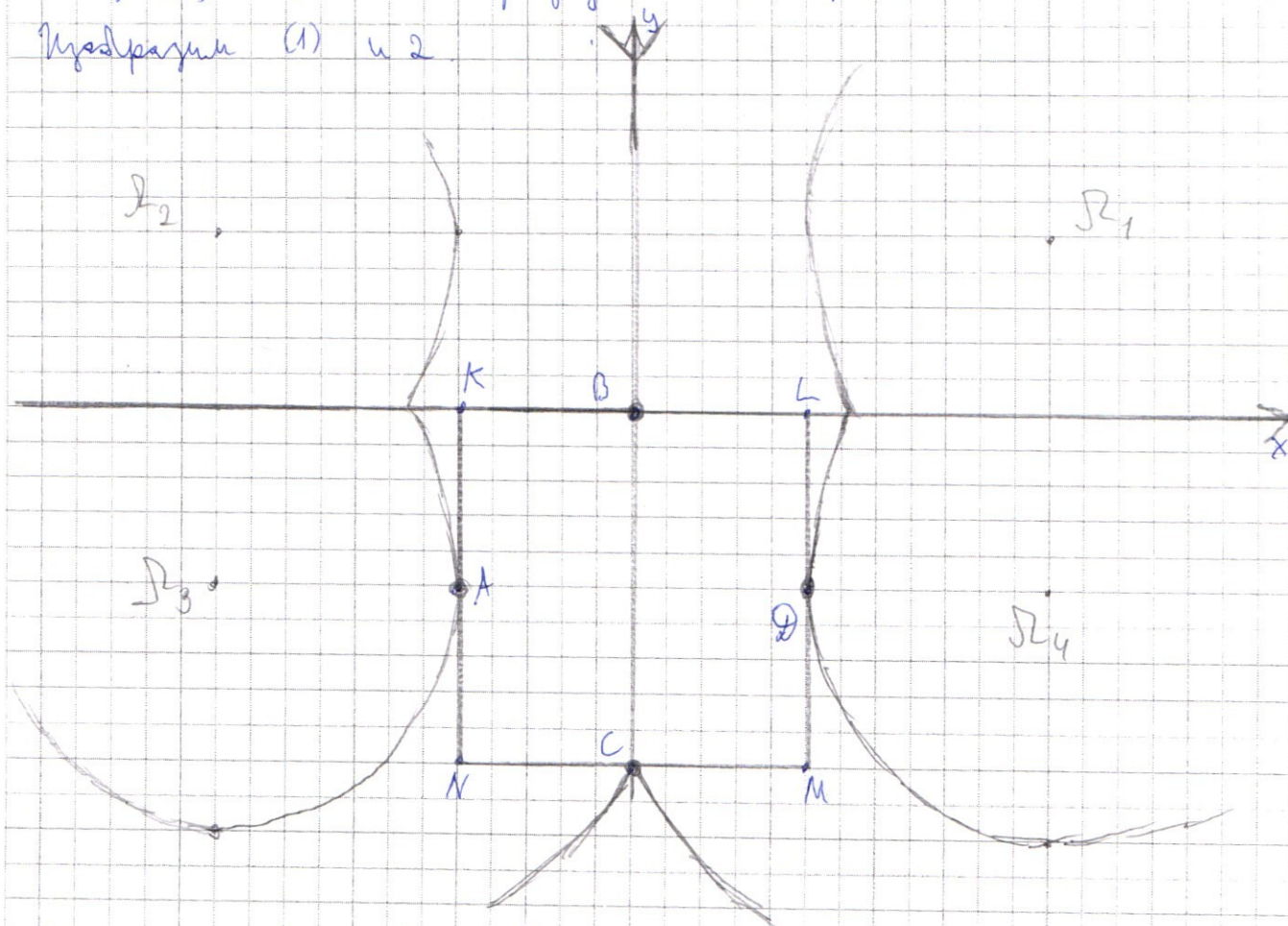
2-? 2 рещ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ x=-5 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y < x-5 \\ y=-10 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \\ x=5 \end{cases}$

(2) Является 4-мя окружностями с ^{центрами} координатами $(12; 5); (12; -5); (-12; 5); (-12; -5)$ и радиусами $(\sqrt{a})$

квадраты (1) и 2

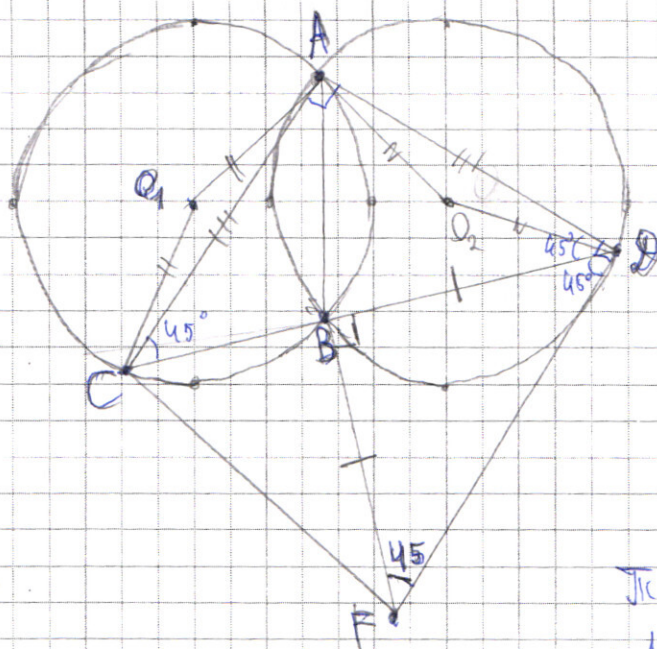


Видно, что 2 рец. будет в 2-ух случаях:

1) Если R_3 и R_4 касаются квадрата $KLMN$ в точках A и D .
Тогда $|\sqrt{a}| = 12 - 5 \Rightarrow a = 49$

2) Если R_3 и R_4 пересекают квадрат $KLMN$ в точках B и C .
Тогда $|\sqrt{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \Rightarrow a = 169$.

Problem. $Q_1 = 4 \text{ g}$, $Q_2 = 16 \text{ g}$.

 $\sqrt{6}$ 

Given: $R = 10, \angle CAD = 90^\circ,$

$$BF \perp CD, BF = BD,$$

Flavim: a) CF

5) $S_{\Delta ACF}$, wenn $BC=12$.

Резюме.

解. $BQ \perp BF$, $\angle FBQ = 90^\circ$, m

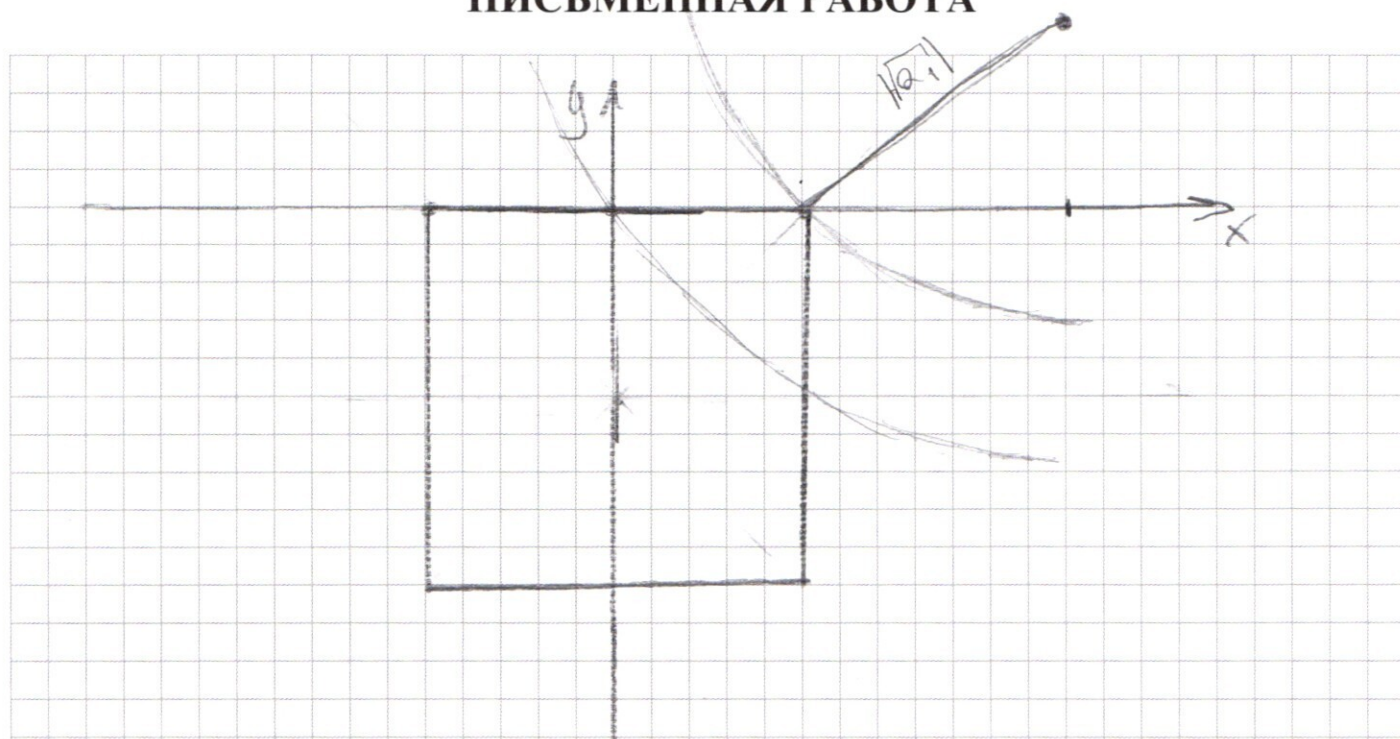
$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$$

Thm. $\angle ACD = \frac{\angle A}{2} = \angle AQC$, wo

 $\Delta A(Q)$ -pároslag, páratlanlag. $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

Thence $\angle ADF = 45 + 45 = 90 \Rightarrow AC \parallel DF$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



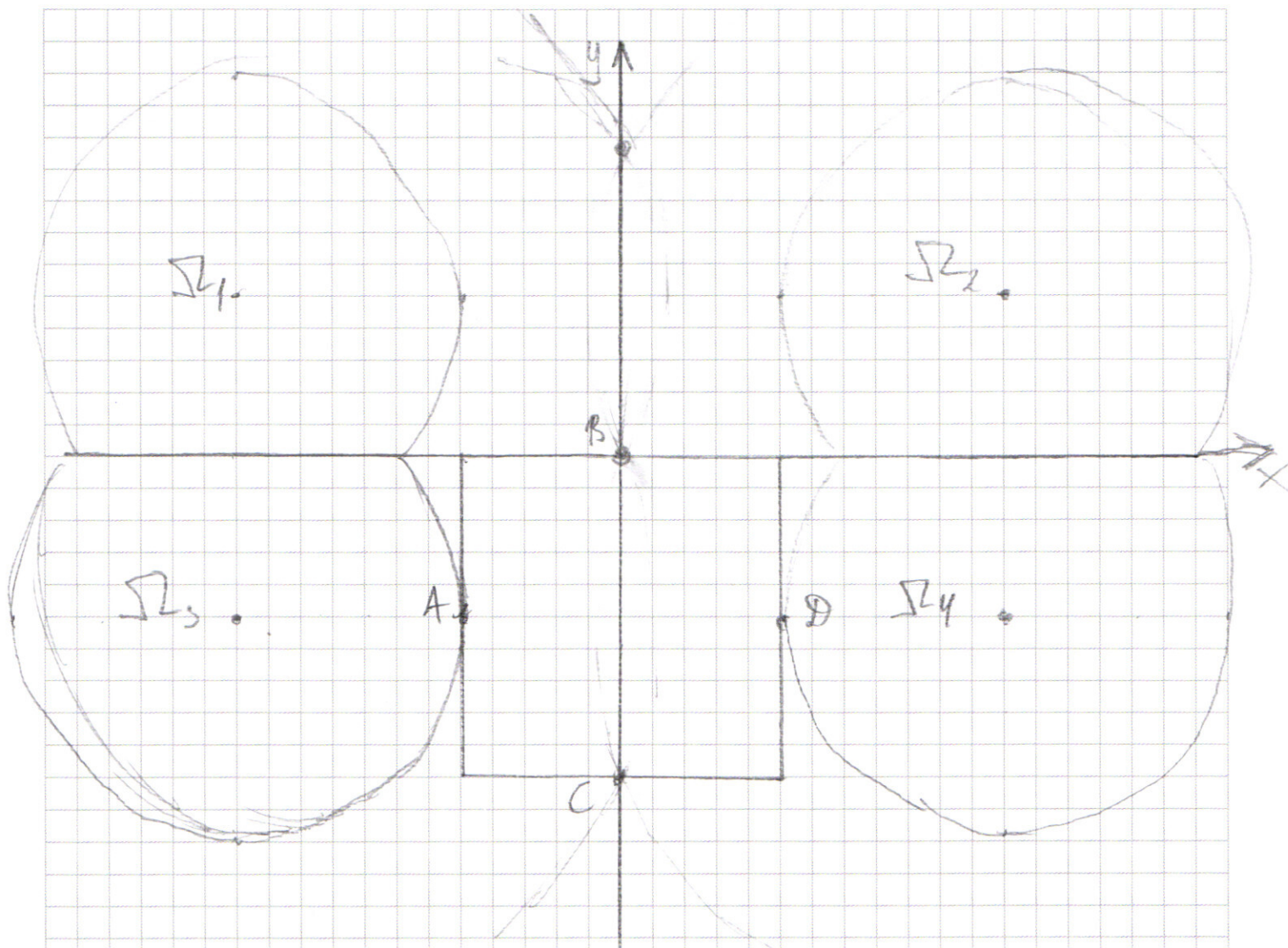
$$] a = 169$$

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169.$$

$$x = 12: |y| - 5 = \pm 13 \quad |y| = \begin{cases} 18 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 18.$$

$$x = 0:$$

$$|y| - 5 = \pm 5 \Rightarrow |y| = \begin{cases} 10 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 10, y = 0$$



2 реш. в 2-ух случаях:

1) Ω_3 и Ω_4 кас. кв. в (-) A и B.

Тогда $|\vec{AB}| = 7 \Rightarrow a = 49$

2) Ω_3 и Ω_4 перес. кв. в (-) B и C

Тогда $|\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \Rightarrow a = 169$

Ответ $a = \boxed{49, 169}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 = 9261$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Т.е. 3 цифры 3, 3 цифры 7 и 2 цифры 1.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 261 \\ 3 & 87 \\ 1 & 29 \\ 3 & 43 \\ 4 & 9 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 560 = \boxed{560}$$

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x = \sin 9x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sin 5x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 2 \cos\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{2} \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) - \cos 4x = 0$$

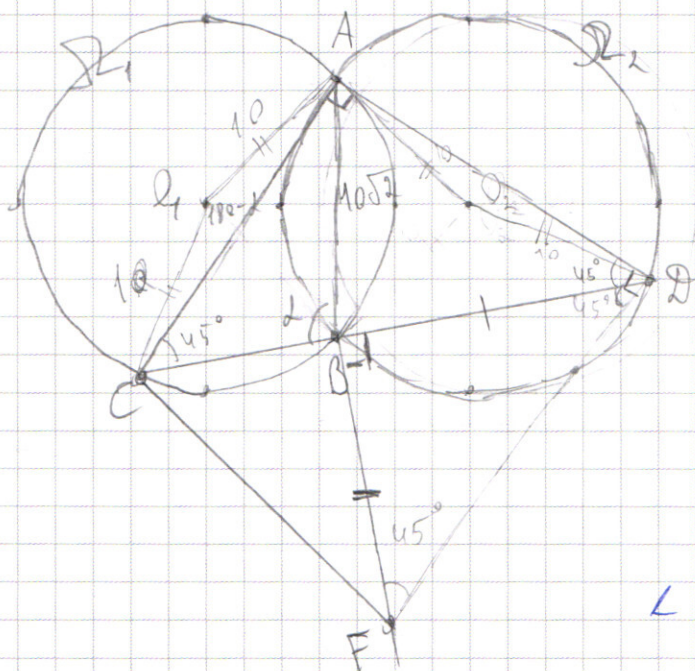
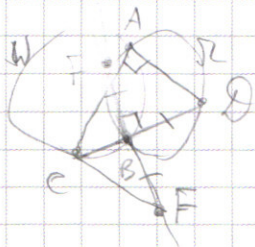
$$2 \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 5x}{2}\right) \cos\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 5x}{2}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + 5x\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

№ 6



$R=10, \angle CAD=90^\circ,$
 $BF \perp CD, BF=BD,$

a) $CF=?$

b) $S_{\triangle ACF}=?$, если $BC=12$.

~~$\triangle ABC$~~

$\angle ACD = \frac{AB}{2} = \angle ADC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle$ равн. паралл. $\Rightarrow$

$BF=BD \Rightarrow \triangle BFD$ - равн. $\Rightarrow$

$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

$\angle ADF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel FD$

$\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$

~~$\triangle ABC$~~ $\angle ABC = 2$

$AC^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2 \Rightarrow AC = R\sqrt{2(1+\cos 2)} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\cos 2} =$

$AC = \frac{AB \sin 2}{\sin \angle ACB} = \frac{10\sqrt{2} \sin 2}{\frac{1}{2}} = 20 \sin 2 = AB \sqrt{1+\cos 2}$

$= AB \cdot \sqrt{2} \sin 2$

$\sqrt{2} \sin 2 = \sqrt{1+\cos 2}$

$2 \sin^2 2 = 1 + \cos 2$

$2(1 - \cos^2 2) = 1 + \cos 2$

$2 - 2 \cos^2 2 = 1 + \cos 2$

$2 \cos^2 2 + \cos 2 - 1 = 0$

$\cos 2 = \sqrt{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 2 = 180^\circ$ - очевидно невозможно, $2 = 60^\circ$.

$AC = R\sqrt{2(1+\cos 2)} =$

$= AB \sqrt{1+\cos 2} =$

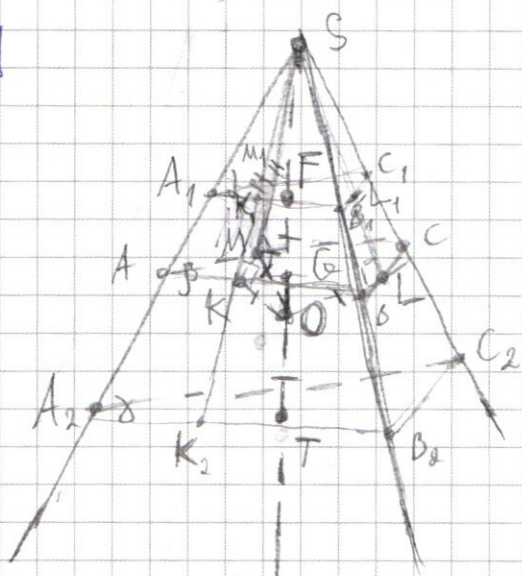
$= \frac{AB \sin 2}{\sin \angle ACB}$

$\sqrt{2} \sin 2 = \sqrt{1+\cos 2}$

$2 \sin^2 2 = 1 + 1 - 2 \sin^2 2$

$\sin^2 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \sin$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{4}$ 

$$S_2 = 1, \quad S_8 = 16,$$

$\Sigma KSO-?$, $S_{\phi}-?$

$$K_0 = 0L, SK \approx SL, S_0\text{-solution} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta SK_0 = \Delta SL_0 \Rightarrow$$

Вектор из K на $SO^{(h_k)}$ и вектор
из L на $SO^{(h_l)}$ пересекаются в

договор market $\Leftrightarrow SOL_{HK}, SOL_{HL} \Rightarrow$

$$\Rightarrow SO \perp (K \perp M) \Rightarrow \angle || p || x.$$

Thema $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC \sim \triangle A_2 B_2 C_2$

$$S_{A_1 B_1 C_1} \sim S_{A_2 B_2 C_2}$$

$$\frac{SF}{ST} = \frac{\sqrt{S_L}}{S_x} = \frac{1}{4} = \frac{SF}{SF + 2R}$$

$$SF + 2R = 4SF \implies SF = \frac{2}{3} R$$

Thmgs $\sin \angle RSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SF+R} = \frac{R}{\frac{3}{2}R+R} = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}$

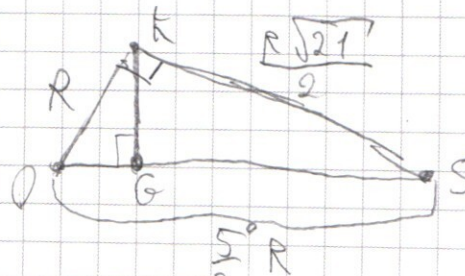
$$\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

~~$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_F}{S_G}$$~~

$$GS = \sqrt{KS^2 - KG^2} =$$

$$= 65 = \sqrt{\frac{21R^2}{4} - \frac{21R^2}{25}}$$

$$= R \sqrt{\frac{21.25 - 21.4}{100}} = R \sqrt{\frac{21.21}{100}} = \frac{21R}{10}$$



$$KS = \sqrt{\frac{25}{4} R^2 - R^2} = R \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{R\sqrt{21}}{2}$$

$$K_G = \frac{K_O \cdot K_S}{Q_S} = \frac{R \cdot \frac{R\sqrt{21}}{2}}{\frac{5}{2}R} = \frac{R\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{S_k}{S_p} = \sqrt{\frac{K_1 F}{K G}} = \sqrt{\frac{S F}{S G}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} R}{\frac{21}{2} R}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^5}{2 \cdot 21}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_B = S_2 \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

15

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ ((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

2-? 2 реш.

(1) ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~

$$\begin{cases} y+x+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-5 \\ y-x+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x-5 \\ 2y+10=10 \Leftrightarrow y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x+5 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x-5 \\ y-x+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x-5 \\ -x-y-5+y-x+5=10 \Leftrightarrow x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x+5 < 0 \Leftrightarrow y < -x-5 \\ y-x+5 < 0 \Leftrightarrow y < x-5 \\ -x-y-5-y+x-5=10 \Leftrightarrow y=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-5 \\ y-x+5 < 0 \Leftrightarrow y < x-5 \\ y+x+5 - y+x-5 = 10 \Leftrightarrow x=5 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1)$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$

~~ОДЗ:~~ $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(1) $\frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^2} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln \frac{y}{x^2}}} \cdot y^{4\ln x} > 0$
 $\frac{1}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3\ln x}} \Leftrightarrow x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

~~(1) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$
 $-x(2x+y) + 4(2x-y)$~~

(2) $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

~~$y^2 + 2xy + x^2 - 3x^2 + xy + 8x - 4y$~~

~~$y^2 - 2xy - 2x^2 + xy + 8x - 4y = 0$~~

~~$y(y-2x) + x(y-2x) - 4(y-2x) = 0$~~

$(y-2x)(y+x-4) = 0$

$y = 2x$

$y + x = 4$

~~$y \neq 2x$, тогда~~

~~$x^{2\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^2}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x}}$~~

$x^2 = \frac{2}{x^2}$

$x^4 = 2$

$x = \sqrt[4]{2}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

Едини...

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sin 2x + \cos 2x =$$

$$= \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 7x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{7x - \frac{3\pi}{4} + 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x + \frac{3\pi}{4} - 2x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{9}$$

$$C\varnothing^2 = (CB + B\varnothing^2) = CB^2 + 2CB \cdot B\varnothing + B\varnothing^2 = CF^2 +$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x^{-2\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{\frac{7\ln x}{x}} \mid y^{\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^3}}$

$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^2}}$

$x^{-2\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^2}}$

$1 = 2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot (2x)^{\ln \frac{2}{x^2} + \ln x}$

$(2x)^{\ln \frac{2}{x^2}} = (2x)^{\ln 2} = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$

$1 = 2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln 2} = 2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot 2^{\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^2} + \ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x}} = 2^0$

$\ln \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$

2) $y = 4 - x$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$

$(4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}} = x^{\log_x(4-x) \ln \left(\frac{4-x}{x^3}\right)} = x^{\ln \frac{(4-x)^{\log_x(4-x)+3}}{(4-x)^3}} = x^{\ln(4-x)^{\log_x(4-x)+3}}$

$1: 1^{-2\ln 1} = 1 = 3^{\ln \frac{3}{1}} = 3^{\ln 3}$

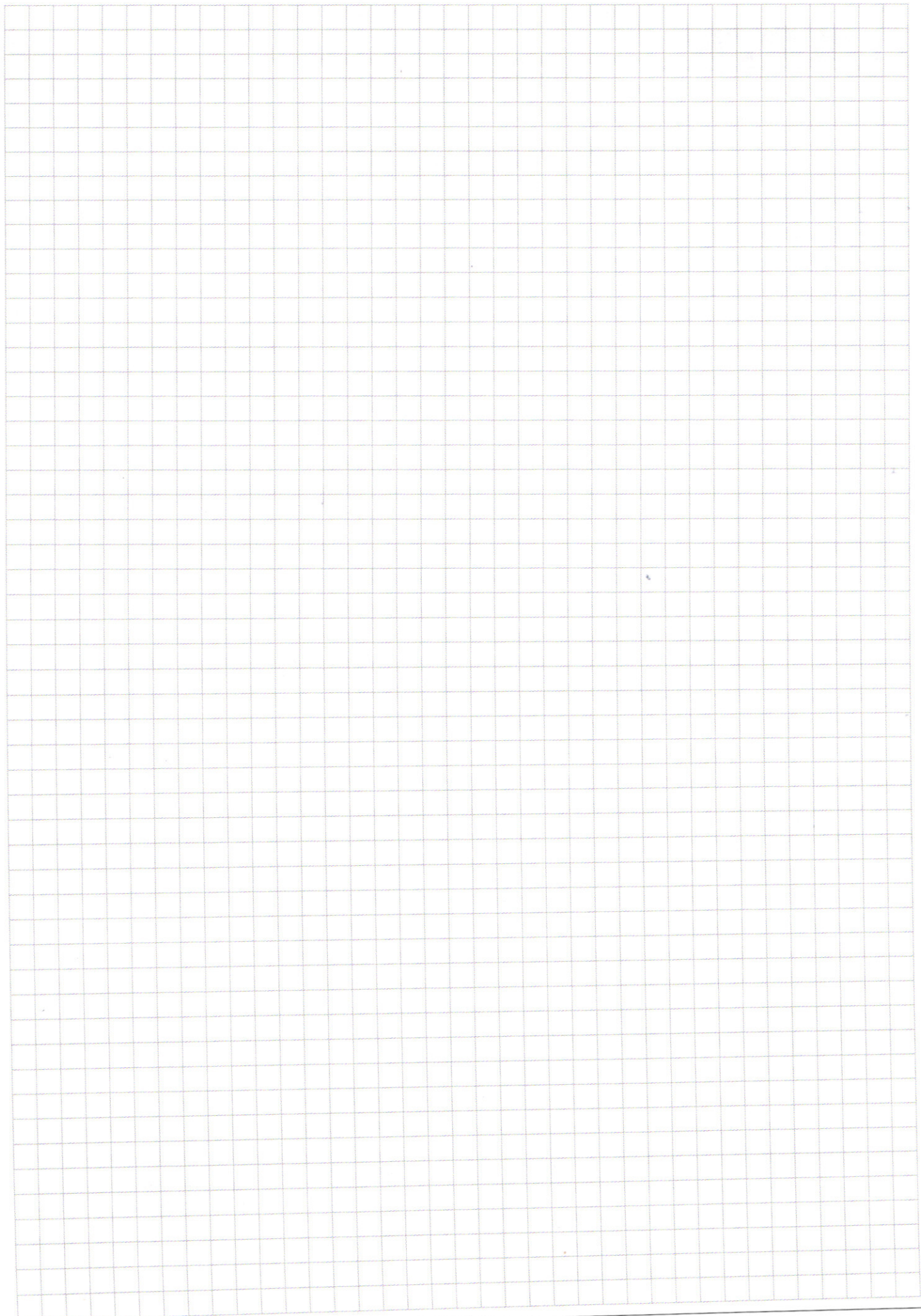
$2: 2^{-2\ln 2} = 2^{\ln \frac{2}{8}} = 2^{\ln \frac{1}{4}} = 2^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2\ln 2}$

$y = x^{-2\ln x}$

$y = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}} = e^{\ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}}$

удов. $\Rightarrow$ 2 г. корень

возраст $x = 2 \Rightarrow y = 2$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)