

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $9261 = 3^3 \cdot 7^2$

возможные цифры: 1) $\{3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1\}$

2) $\{3, 9, 7, 7, 7, 1, 1, 1\}$

1) Если бы цифры не повторялись, количество чисел считалось бы как количество перестановок $\rightarrow n!$

Повторение одной цифры p раз уменьши.

количество в $p!$ $\Rightarrow N_1 = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 560$

2) Аналогично $N_2 = \frac{8!}{3!3!} = 1120$

$N = N_1 + N_2 = 560 + 3 = 1680$

$\overbrace{\{1, 1, 3, 3, 3\}}^{p=2} \overbrace{\{7, 7, 7\}}^{q=3} \overbrace{\{1, 1\}}^{s=2}$

$\overbrace{\{3, 9, 7, 7, 7\}}^{p=3} \overbrace{\{1, 1, 1\}}^{q=3}$

$N = \frac{R!}{p!q! \dots}$

2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = \cos 9x + \cos(\pi - 5x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cos\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) =$
 $= -2 \sin 2x \cdot \sin 7x$

$\sin 9x + \sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \cos(2x) =$
 $= 2 \cos 2x \cdot \sin 7x$

$\sqrt{2} \cos 4x = 2 \sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) = 2 \sin 7x (\cos 2x + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)) =$
 $= 2 \sin 7x \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 4x = 2 \sin 7x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 4x = 2 \sin 7x \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\underline{3.} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{x}{y})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 0 \Rightarrow y > 0}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y+x-4)(y-2x) = 0$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = e^{-\ln(x^2 y^4) \cdot \ln x}$$

$$y^{\ln \frac{y}{x}} = e^{\ln^2 y - 7 \ln x \ln y}$$

$$e^a = e^b \quad \Bigg| \Rightarrow a = b$$

$$\ln^2 y - 7 \ln x \ln y = -2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$2 \ln x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln y \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)(2 \ln x - \ln y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0$$

$$\begin{cases} (y+x-4)(y-2x) = 0 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0 \end{cases}$$

$$1) y+x=4$$

$$\ln \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x=y=2, (2;2)$$

$$2) y+x=4$$

$$\ln \frac{x^2}{y} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$\cancel{D=17/4} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4}}{2} > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, y = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$3) y=2x$$

$$\ln \frac{x}{y} = 0$$

$$y \neq 0, x \neq 0 \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$4) y=2x$$

$$\ln \frac{x^2}{y} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x$$

$$(2;4)$$

$$\text{Ответ: пары } (x; y): (2;2), (2;4), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x \leq 5 \\ x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ |x| \leq 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \leq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+5-y+x-5=10 \\ x=5 \\ y \geq -10 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y \in [-10; 0) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y < -5 \\ y-x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y-5+y-x+5=10 \\ x=-5 \\ y < 0 \\ y \geq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y \in [-10; 0) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y < -5 \\ y-x < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-10 \\ x < 5 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=10 \\ |x| < 5 \end{cases}$$

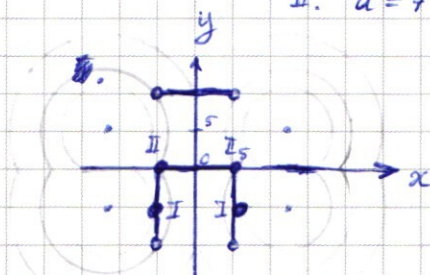
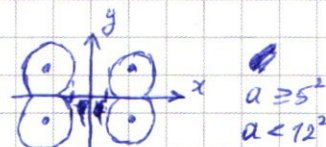
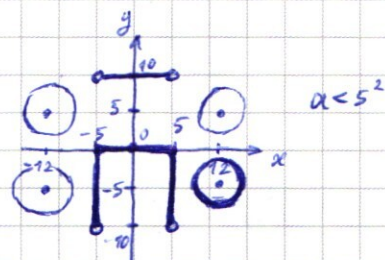
$a < 0 \Rightarrow$ нет реш.

I. $a = 49 \rightarrow$ нижние окружн.
касаются отрезков из 2) и 3),
решения $(5; -5)$ и $(-5; -5)$

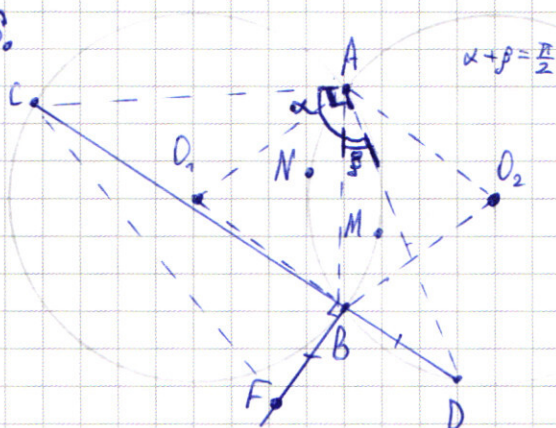
II. $a = 7^2 + 5^2 = 74 \rightarrow$ решения $(5; 0)$ и $(-5; 0)$

III. $a = 5^2 + 12^2 = 169$
 $\rightarrow$ корни $(0; 0)$ и $(0; 5)$

Ответ: $\begin{cases} a = 49 \\ a = 74 \\ a = 169 \end{cases}$



6.



CF=?

$$BF = BD$$

$$AC^2 + AB^2 = AD^2$$

~~Равные дуги ANB~~

$\Delta O_1 AB = \Delta O_2 AB$ по 3 сторонам

$\Rightarrow \angle A O_1 B = \angle A O_2 B \Rightarrow$ дуги AMB и ANB

равны $\Rightarrow$ углы ACB и ADB равны как вписанные, опирающ.

на равные дуги в окружн. равных радиусов $R = 10$.

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \angle ACB + \angle ADB \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle A O_1 B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2} R,$$

$AC = AD$
(по углам)

III. Пифагора:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2AC^2$$

III. косинусов:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \angle ADC$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle ACD$$

$$BD^2 - BC^2 = 2(BD - BC)AC \cos \angle ACD \neq 0$$

$$BC + BD = 2AC \cos \angle ACD$$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \alpha$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos \beta$$

$$CF^2 = CD^2 + AB^2 - 2AB(AC \cos \alpha + AD \cos \beta) = CD^2 + 2AB^2 - 2ABAC(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

III. синусов:

$$\frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$CF = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{4})} \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20$$

д) $BC = 12$, III. косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \frac{\pi}{4}, \quad AC^2 - 2AC \cdot \frac{12}{\sqrt{2}} - 56 = 0$$

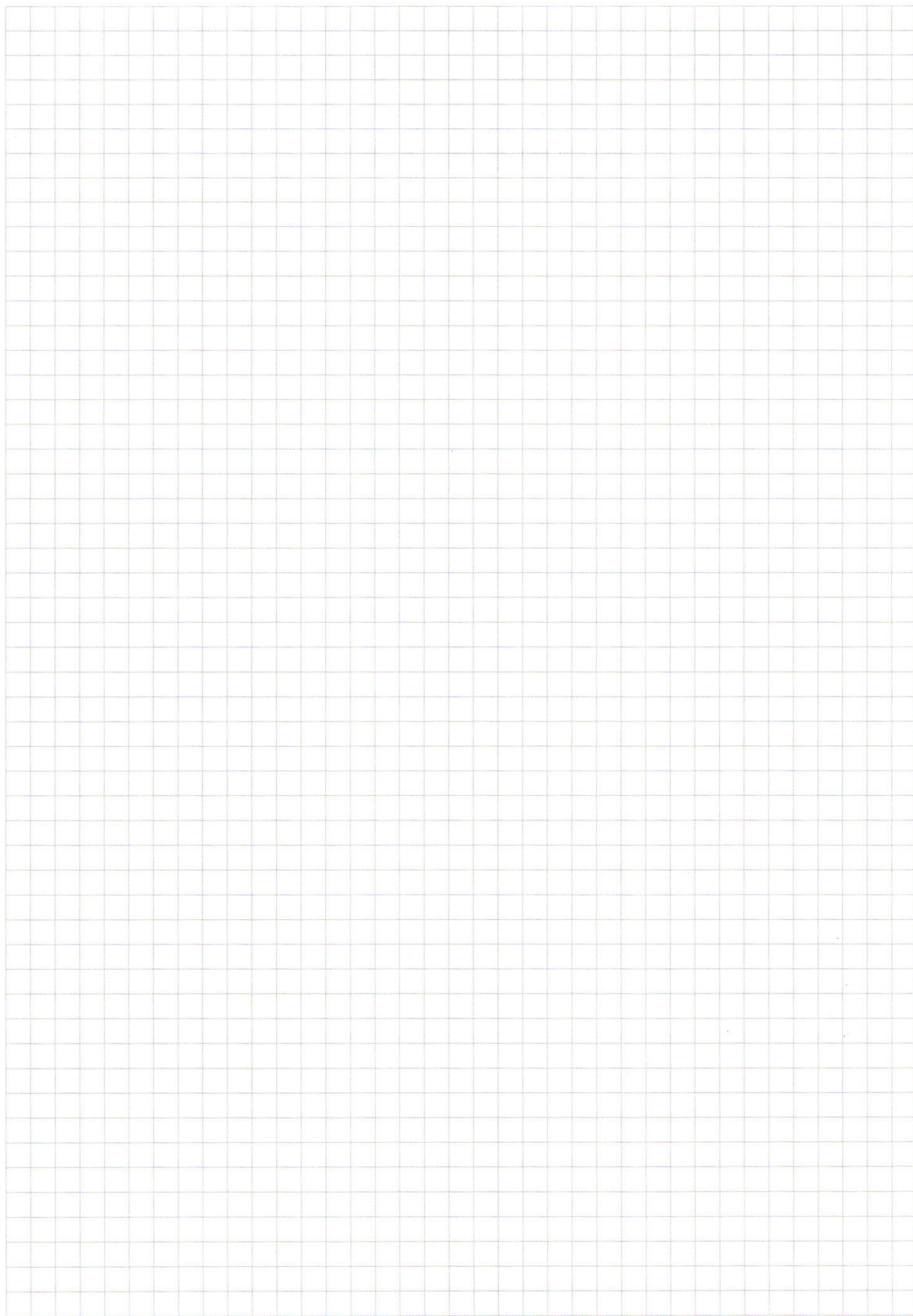
$$AC = \frac{12}{\sqrt{2}} + \sqrt{72 + 56} = \frac{28}{\sqrt{2}} \Rightarrow CD = 28$$

$$\tan \angle BCF = \frac{CD - BC}{BC} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \angle ACF = \sin(\frac{\pi}{4} + \angle BCF) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot 20 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 28 \cdot 7 = 196$$

Ответ:
 $CF = 20$
 $S_{\Delta ACF} = 196$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9 \ 2 \ 6 \ 9 \ 5 \\ 3 \overline{) 2695} \\ \underline{24} \\ 29 \\ \underline{27} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1234 \\ 1243 \\ 1324 \\ 1342 \\ 1423 \\ 1432 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1234 \\ 1243 \\ 1324 \\ 1342 \\ 1423 \\ 1432 \end{array}} \right\} \times 4$$

$$24 = 4!$$

$$9267 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$n = 3$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 2 \\ \downarrow m \\ 1 \ 2 \ 2 \\ \downarrow m \\ 1 \ 2 \ 2 \\ \downarrow m \\ 1 \ 2 \ 2 \end{array}$$

$$\frac{n!}{m!} = \frac{3!}{2!} = 2$$

$$\frac{3!}{2} = 3$$

$$1222 \rightarrow 4 \quad \frac{4!}{3!} = 4$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 2 \ 3 \\ \downarrow p \\ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \\ \downarrow q \\ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \end{array}$$

$$\frac{n!}{p!q!} = \frac{120}{2 \cdot 2} = 30$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ +5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ +4 \end{array}$$

$$1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

$$11! = 2^{1+2+3+4+5} \cdot k = 2^8$$

$$\frac{11!}{9!2!} = \frac{110}{2}$$

$$\frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2$$

$$560 \cdot 2 = 1120$$

$$560 \cdot 3 = 1500 + 980 = 1680$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = \frac{1}{4} (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}) (e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot (e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(-\varphi_1 - \varphi_2)}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2} = \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} + \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$$

$$\begin{array}{l} a = \varphi_1 + \varphi_2 \\ b = \varphi_1 - \varphi_2 \end{array} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{a+b}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$-\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi)$$

$$5 - (81) \leq 0 \leq x$$

$$\begin{array}{l} 9x + \pi - 5x = \pi + 4x \\ 9x - \pi + 5x = 14x - \pi \end{array}$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$7x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{5x - \frac{3}{4}\pi}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \sin 2x$$

$$e^{i4x} = (\cos 2x + i \sin 2x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x + 2i \cos 2x \sin 2x = \cos 4x + i \sin 4x$$

$$\cos a - \cos b = \cos a + \cos(\pi - b) = 2 \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \sin\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$\sin a + \cos b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos b = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 3x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a + \sin b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{9x+5x}{2}\right) \rightarrow \sin 7x$$

$$\cos\left(\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = 2 \cos\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) \cos 2x = \cos\left(9x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x-2y)(y+x+1)$$

$$(y+x+1)(y-2x)$$

$$8x-4y+90x-5y$$

$$y^2-2x^2+y-xy-2x$$

$$(y+x+1)(y-2x) + (y-2x)(-4) = (y+x-3)(y-2x) = y^2+xy-3y-2xy-2x^2-6x$$

$$(y+x-4)(y-2x) = y^2+xy-4y+8x-2x^2-2xy = y^2-xy-2x^2+8x-4y$$

$$(e^{\ln(x^2y^3)})^{\ln x} = \ln x^2 y^4 = x$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)^3$$

$$\ln \frac{y}{x^2} = y \ln y - 2x \ln x = e$$

$$2x^2 + y^2 - 3xy = 0$$

$$x(2x-3y) + y^2 = 0$$

$$2 \ln x - 2 \ln x \ln y = 2 \ln x \cdot \ln \left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$28 \cdot 7 = 30 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 210 - 14 = 196$$

$$28 = 7 \cdot 4 = 28$$

$$95 = 100 - 5 = 95$$



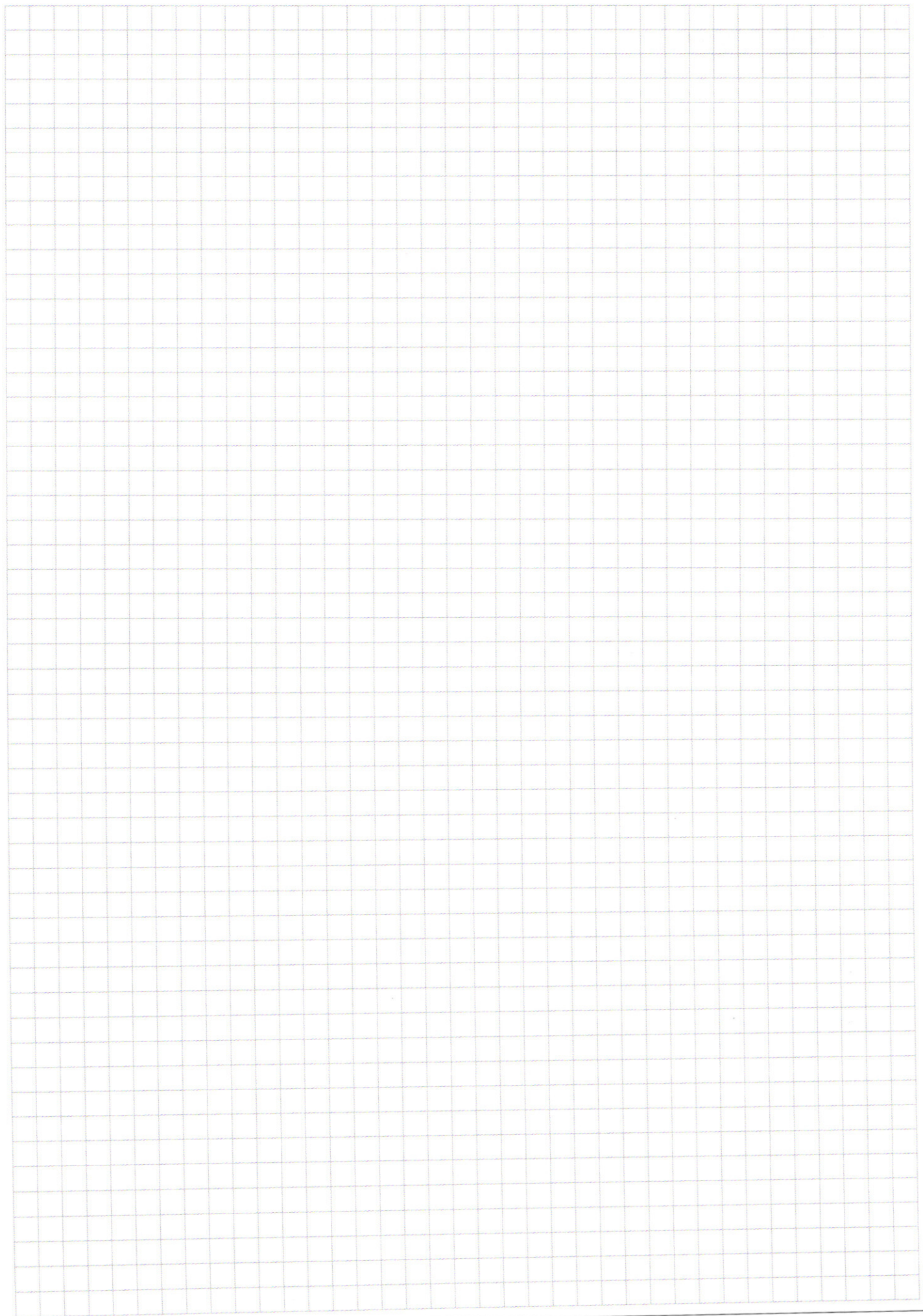
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)