

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

Следовательно рассмотрим случаи

1) число состоит из трех «3», трех «7» и четырех «1»

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{8!}{2 \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 560$$

2) число состоит из ^{одной} «3», одной «9», трех «7» и трех «1»

~~$$C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 \quad C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} =$$~~

~~$$= 1120$$~~

3) ~~Аналогично тому только вместо теперь рассмотрим~~
«одну «7», три «3», три «1» $\Rightarrow 1120$

4) Рассмотрим случаи «9», «3», «49», «7», «зетты» «1».

~~$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$~~

5) Используем только ~~«27», «343», «зетты» «1»~~

~~$$C_8^1 \cdot C_7^1 = 8 \cdot 7 = 56$$~~

6) "27", три "7", четыре "1"

$$8 \cdot C_7^3 = 8 \cdot \frac{7!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 56 \cdot 5 = 280$$

7) "343",

Получаем $1120 + 560 = 1680$. Больше цифр нет, т.к. цифра не может быть больше 9, а остальные произведения дают $7 \cdot 3 = 21$; $7 \cdot 7 = 49$; $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
 Ответ: 1680

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$-2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

Получаем 2 случая:

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x - 2 \sin 7x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \sin 7x = 0$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \sin 7x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 5x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x + 7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

Продолжение на следующей странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 5x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} - 5x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = 2\pi k$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi t$$

$$-5x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi t$$

$$x = \frac{5\pi}{4} - 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi t$$

Получили $\frac{5\pi}{4} - 10\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi t, t \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{5\pi}{4} - 10\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

№3

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$$

$$y^4 - xy - 2x^2 + 8x - 4y^2 = 0$$

Прологарифмируем первое выражение (потому что оно логарифмическое)

$$-\ln x \cdot \ln x^2 y^4 = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \ln y$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2 - \ln x \cdot \ln y^4 = \ln y \cdot \ln y - \ln y \cdot \ln x^2$$

$$(\ln^2 x + \ln^2 y - 2 \ln x \ln y) - \ln x \ln y + \ln^2 x = 0$$

$$(\ln x - \ln y)^2 + \ln x (\ln x - \ln y) = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(2 \ln x - \ln y) = 0$$

$$\text{Получаем } \ln x = \ln y \text{ или } \ln x^2 = \ln y$$

П.к. $\ln(x)$ монотонно возрастает, то можем приравнять аргументы.

$$1) x = y$$

Тогда подставим во 2 выражение

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

$$2) x^2 = y$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2 \text{ или } x^2 + x - 4 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 - 4(-4) = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Получаем $x \geq 0$ или $x \geq 2$ или $x \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

В 1 случае остается только

$$x = 2$$

Во 2 случае остается

$$x = 2 \text{ и } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ (т.к. } \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0)$$

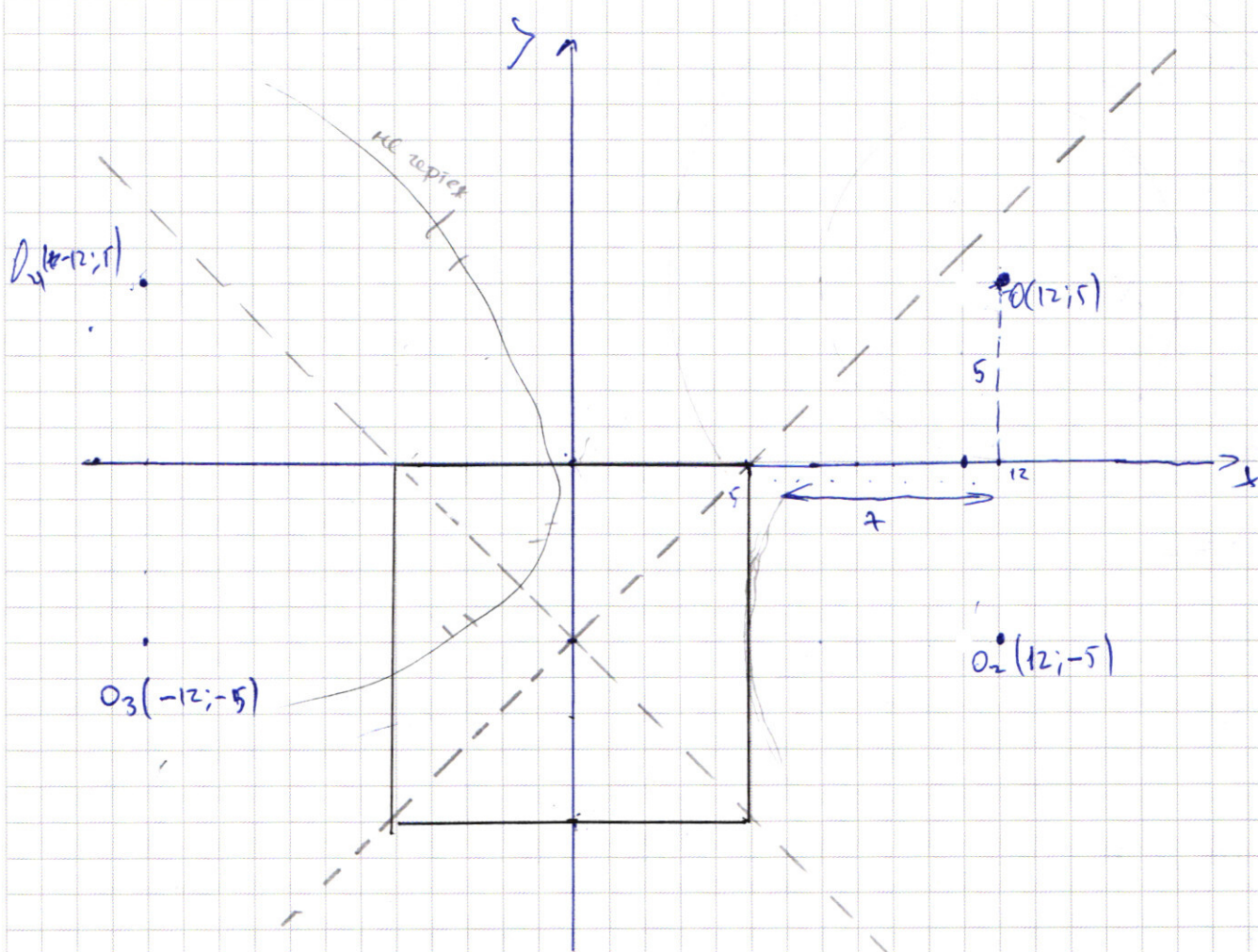
Получаем $(2; 2); (2; 4); \left(-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{18 - 2\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{18 - 2\sqrt{17}}{2}\right)$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

Т.к. 1 уравнение без параметра, то построим ~~его~~



Второе выражение даёт нам уравнение
четырёх окружностей с центрами в $O_1(12;5); O_2(12;-5);$
 $O_3(-12;-5); O_4(-12;5)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что когда линия окружности с центром O_3 касается квадрата, мы получаем, следовательно касание с другой стороны. А окружности с центрами O_1 и O_2 не касаются квадрата. Т.к. 2 окружности в этой ситуации равны 7 и расстояние от O до квадрата $= \sqrt{49+25} = 8$. То если мы продолжим увеличивать окружность то только линии окружности будут добавлять 2 точки.

Значит наш подход правильный, когда 2 линии касаются квадрата. Радиус тогда равен 7. $\Rightarrow a = 49$

~~Ответ: 49~~

Еще один случай будет тогда, когда $R = \sqrt{25+16} = 5$. Тогда окружности пересекаются в одной точке $(0;0)$ и две линии в точках $(0;4)$ и $(-4;0)$. Тогда мы тоже получим 2 решения. $R=5 \Rightarrow a=16$

Ответ: ~~49~~ $a=49$; $a=16$

a) $\text{Rechte } \angle ACB = \alpha$; $\angle ADB = \beta$, $\alpha < \beta$
 $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$; $\frac{AB}{\sin \beta} = 2R$.

Т.к. мы знаем, что радиусы этих окружностей равны, получаем: $\frac{1}{\sin 2} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow 2 = B$

Значит $\triangle ACD$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC =$
 $= \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Tolaga $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10\sqrt{2}$

$\angle ACB = \angle ABC = x$, $\angle ADB = 130^\circ$; t

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AC}{\sin \gamma} = \frac{AD}{\sin \alpha} \quad (\text{по теореме синусов; радиусы кривой})$$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha \Rightarrow \gamma + \alpha = 180 \Rightarrow \gamma = 180$$

$$\gamma = 90^\circ$$

Получили AB — высота $B \perp CD$, но так.

$\triangle ACD$ — равнобедренный, то AC — биссектриса
и медиана.

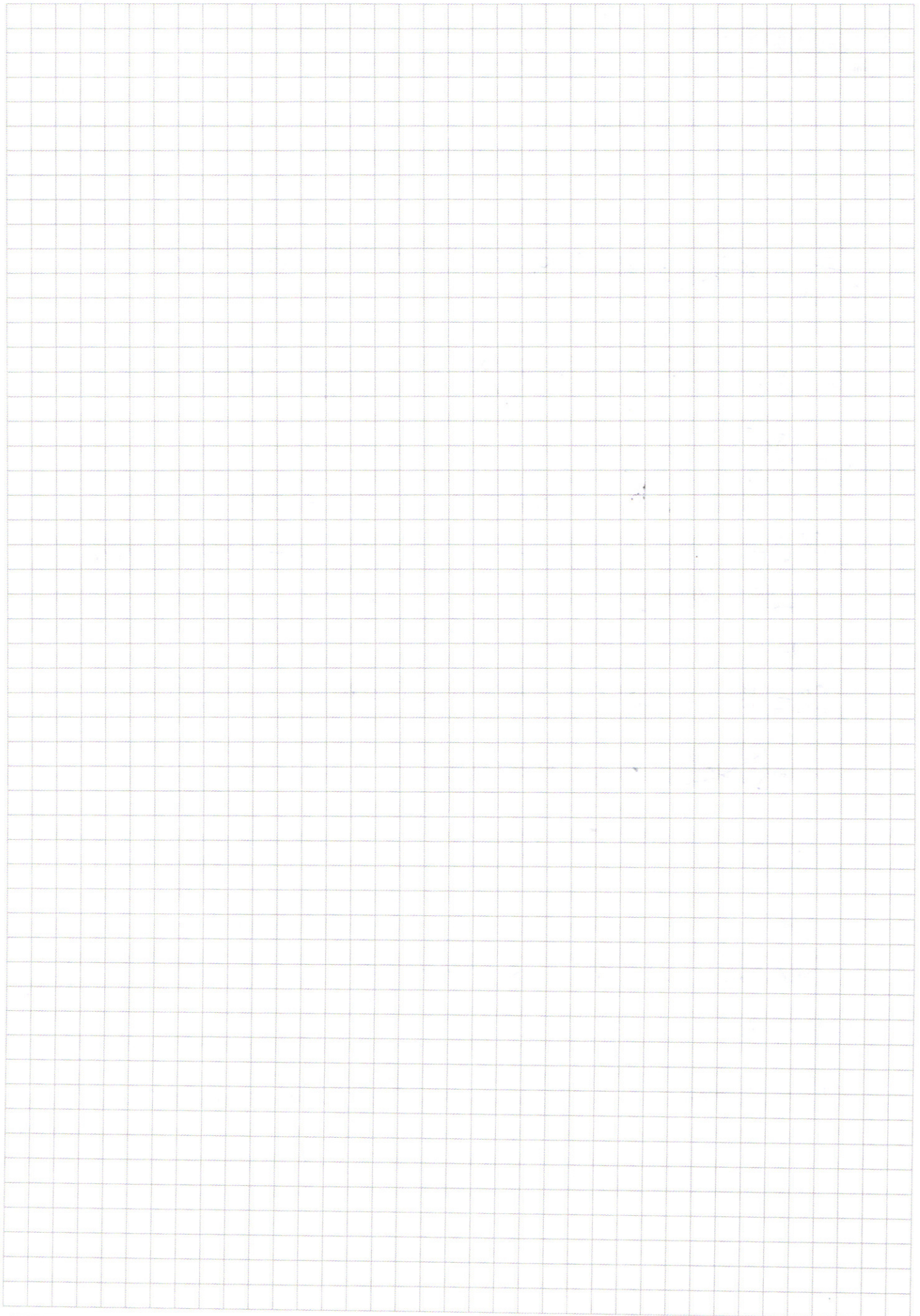
$$\angle C = \angle B, \quad B \perp CD : AB = 10 \sqrt{2} \quad \angle ADB = 45^\circ$$

$$AB \cdot \sin \alpha = AD \cdot \cos \angle D = \frac{AB}{AD} = \sin 45^\circ$$

$$\frac{2 \cdot 10 \sqrt{2}}{2} = AD \quad AD = 20, \text{ но такое не может быть.}$$

Этот случай с внешним касанием не подходит.

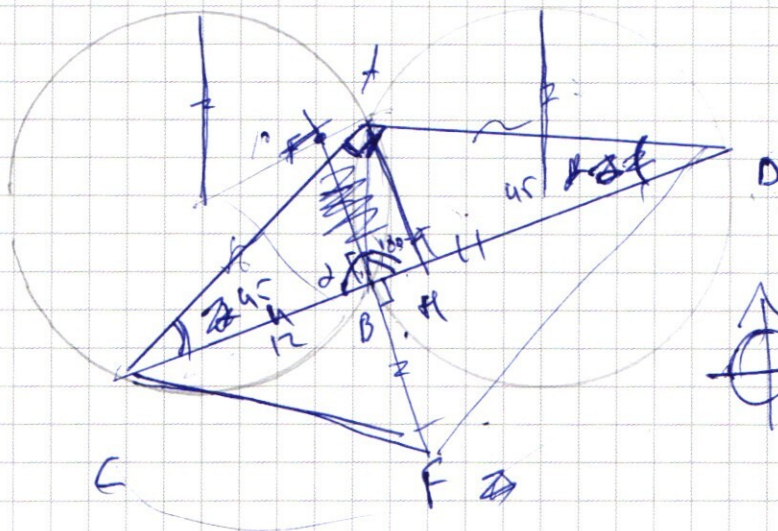
Рассмотрим случай с внутренним касанием.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

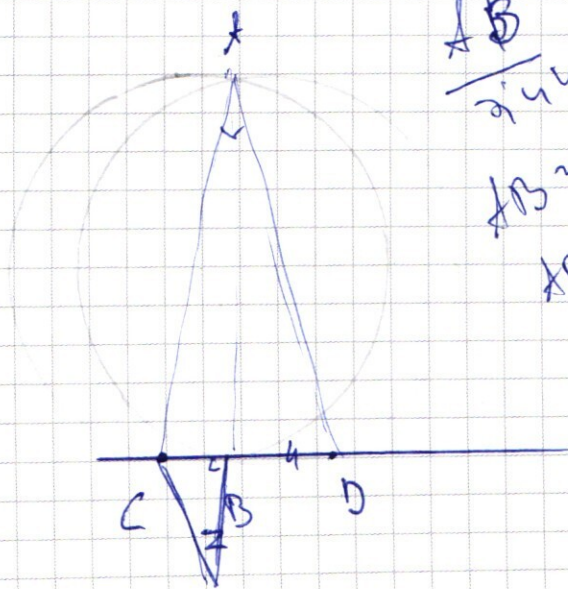
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AC}{\sin \gamma} = \frac{AD}{\sin(120^\circ - \gamma)}$$



$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$



$\frac{AB}{2445} \sim 28$
 $AB \sim 20 \frac{5}{2}$
 $AB \sim 1052$

$$\frac{13}{3142} \approx 28$$

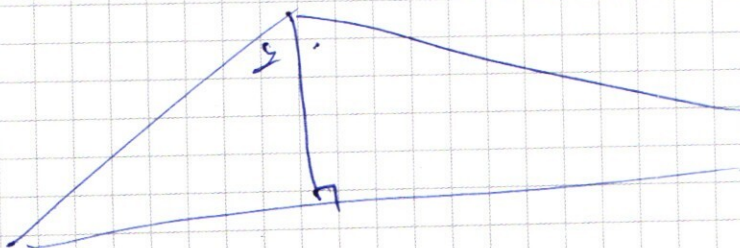
$$\frac{AB}{\sin B} = 2R$$

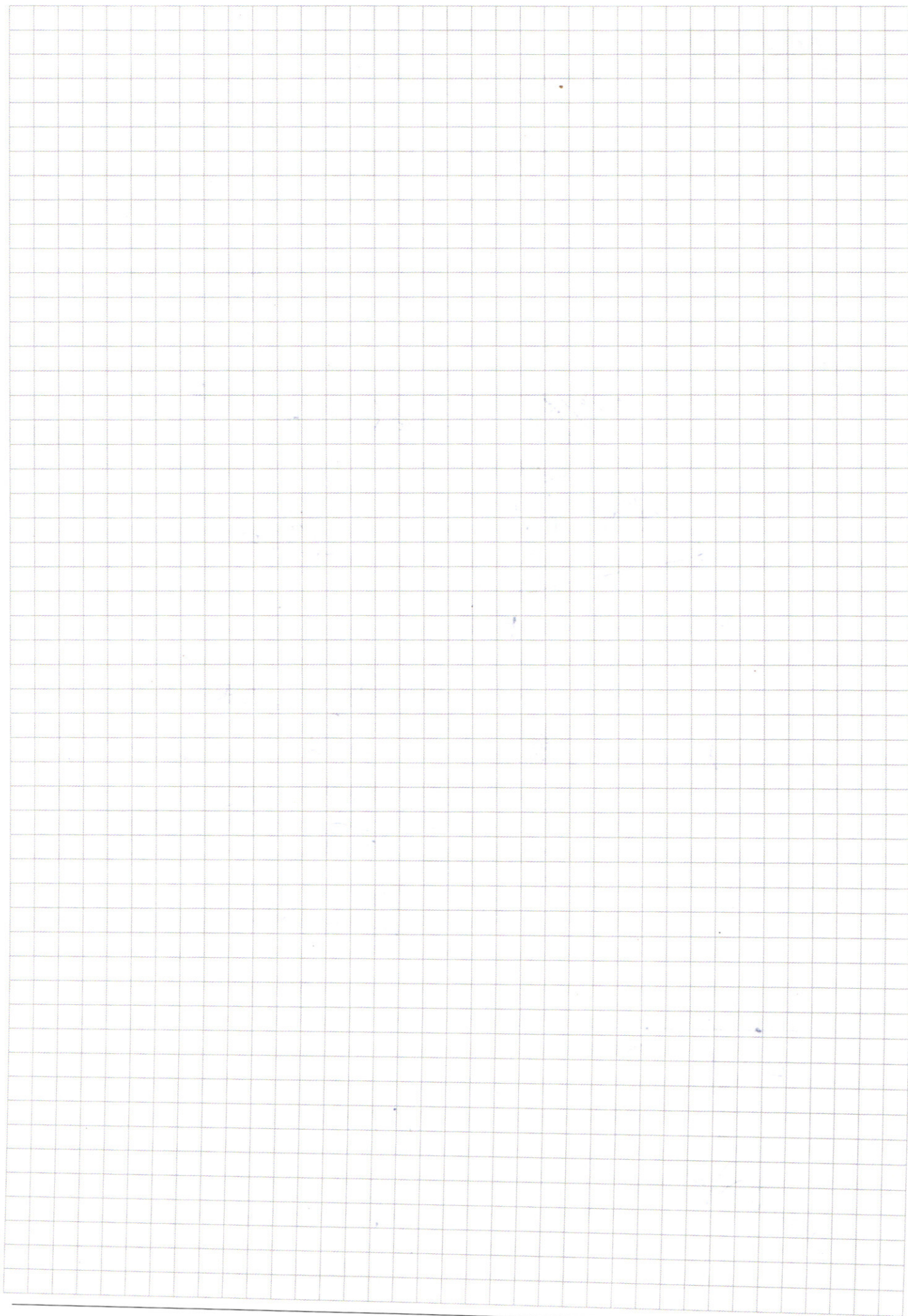
2. $\sin 22^\circ \sin 48^\circ$

JCB

$$\frac{AH}{AD} = \frac{\sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 уравн

$$1) \sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos 2x - 2 \sin 7x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - 2 \sin 7x = 0$$

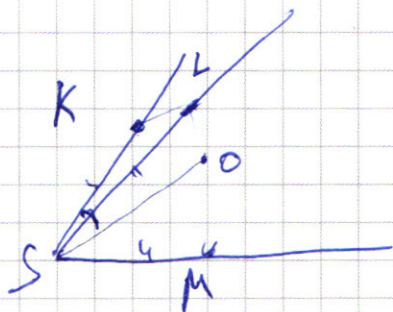
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin 7x = 0$$

$$2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2} \cos \frac{2x + \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2} = 0 \\ \cos \frac{2x + \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 2^2 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$

$\text{Kor}(x, y) \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ \hline 6 & 38 \\ \hline 16 & 2 \\ & 18 \\ & 19 \end{array}$$

$$y < 2^2 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\begin{cases} \log_2 y \geq x + \log_2 3 + 34 \\ \log_2 y < 2 + \log_2 18 + \log_2 2^x - \log_2 2x \end{cases}$$

$$2^x (1 + 3 \cdot 2^{34})$$

$$\underline{P_n = n!}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

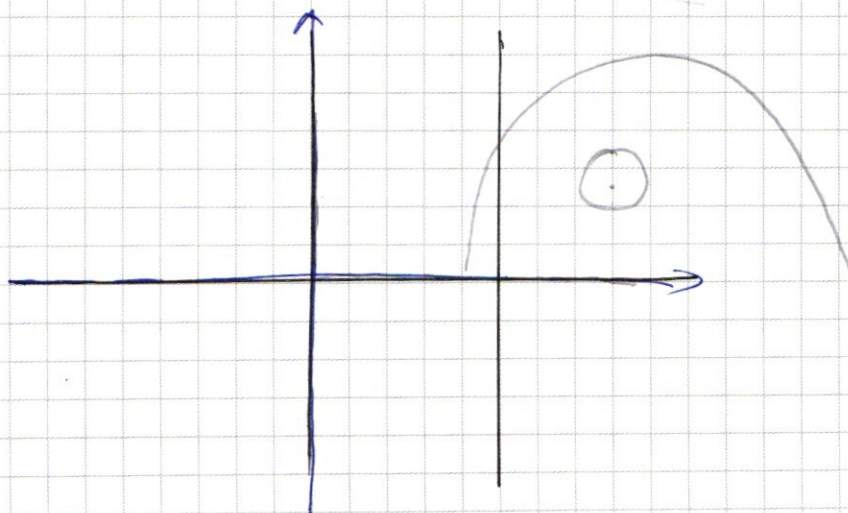
2 случая.
 $2 \ln x = \ln y$

$$x^2 = y$$

$$\begin{cases} (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \\ |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \end{cases}$$

$a = ?$ 2 рин.

1) $2y = 0$
 $y = 0$
 $2x = 10 \quad -2y = 0$
 $x = 5$



$$x^3 + x^2 - 4x - 2x^2 - 2x + 8$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8$$

$\ln x$ $x > 0$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

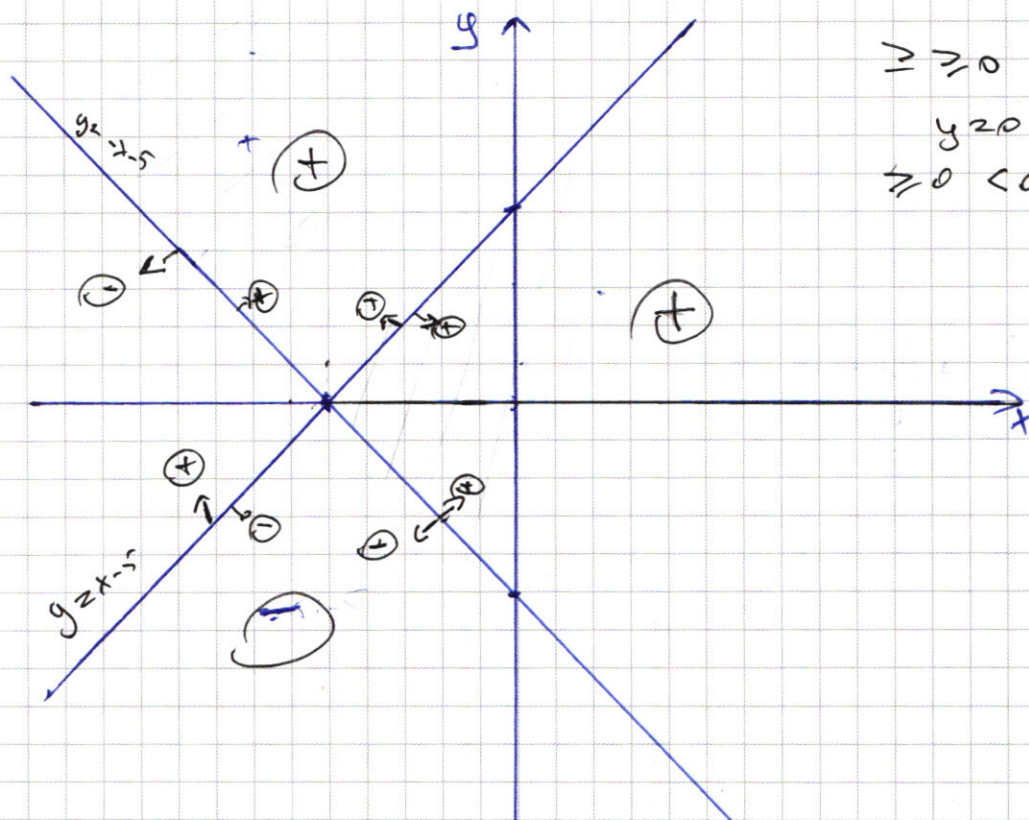
$$\begin{aligned} x+y+5 &\geq 0 \\ x+y+5 &< 0 \end{aligned}$$

$$y \geq -x-5$$

$$y-x+5 \geq 0$$

$$y-x+5 < 0$$

$$y \geq x-5$$



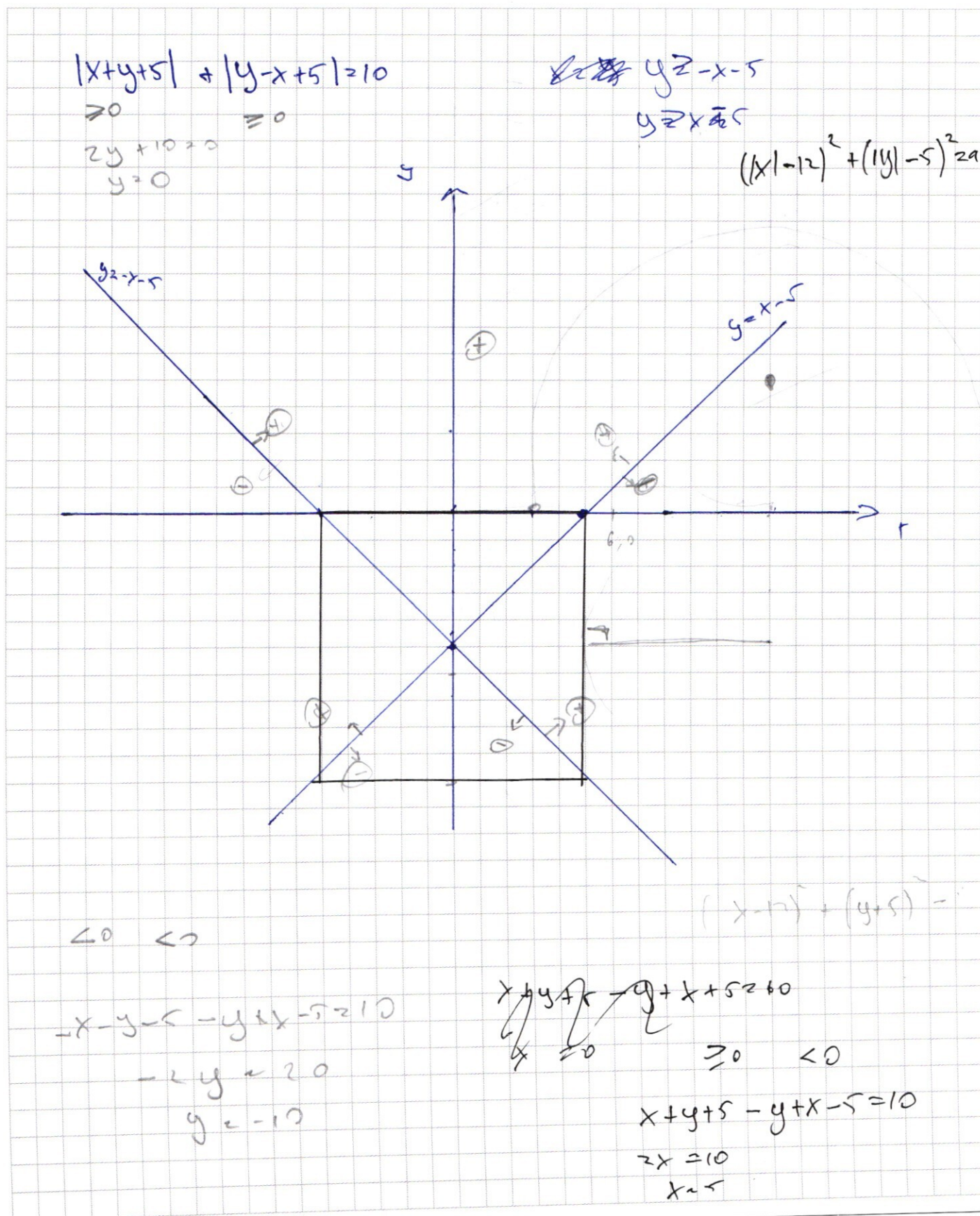
$$y \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y < 0$$

$$-2\sqrt{17}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$8 - 4 - 12 + 8$$

$$16 - 16$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ \hline & x^2 - 6x \\ & \underline{x^2 - 2x} \\ & -4x + 8 \\ & \underline{-4x + 8} \\ & 16 \end{array}$$

$$\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} > \sqrt{144}$$

$$\sqrt{169} = 13$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1, a_2, \dots, a_8$

$a_1, a_2, \dots, a_8 = 9261$

$9261 : 3$

$3087 : 3$

$1029 : 3$

$343 : 7$

$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$2 \cos 2x \cos 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$

$-2 \sin 7x (\sin 4x - \cos 4x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\sqrt{2} (\sin^2 2x - \cos^2 2x) - 2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$\sqrt{2} (\sin 4x - \cos 4x) (\sin 2x + \cos 2x) - 2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$(\sin 2x - \cos 2x) (\sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos 2x - 2 \sin 7x) = 0$

Handwritten calculations and notes on the right side of the page include:

- $56 \cdot 1680 = 94080$
- $8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 56 = 1120$
- $10 \cdot 562500$
- $5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2$
- $10 \cdot 562500$
- 1120

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$-(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) - x^2 - xy + 12 = 0$$

$$(y^2 - 2)^2 - (x - 4)^2 - x^2 - xy + 12 = 0$$

$$(y - 2 - x + 4)(y - 2 + x - 4) - x^2 - xy + 12 = 0$$

$$(y - x + 2)(y + x - 6) -$$

$$-\ln x \log x^2 y^4 = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \log y$$

$$-\ln x \log x^2 - \ln x \log y^4 = \ln y \log y - \ln x^2 \log y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \log y = \ln y^2 - 2 \ln x \ln y$$

$$-2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln y - \ln^2 y = 0$$

$$-\ln x \ln x^2 y^4 = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \ln y$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2 - \ln x \ln y^4 = \ln y \ln y - \ln y \ln x^2$$

$$-2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln y - \ln^2 y = 0$$

$$\ln^2 x + \ln^2 y - 2 \ln x \ln y - \ln x \ln y + \ln^2 x = 0$$

$$(\ln x - \ln y)^2 + \ln x (-\ln y + \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y + \ln x) = 0$$

2 случая:
1) $\ln x < \ln y \Rightarrow x < y$