

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Знаем, чтобы произведение ~~восьми~~ цифр восьмизначного числа было равно 9261, то оно должно состоять из трех 3, трех 4 и одной 1.

На первом месте могут стоять 3, 4 или 1.

Рассмотрим эти случаи.

1) $3 * * * * *$ - 3 на первом месте.

В 4 оставшихся звездочках мы можем разместить цифры 4 равно $\frac{4!}{3! \cdot 1!}$, т.к. 3 цифры 4

в 4 оставшихся места можно разместить $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ способами цифры 3.

В 2 оставшихся места расположим единицы (1 способ)

$$\text{Всего } \frac{4! \cdot 4! \cdot 1}{3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}{4} = 420$$

2) $4 * * * * *$

Рассуждения аналогичны пункту 1), где $3 * * * * *$.
Тогда 420 способов.

3) $1 * * * * *$

В 4 мест ставим три цифры 3: $\frac{4!}{3! \cdot 1!}$ способов

В 4 места ставим три цифры 4: $\frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ способов

В 1 место ставим одну цифру 1: 1 способ.

$$\text{Всего } \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 4 = 140$$

$$\text{Итого } 420 + 420 + 140 = 980 \text{ способов}$$

Ответ: 980 чисел

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x \quad | : \sqrt{2}$$

$$2 \sin 4x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right)$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin 4x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin 4x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos \left(\frac{4x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{4x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi r; r \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi r; r \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4 \cdot 3} + \frac{2\pi k}{9}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi r}{5}; r \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$$

Очевидно, что ни один из корней не содержится в себе другие.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}; k \in \mathbb{Z}$$

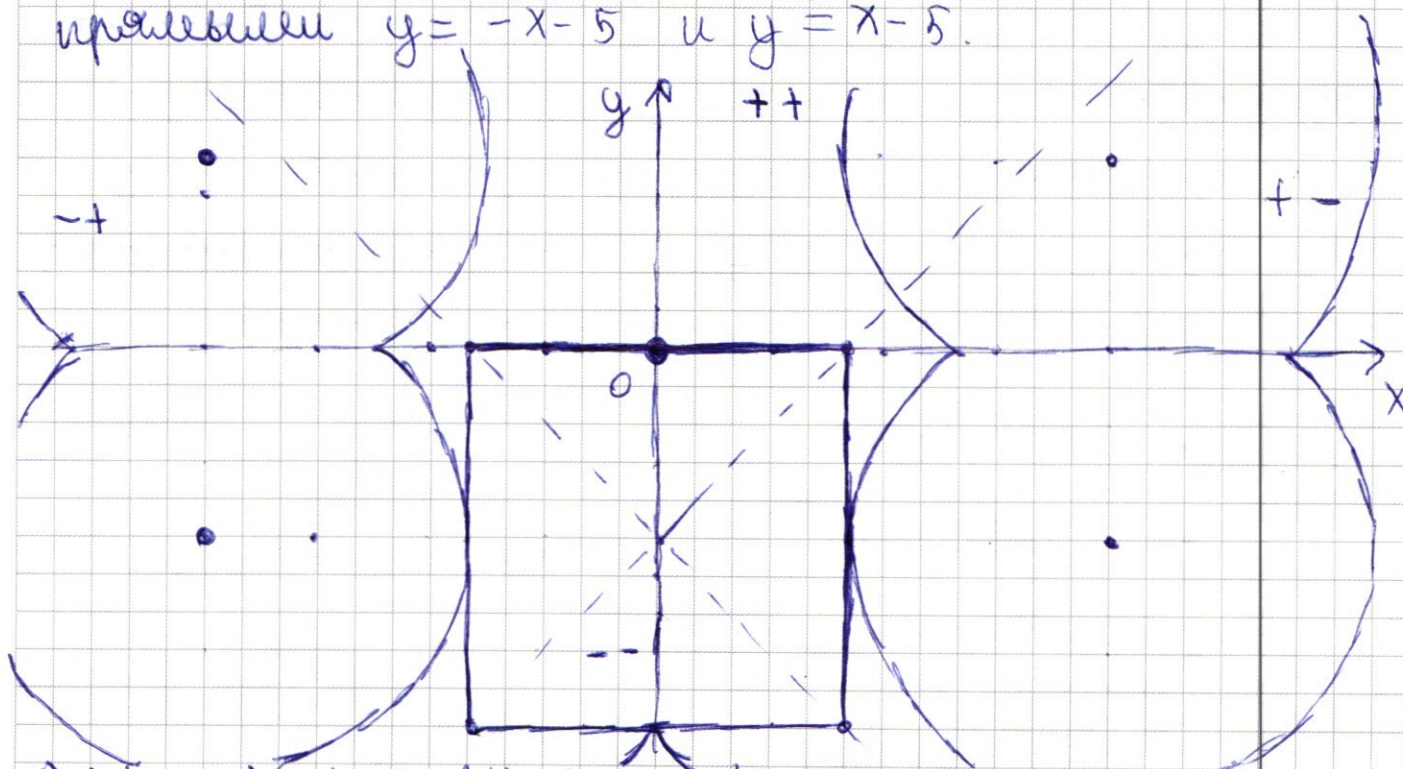
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi r}{5}; r \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. \end{cases}$$

Построим график 1 уравнения.

Подумав дает координатность на 4 части
прямыми $y = -x - 5$ и $y = x - 5$.



- 1) + + $x+y+5 + y-x+5 = 10 \Rightarrow y = 0$
- 2) + - $x+y+5 - y+x-5 = 10 \Rightarrow x = 5$
- 3) - + $-x-y-5 + y-x+5 = 10 \Rightarrow x = -5$
- 4) - - $-x-y-5 - y+x-5 = 10 \Rightarrow y = -10$

График квадрата.

График второго уравнения - 4 окружности
с центрами в $(12; 5)$; $(-12; 5)$; $(12; -5)$; $(-12; -5)$, не выходя
за пределы своей четверти.

~~Решение~~ $\sqrt{a} = R, a \geq 0$. Окружности увеличиваются
 при возрастании a .
 Первые решения: касание квадрата окружностями.

$$R = 4; \boxed{a = 49}$$

Далее будет по 4 решения до того момента,
 как все 4 окружности не пересекутся в Т. (0;0).
 В этой точке опять 2 решения.

$$R = \sqrt{144 + 25} = 13, \boxed{a = 169}$$

~~Далее 4 решения, которые заканчиваются
 при пересечении двух внешних окружностей~~

После этого момента решений не будет
 вообще при $a \in (169; +\infty)$, т.к. окружности
 бесконечно увеличиваются, не пересекая квадрат.

Ответ: $\{49\} \cup \{169\}$.

~~$$x^2 - 4y - \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x}\right) \quad (1) \quad x > 0; y > 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad x^{-2 \ln x} \cdot y^{4 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^4}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{-2 \ln y}$$

$$x^{\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{\ln x} = y^{\ln y} \Rightarrow x = y$$

$$(2) \quad y^2 + xy - 4y - 2x^2 - 2xy + 8x = 0$$

$$y(y + x - 4) - 2x(x + y - 4) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$y = 2x \quad y = 4 - x$$~~

~~$x = y$, кроме случая $\ln x = 0; \ln y = 0$
 $\ln x = \ln y \Rightarrow x = y$~~

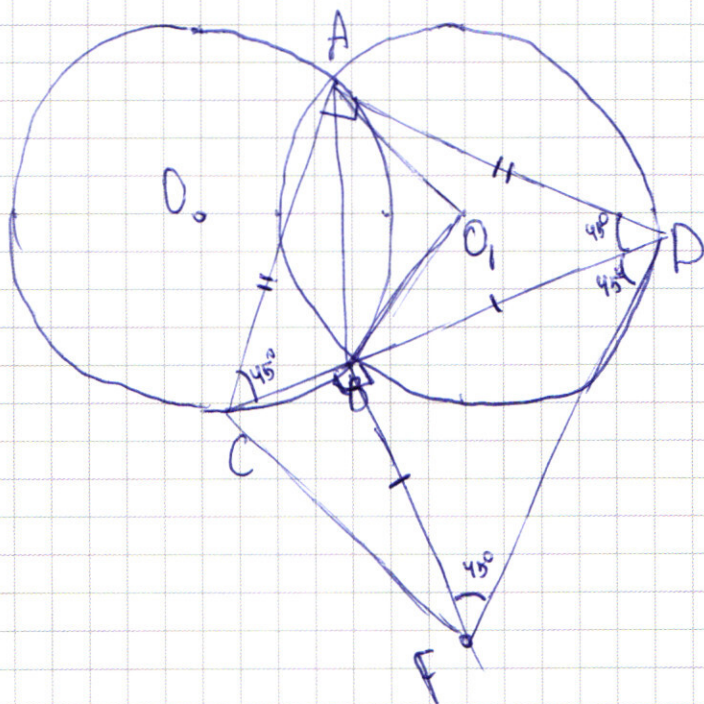
~~Построили график~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

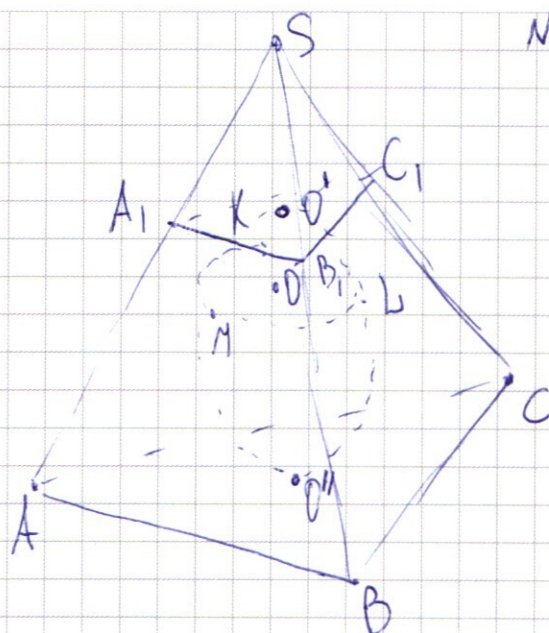
$$(1) \begin{aligned} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} &= y^{\ln y - 4\ln x} \\ x^{-2\ln x} &= y^{\ln y - 3\ln x} \end{aligned}$$
$$(2) \begin{aligned} y^2 + xy - 4y - 2x^2 - 2xy + 8x &= 0 \\ y(y+x-4) - 2x(y+x-4) &= 0 \\ (y-2x)(y+x-4) &= 0 \\ y=2x \quad y=4-x \end{aligned}$$

№6.



Решение: $BF = BD \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
 $\angle ADB = \angle ACB = \frac{90^\circ}{2}$, т.к. опираются на равные дуги
 $\odot O_1, AB : O_1A = O_1B = R = 10$.
 $AB = 10\sqrt{2}$ по т. Пифагора

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



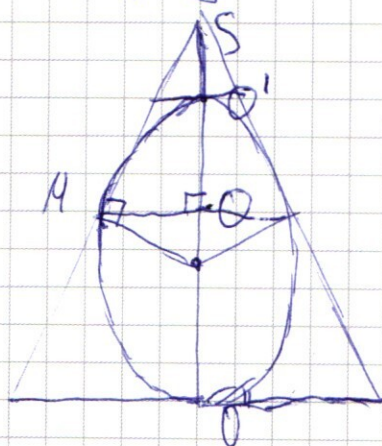
М.р. В этом тетраэдре
 $SO \perp (A, B, C); SO \perp (KLM)$
 $SO \perp (ABC)$
 $S_{ABC} = 16$
 $S_{A, B, C_1} = 1$
 $(ABC) \parallel (A, B, C_1) \parallel (KLM)$

$A, B, \parallel AB \Rightarrow \triangle ASB, \angle ASB$

Аналогично $\triangle B, SC_1 \sim \triangle BSC, \triangle C, SA, \angle CSA \Rightarrow \triangle A, B, C_1 \sim \triangle ABC$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A, B, C_1}} = k^2 \Rightarrow k = 4$$

Нарисуем сечение плоскостью (SOM) , где O — центр основания ABC , O' — центр основания KLM . Тогда $SO' \perp AB$, $SO'' \perp AB$, где O'' — проекция O' на AB . Тогда $SO' = 4 \cdot SO''$.



$$\frac{SO'}{SO''} = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 46 + 2(2^{32} - 1)x. \end{cases}$$

$$y < 46 + 2^{33}x - 2x.$$

$$y > 3 \cdot 2^{34}$$

$$3 \cdot 2^{34} < 46 + 2^{33}x - 2x.$$

$$x(2^{33} - 2) + 46 > 3 \cdot 2^{34}$$

$$x > \frac{3 \cdot 2^{34} - 46}{2^{33} - 2}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 343 \\ \lambda \quad 24 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$333 \quad 444.$$

$$33 \quad 44400.$$

$$3 \dots \dots \dots$$

$$4 \dots \dots \dots$$

$$C_3^4 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 420$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \\ 3084 \\ 1029 \\ 3431 \end{array}$$

$$43 \cdot 3^3$$

$$49$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 1343} \\ \underline{81} \\ 116 \\ \underline{108} \\ 81 \end{array}$$

$$\sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}$$

$$\sin 9x - \sin 5x = 2 \cos 4x \cdot \sin 2x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x$$

$$\cos(4x + 2x) = \cos 4x \cdot \cos 2x + \sin 4x \cdot \sin 2x$$

$$\cos(6x + 2x) = \cos 4x \cdot \cos 2x - \sin 4x \cdot \sin 2x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 4x \cdot \sin 2x$$

$$\sin(4x + 2x) = \sin 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x \cdot \sin 2x$$

$$\sin(4x - 2x) = \sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos 2x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 4x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 4x \left(\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right)$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) (2 \sin 4x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)) = 0$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \sin(4x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

13.

$$\left\{ \begin{aligned} (x^2 y^4) - \ln x &= y \ln \left(\frac{y}{x} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y \ln y - \ln x x^4$$

$$y^2 + xy - 2x^2 - 2xy + 3x - 4y$$

$$y(y+x) - 2x(y+x) - 4(y-2x) = 0.$$

$$y^2 + xy - 4y - 2x^2 - 2xy + 3x = 0.$$

$$y(y+x-4) - 2x(x+y-4) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$y = 2x$$

$$y = 4 - x.$$

$$y > x - 5.$$

8

8.

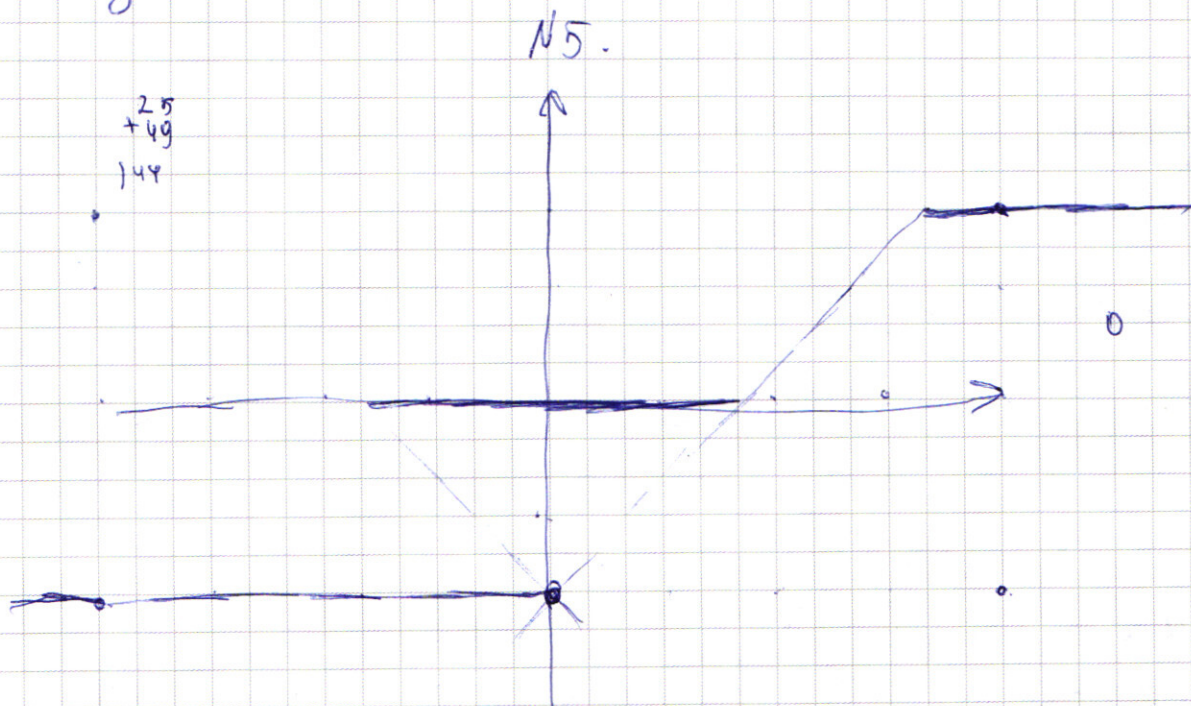
$$y > -x - 5.$$

$$y + 5 > x > 0.$$

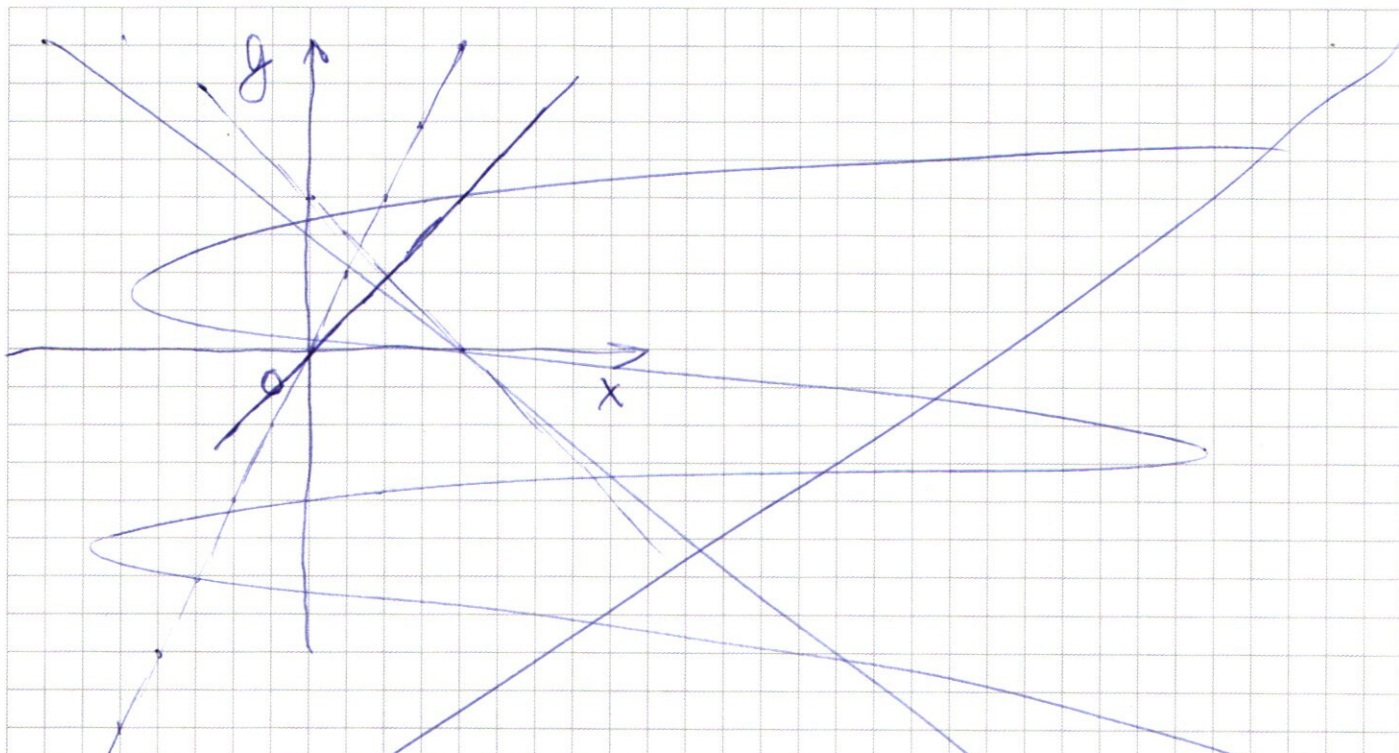
$$y < x - 5.$$

$$\begin{aligned} x+y+5 > 0. \quad y-x+5 > 0 \\ y > -x-5. \quad y > x-5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)+5 &= |x+y| \\ f(x) &\geq |x+0| \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



при $x > 0 ; y > 0$

1 пересечение $(2; 2)$

Ответ: $(2; 2)$.

$$\begin{cases} x^{\ln x} = y^{\ln y} \\ y = 2x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^{\ln x} = y^{\ln y} \\ y = 4-x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) x^{\ln x} = (2x)^{\ln(2x)} \quad (2) x^{\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln x} = 2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x}$$

$$x^{\ln x} = 2^{\ln 2 \cdot \ln x} \cdot x^{\ln 2 \cdot \ln x}$$

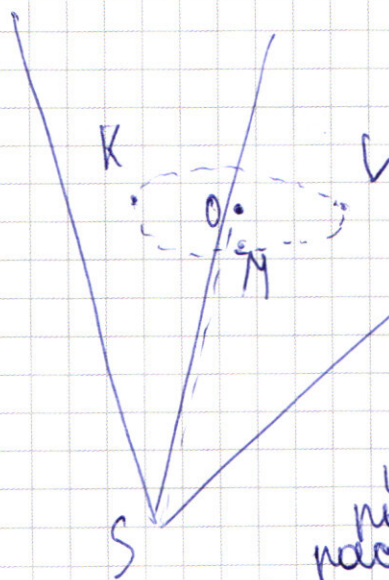
$$x^{\ln x} (1 - 2^{\ln 2} \cdot x^{2 \ln 2}) = 0$$

$$x^{\ln x} \neq 0 \quad x^{2 \ln 2} = 2^{-\ln 2}$$

$$(x^2)^{\ln 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln 2}$$

$$x = \pm \sqrt[2]{\frac{1}{2}}$$

№4.



~~1) Все плоскости (KOS), (LOS), (MOS) ~~еще~~ соответ-
ственны: $OK = OL = OM = R$.~~

1) Из T.S можно провести бесконечно много плоскостей, касательных к сфере, и точки касания будут образовывать сечение сферы в форме окружности, причем расстояния от S до точек касания равны.

$$KS = SM = SL, \quad OK = OM = OL = R, \quad OS - \text{общая.}$$

$\triangle SOK = \triangle SOM = \triangle SOL$ по трем сторонам.

$$\angle KOS = \angle MOS = \angle LOS \Rightarrow OS \perp (KML) \text{ и } \angle KOS = \angle LOS = \angle MOS = 90^\circ.$$

Перейдем к пирамиде:



черновик



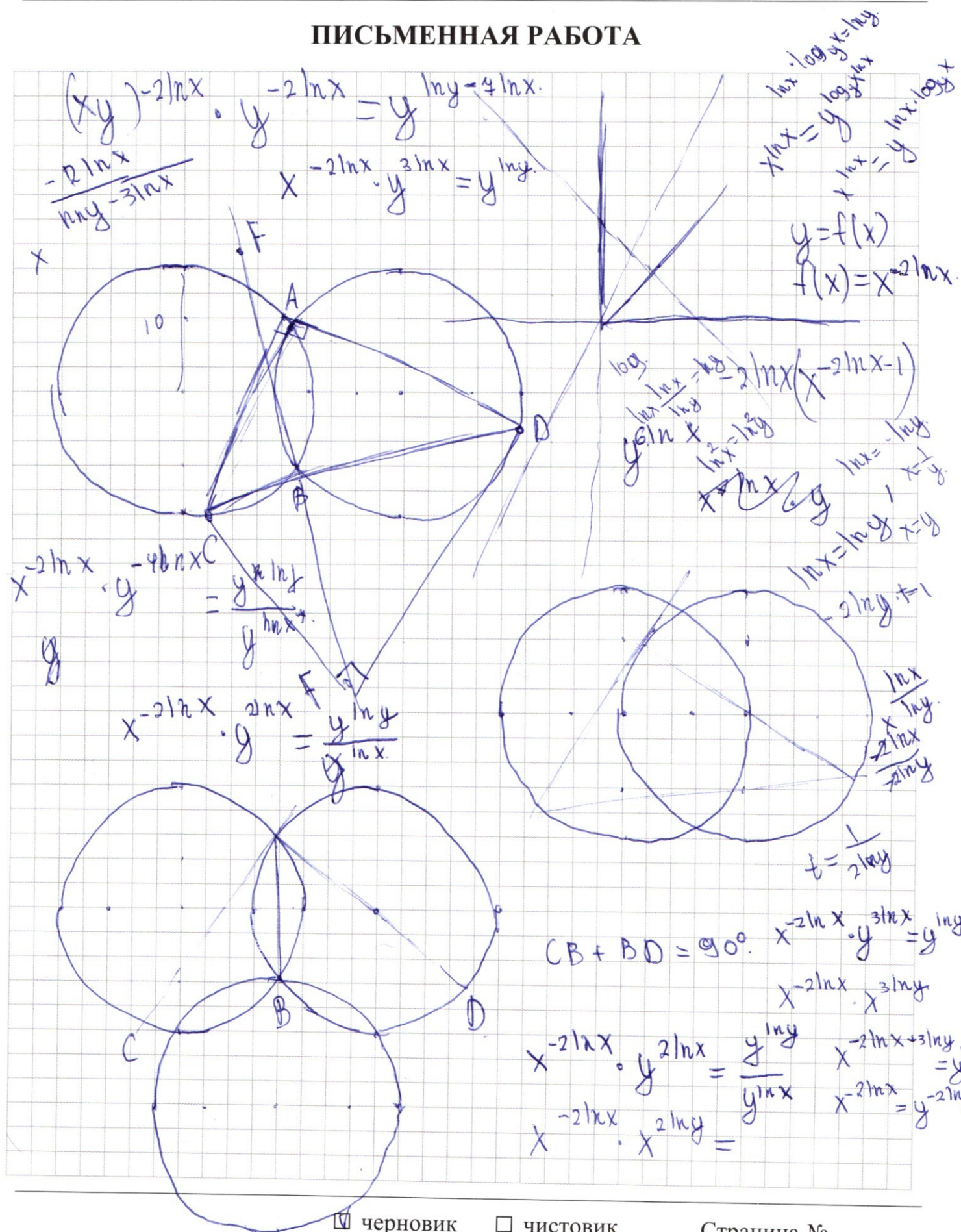
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^{-\ln 2^{-\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\ln 2^4}$$

$$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right)_{2 \ln 2} - \ln \frac{1}{4}$$

$$AB^2 = x^2 + (x-y)^2 - 2$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\ln \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}}$$

2nd

$$\frac{4}{2}$$

$$(2^{-1}) \ln \left(\frac{2^{-1}}{2^{-14}} \right)$$

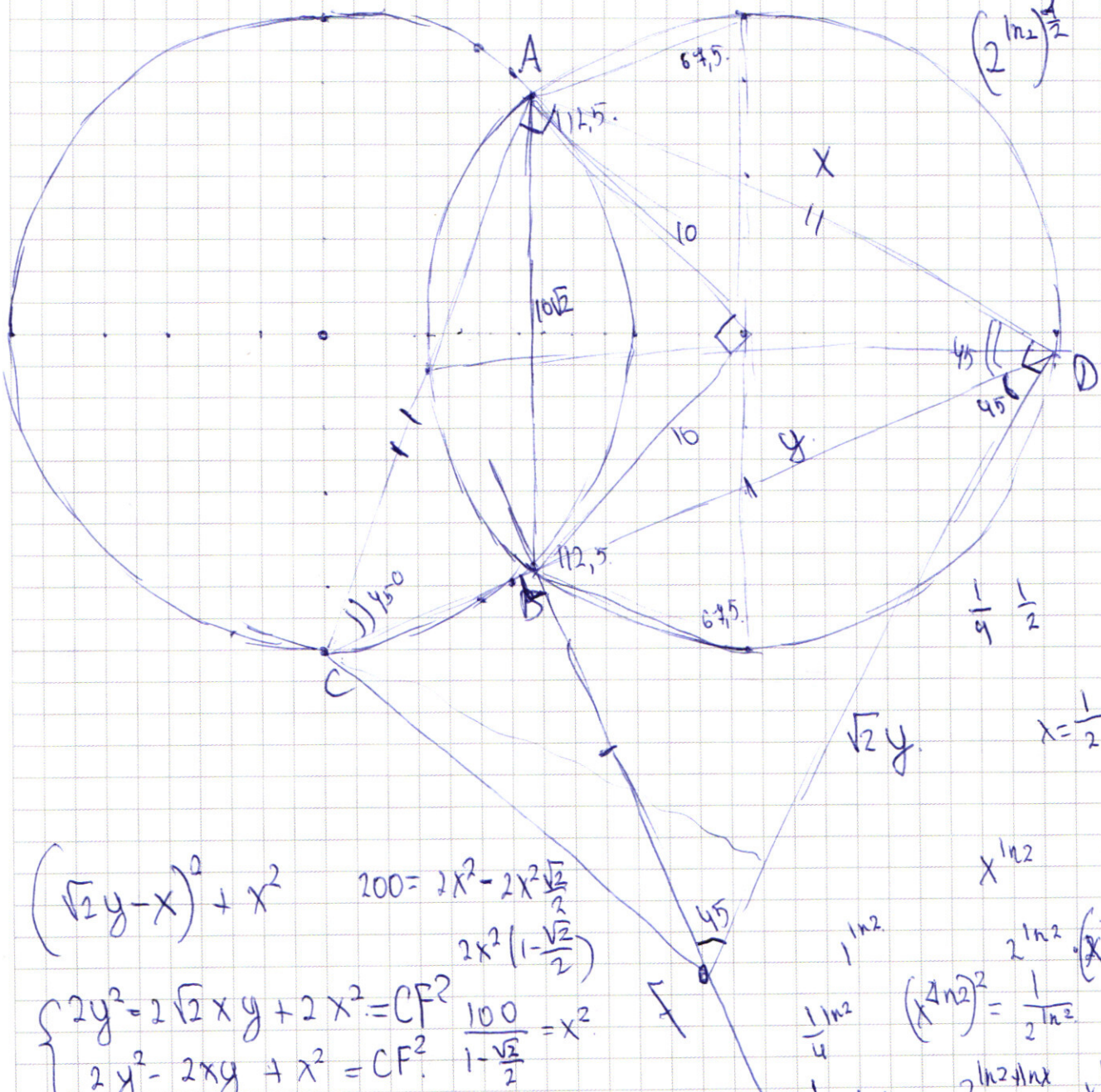
$$\ln 2^{13} \left(2^{\ln 2} \right)^{-13}$$

$$= 2y^2 - 2xy + x^2$$

$$CF^2 = y^2 + (x-y)^2$$

$$CF^2 = y^2 + x^2 - 2xy + y$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^{-\ln \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



$$(\sqrt{2}y - x)^2 + x^2$$

$$200 = 2x^2 - 2x^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2y^2 = 2\sqrt{2}xy + 2x^2 = CF^2 \\ 2y^2 - 2xy + x^2 = CF^2 \end{cases}$$

$$\frac{100}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = x^2$$

$$x^{12x} = y^{12y}$$

$$\begin{aligned} X^{\ln x} &= (2X)^{\ln 2x} \\ X^{\ln x} &= 2^{\ln 2 + \ln x} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\ln \frac{1}{2}}$$

$$\ln 2 + \ln x$$

$$\frac{1}{2} \ln 2$$

$$2^{\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2^{\ln 2}} \right)^2 = 1$$

$$2 \ln 2 + \ln x \cdot x^{\ln 2} = 1$$

$$x^{\ln x} (1 - 2^{\ln 2 + \ln x} \cdot x^{\ln 2})$$



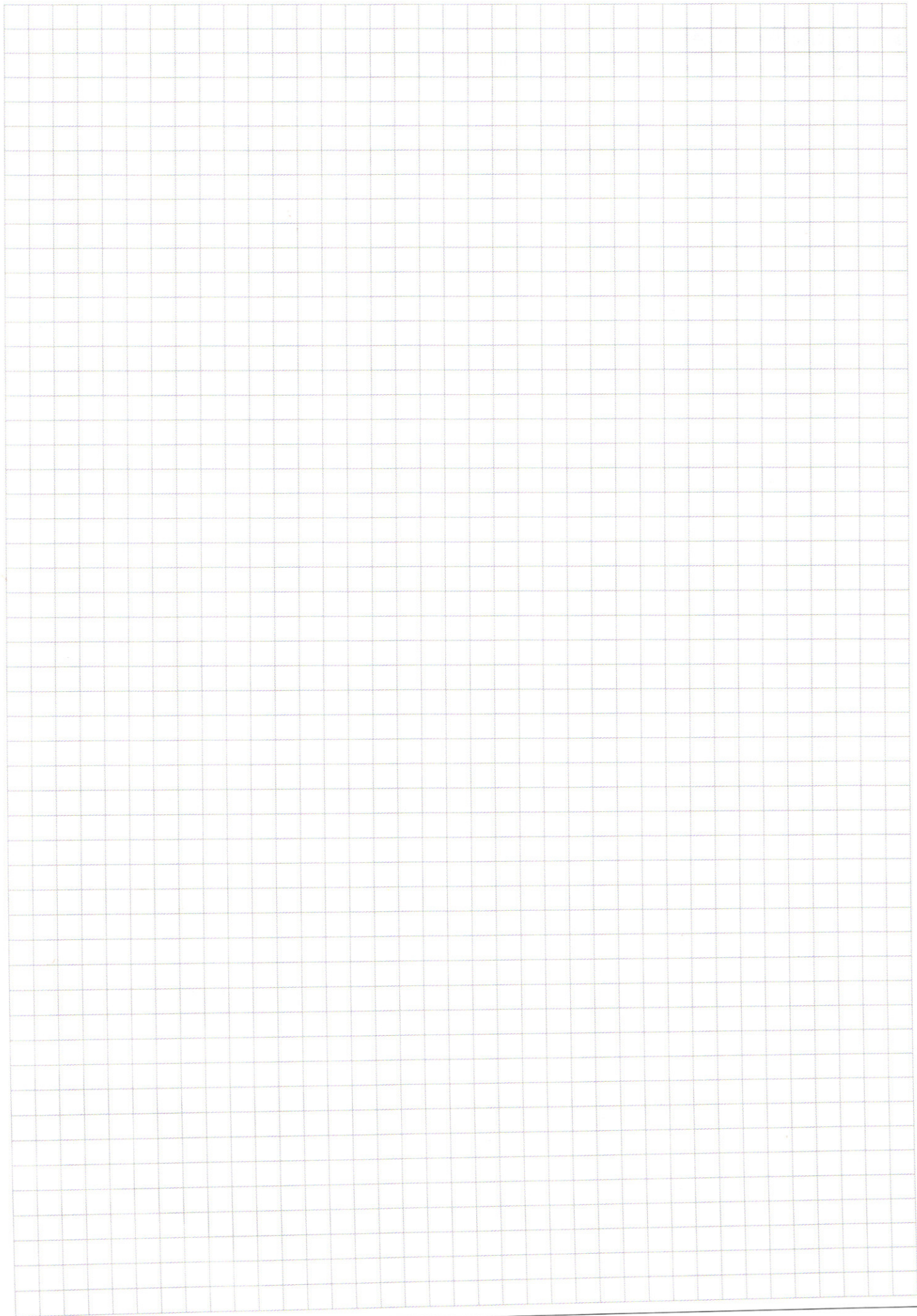
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2(4-x)^4$$

$$x = 4 - y$$

$$46 - 8y + y^2$$

$$2^{-6 \ln 2}$$

$$x^{-6 \ln x} = x^{-6 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln \left(\frac{y}{x^3} \right)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{CD} \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cancel{CD} \cdot FD$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x^3}}} \quad \sqrt{\frac{x^3}{y}}$$

$$\sqrt{AB^2 + BF^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \quad A \quad x^2 + \sqrt{2} \cdot 2x^2(\sqrt{2}x - CB)^2 - 2(\sqrt{2}x - CB)x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \quad \quad \quad x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xCB + CB^2 - 2\sqrt{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2CBx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \quad \quad \quad \cancel{3x^2} \quad x^2 - \sqrt{2}xCB + CB^2 \end{aligned}$$

