

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x - \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \text{или}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, \quad k, m, n \in \mathbb{Z}$

№ 1.

Пусть есть восьмизначное число - $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 9864$$

Рассмотрим число 9864 - чет. $\Rightarrow$ все цифры в данном числе чет.

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

Из этого следует, что 9261 может быть составлено из трех цифр: 7, 3 и 1

Например: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

И кол-во таких чисел будет равно $\frac{8!}{3} = 13440$

Ответ: 13440

№ 3.

$$\textcircled{1} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

или $x \neq 0$

$$\textcircled{2} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

4 $\textcircled{1}$:

$$(xy^2)^{-2\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2}) + 4\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2} \cdot x^4)}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\ln(x^{-2\ln x}) = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^2})})$$

$$-2\ln x \cdot \ln x = \ln y (\ln y - \ln x^2)$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \cdot \ln y$$

$$\ln x \cdot \ln y = (\ln x - \ln y)^2 + \ln^2 x$$

$$(\ln x - \ln y)^2 + \ln x (\ln x - \ln y) = 0$$

$$(\ln x - \ln y) (\ln x - \ln y + \ln x) = 0$$

$$\ln x = \ln y$$

$$\downarrow$$

$$x = y$$

или

$$2\ln x = \ln y$$

$$y = e^{2\ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$$

Из $\textcircled{1}$ мы получили, что $y = x$ или $y = x^2$

Подставим в $\textcircled{2}$

$$1^\circ y = x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$x(x-2)=0$$

$$\begin{matrix} x=0 & \text{или} & x=2 \\ y=0 & (0;0) & y=2 & (2;2) \\ & \text{не удов. ОДЗ} & \end{matrix}$$

$$2^{\circ} \quad y=x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{matrix} x=0 & \text{или} \\ y=0 & (0;0) \\ & \text{не удов. ОДЗ} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=4 \\ (2;4) \end{matrix}$$

$$(x-2)(x^2+x-4)=0$$

$$x^2+x-4=0$$

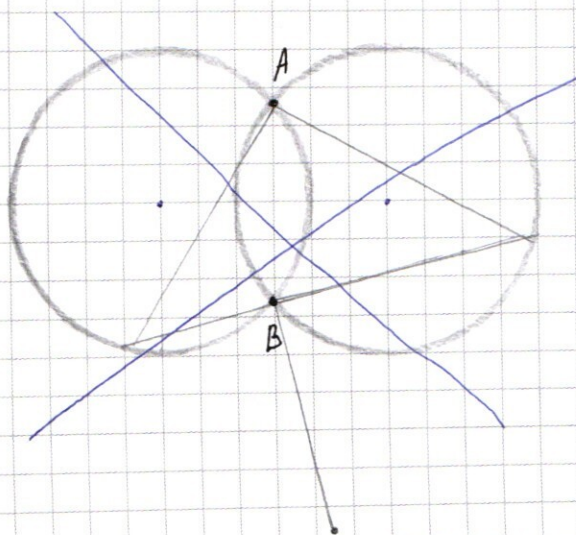
$$D=17$$

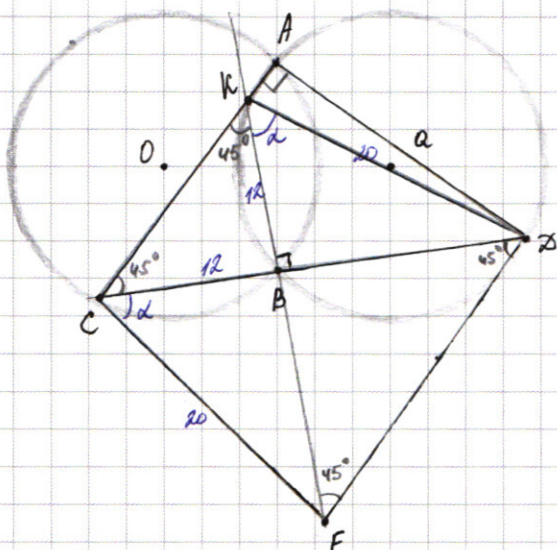
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (0;0); (2;2); (2;4); \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$$

№: 6





Дано: $\text{окр}(\cdot O)$ и $\text{окр}(\cdot Q)$ - $r=10$

$A, C \in \text{окр}(\cdot O)$

$B, D \in \text{окр}(\cdot Q)$

BF - перпендикуляр

$\angle CAD = 90^\circ$; $BF = BD$

а) Найти: CF

б) $BC = 12$ Найти: S_{ACF}

Решение: а) $\angle$ в $\triangle BFD$

т.к. $BF = BD$ $\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$
 $\angle FBD = 90^\circ$

$\angle$ в $\triangle ACD$: $\angle ACB$ - остр. на $\angle AB \Rightarrow$
 $\angle ADB$ - остр. на $\angle AB \Rightarrow$

$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ по усл.) $\Rightarrow \triangle ACD$ - р/б-н/г

$\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ$; $\angle ADF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF \Rightarrow ACFD$ - н/г

трапеция

$\angle K$ - точка пересечения AC и BF

$\triangle CBK$ и $\triangle FBD$; $\triangle CBF = \triangle BFD \Rightarrow CF = FD$

$\angle BKD = \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha$; $\angle AKD = 135 - \alpha$; $\angle KDA = \alpha - 45^\circ$

$\triangle KBD$ - вписан в $\text{окр}(\cdot Q) \Rightarrow$ по т. синусов:

$\frac{KD}{\sin \alpha} = 2R = 20$ (или $\angle KBD = 90^\circ \Rightarrow$ остр. на диаметр)

$KD = CF = 20$

б) $BC = 12 \Rightarrow BD = 16$

$\angle$ в $\triangle KBD$: по т. косинусов

$BD^2 = KB^2 + KD^2 - 2 \cdot KB \cdot KD \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$256 = 400 + 144 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$

$\angle$ в $\triangle AKD$: по т. синусов $\frac{AD}{\sin(135 - \alpha)} = 20 \Rightarrow AD = 20 \cdot \sin(135 - \alpha)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \sin 135^\circ \cos \alpha - \cos 135^\circ \cdot \sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow AD = 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14\sqrt{2} = AC$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin \angle ACF$$

$$\angle ACF = \alpha + 45^\circ \Rightarrow \sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 14\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 196$$

Ответ: а) 20 б) 196



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$① |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$② ((x|-12)^2 + (y|-5)^2 = a$$

2 решения!

и $a \rightarrow$ есть окр. с центром $O(12; 5)$
и $r = \sqrt{a}$

$$\frac{76}{38}$$

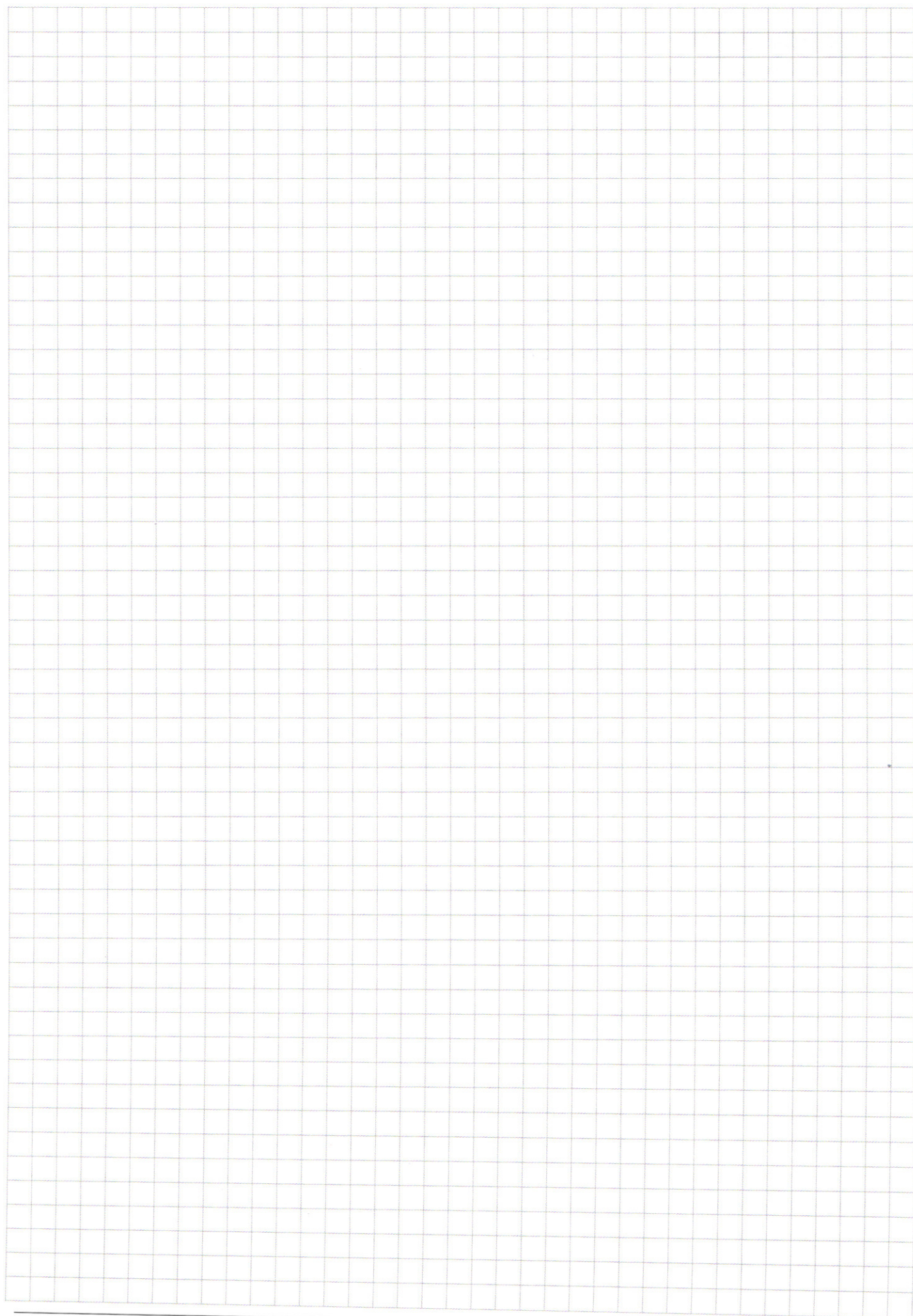
№7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\frac{34}{17}$$

$$\begin{matrix} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 \end{matrix}} \right\} 4$$

$$\begin{aligned} 2^{34} &= \dots 6 \\ y &\geq 2^x \\ 2^x + 3 \cdot 2^{34} &\leq y < 19 \cdot 2^2 + 2(2^{32} - 1)x \end{aligned}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle KDB = 90 - \alpha; \quad \angle CDA = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ADK = 45 - 90 + \alpha = \alpha - 45^\circ$$

$$\triangle ACD: \quad \angle CAD = 90^\circ; \quad \angle ADK = \alpha - 45^\circ \Rightarrow$$

$$\angle AKD = 90 - (\alpha - 45) = 135 - \alpha$$

$$\angle KBD = 90 - \alpha$$

$$\triangle KBD - \text{вписан в } \text{окр}(\cdot, R)$$

$$\text{по т. син: } \frac{KD}{\sin 90} = \frac{BD}{\sin \alpha} = 20 \Rightarrow CF = 20$$

$$\text{б) } BC = 12 \quad S_{ACF} = ?$$

$$BD = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

$$\triangle KBD:$$

$$256 = 400 + 144 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos \alpha = \frac{400 + 144 - 256}{2} = \frac{288}{2} = 144$$

$$\cos \alpha = \frac{400 + 144 - 256}{2 \cdot 20 \cdot 12} = \frac{288}{480} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\angle ADK = \alpha - 45^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin(135 - \alpha)} = 20 \Rightarrow AD = 20 \sin(135 - \alpha)$$

$$\sin(135 - \alpha) = \sin 135 \cos \alpha - \cos 135 \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$AD = 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14\sqrt{2} = AC$$

$$S_A = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin(45 + \alpha) = 7\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 98$$

$$\text{Отв: а) } 20 \quad \text{б) } 98$$

№22.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin(\frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}) \cdot \cos(\frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{\pi}{4}}{2}) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot (\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$-\sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$2x + \frac{3\pi}{4} = \pi k$$

$$2x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или} \quad \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin(\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}) \cdot \cos(\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi m$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1^{\circ} y=x \text{ и } y^2 - 1y - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ или } x=2$$

$$y=0$$

$$(0; 0)$$

$$y=2$$

$$(2; 2)$$

$$2^{\circ} y=x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x=0 \text{ или}$$

$$y=0$$

$$(0; 0)$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x^3 + x^2 - 4x - 2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x=2$$

$$\text{или}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$(2; 4)$$

$$y_1 = \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{17}+17}{4} = \frac{18+2\sqrt{17}}{4} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Реш. } (0; 0); (2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\bar{n} = 7.$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 76 \overline{) 152} \\ - 76 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

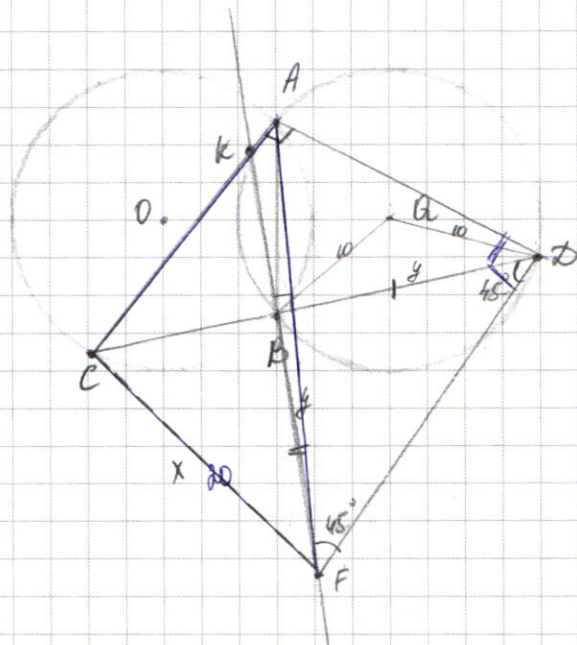
$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$76 = 19 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 19 \cdot 2^2 + (2^{33} - 2)x$$

$$\bar{n} = 6.$$



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$r_1 = r_2 = 10$$

$$BF = BD \Rightarrow \triangle FBD - \text{p/b } \Delta$$

$$\angle BFD = 2 \angle BCD$$

$$\angle BFD = 2\alpha \Rightarrow$$

$$\angle BCD = \alpha$$

$$y^2 = 200 - 100 \cos 2\alpha$$

$$y^2 = 200(1 - \cos 2\alpha)$$

$$DF = y\sqrt{2}$$

$$\angle ACD \text{ опр. на } \angle ADB$$

$$\angle ADB \text{ опр. на } \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADB$$

$$\Rightarrow \text{T.K. } \angle CAD = 90^\circ$$

$$\text{T.K. } \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ACD = \angle ADB = 45^\circ$$

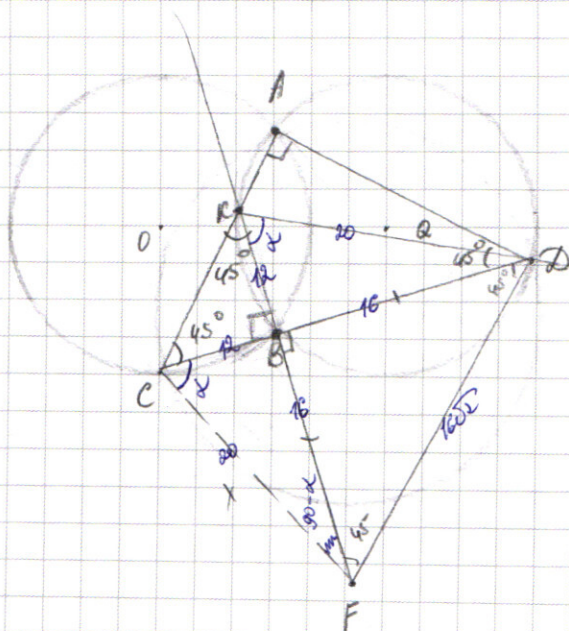
$$\Rightarrow AC \parallel DF \Rightarrow$$

$$ADFC - \text{трапеция}$$

$$\times \text{ трапецию } FCBK:$$

$$\text{диагонали равны}$$

$$\angle CBF = \angle CBD \Rightarrow CF = BD = x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ - восьмизнач. число. $n=1$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 9261$ - чет. $\Rightarrow$ все цифры - чет.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 308713} \\ \underline{3087} \\ 0 \end{array}$$

$$343 \cdot 3^3 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Каждая цифра может быть 7, 3 или 1

$$\frac{9!}{3!} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 120960$$

$$n=2$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin(5x + \frac{3\pi}{4})$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x + \frac{3\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x + \frac{3\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin(\frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x + \frac{3\pi}{4}}{2}) \cos(\frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{3\pi}{4}}{2}) = \cos 4x$$

$$2 \sin(7x + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \cos 7x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot 3. \\ \int (x^2 y^4) - \ln x &= y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y &= 0 \\ y^2 - 4y + 4 - 2(x^2 - 4x + 4) &= xy - 4 + 8 \\ (y-2)^2 - 2(x-2)^2 &= xy + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^{-2} \ln x &= y \ln\left(\frac{y}{x^3}\right) \\ (y-2)^2 - 2(x-2)^2 &= xy + 4 \end{aligned}$$

$$\ln(x^{-2} \ln x) = \ln\left(y \ln\left(\frac{y}{x^3}\right)\right)$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = \ln\left(\frac{y}{x^3}\right) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln y (\ln y - \ln x^3)$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y$$

$$3 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y + 2 \ln^2 x$$

$$\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \cdot \ln y + \ln^2 x + \ln x$$

$$\ln x \cdot \ln y = (\ln x - \ln y)^2 + \ln^2 x$$

$$(\ln x - \ln y)^2 + \ln^2 x - \ln x \cdot \ln y = 0$$

$$(\ln x - \ln y)^2 + \ln x (\ln x - \ln y) = 0$$

$$(\ln x - \ln y) (\ln x - \ln y + \ln x) = 0$$

$$(\ln x - \ln y) (2 \ln x - \ln y) = 0$$

$$\ln x = \ln y \quad \text{или} \quad 2 \ln x - \ln y = 0$$

$$x = y \quad \text{или}$$

$$\ln x = \frac{\ln y}{2}$$

$$x = e^{\frac{\ln y}{2}} \quad \ln y = 2 \ln x$$

$$y = e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + \alpha) &= \sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$