

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

① [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

② [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

③ [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

+

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |y + 5| = 5 \quad \begin{cases} y = -10 \\ y = 0 \end{cases} \\ (12)^2 + 5^2 = a = a = 169 \\ |-5 + 5 + 5| + |5 + 5 + 5| = 10 \end{aligned}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

6. Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8 + 2 \cdot 2^{39} \\ 2(2^{33} - 2) \cdot 3 + 76 \\ 2^{33} \end{aligned}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$f(x) = 2 \cdot 38 + 2^{23} \cdot x - 2x - 2^x - c$$

$$(a^x)' = \boxed{a^x \ln a}$$

$$(2^{23} - 2) - 2^x \ln 2 = 0$$

$$2^x = \frac{2^{23} - 2}{\ln 2} \quad x = \log_2 \frac{2^{23} - 2}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{2^{23} - 2}{\ln 2}}{\ln 2}$$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$D = \sqrt{1 - 4 \cdot (-4)} = 17$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \pm \frac{1 + 17 \pm 2\sqrt{17}}{4} - 4$$

$$\frac{1}{2} + 4 - 4$$

7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\frac{2 \sin 7x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \end{cases}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \pi - \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{I} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y/x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \textcircled{1} \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$-\ln x \ln |x^2 y^4| = \ln \frac{y}{x^2} \ln |y| \quad \left| \begin{matrix} y > 0 \\ x > 0 \\ x^2 y^4 > 0 \end{matrix} \right.$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x) \quad \left| \cdot \frac{1}{\ln y} \right.$$

$$-\frac{\ln x}{\ln y} (2 \frac{\ln x}{\ln y} + 4) = 1 - 2 \frac{\ln x}{\ln y} \quad \left| \begin{matrix} \ln y \neq 0 \text{ т.к. если} \\ \ln y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ не удовн} \\ \text{ур } \textcircled{2} \end{matrix} \right.$$

Замена $\frac{\ln x}{\ln y} = t$

$$-2t^2 - 4t = 1 - 2t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$2(t-1)(t-\frac{1}{2}) = 0$$

$t=1$ обр замена

$$\left[\begin{matrix} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{matrix} \right] \begin{cases} \ln x = \ln y \\ 2 \ln x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x = y \\ x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \\ y = x^2 \\ x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \\ y = x^2 \\ x(x-2)(x^2+x-4) = 0 \end{cases}$$

~~$\begin{cases} x=y \\ x=0 \\ x=2 \\ y=x^2 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$~~

$\begin{cases} x=y \\ x=0 \\ x=2 \\ y=x^2 \\ x=0 \\ x=2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$

all done

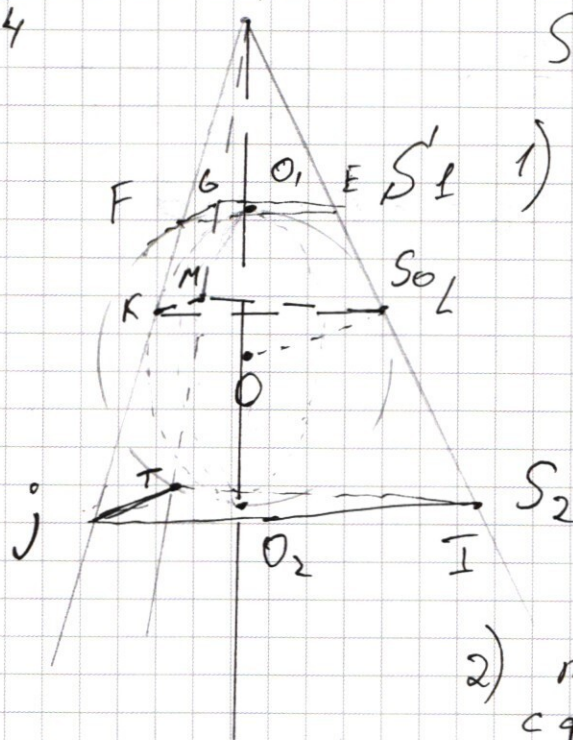
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 продолжение

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=2 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=4 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{18-2\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{18+2\sqrt{17}}{4} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0; 0)$
 $(2; 2)$
 $(2; 4)$
 $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$
 $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$

№4



S_1, S_2, S_0 - площади

$$1) \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{K^2} = \left(\frac{SO_1}{SO_2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

в силу подобия пирамиды
 $\Rightarrow K=4$ SFGЕ и SKML
SJI

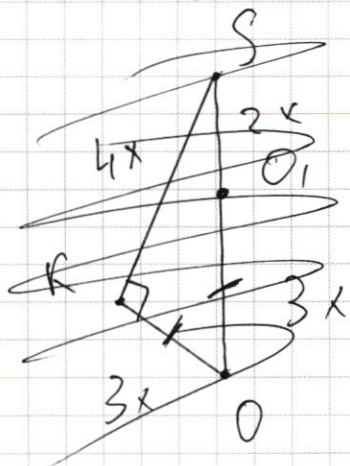
$$3) OO_2 = 2R = 6x$$

$$SO_1 = 2x$$

x - некоторая величина

2) т.к SK касается
 сферы, то $\angle SKO = 90^\circ$
 $\angle SMO = \angle SLO = \angle SKO = \frac{\pi}{2}$
 см далее

№4 продолжение



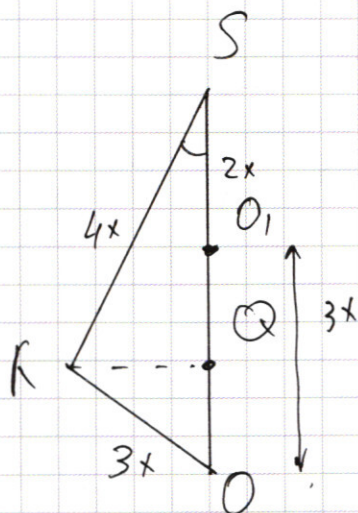
$$KO = OQ_1 = R = 3x$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$S_0 = S_1 \left(\frac{SQ}{SQ_1} \right)$$

в силу подобия пирамид

пусть искомое сечение
проходит через точку Q



$$KO^2 = OQ \cdot SO$$

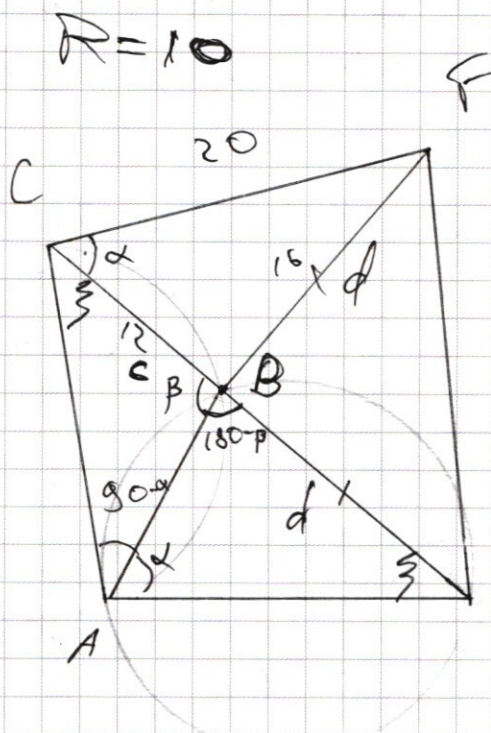
$$3x^2 = OQ \cdot 5x \Rightarrow OQ = \frac{9}{5}x$$

$$SQ = \frac{16}{5}x \quad K_2 = \frac{16}{5} \frac{x}{2x} = \frac{8}{5}$$

$$S_0 = S_1 \cdot (K_2)^2 = 1 \cdot \frac{64}{25} = 1,6 = 2,56$$

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$; 2,56

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{6}$ 

г) по Т surveyсов

$$CB = C \quad DB = d$$

$$\frac{c}{\cos x} = 2R = \frac{d}{\sin x}$$

$$d = f g \propto c$$

D $CF = \sqrt{c^2 + d^2}$

$$d = 2R \sin \alpha$$

$$C = 2R \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$$

$$CF = 2R = 20$$

2) t.c $CF = 20$ $CB = 12$ CF
 $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow BF = 16$

$$\text{ny cm 6 } \angle ABD = -\beta + \pi \text{ maka } \angle ABC = 180 - \beta$$

mo $\sqrt{\text{currycol}}$ $2R = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{A\omega}{\sin \beta}$

$$\Rightarrow CA = C\Omega \Rightarrow \triangle AC\Omega \text{ - равн. сторон}$$

$$34 \quad CA = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{12+16}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$$

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$ $\therefore$ all angles

по Т ~~во~~ сину сов.

$$\frac{CA}{\sin \beta} = 2R = \frac{14\sqrt{2}}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{14\sqrt{2}}{2R} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

~~SACF~~ $S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + 45^\circ) CA \cdot CF$

$\alpha + 45 = \beta$ т.к. $\angle ABC = \beta$ - внешний
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$

$$S_{ACF} = \cancel{\frac{14\sqrt{2}}{10}} \cdot \cancel{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 49 \cdot 4 = 160 + 36 = 196$$

Ответ: 20 ; 196

55

график
 $\checkmark$ квадрат

это 31,
 что если
 $x=0$, то
 $y=0$ или $y=-10$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$$

заместим, что уравнение
 инвариантно относ $x = -x$

нарисуем графики ~~это~~

(2) $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - 2р 4 окр
 с y -ом $\checkmark$

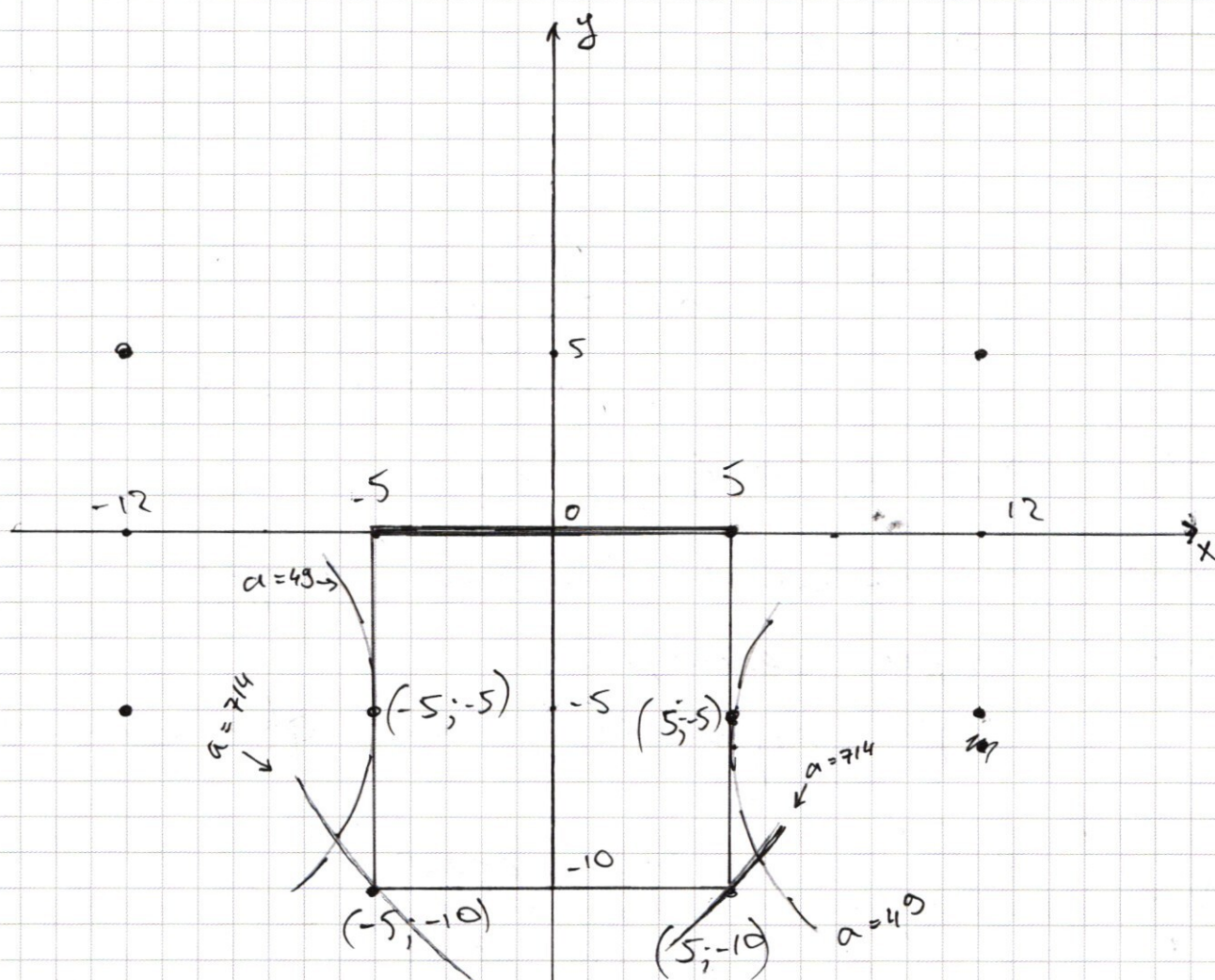
$$\begin{matrix} (12; 5) & (-12; 5) \\ (-12; -5) & (12; -5) \end{matrix}$$

$R = \sqrt{a}$
 $a \geq 0$

в том что график

(4) квадрат можно
 легко увидеть, рассмотрев
 разные случаи раскрытия модуля

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



заметьте, что если уравнение
имеет решение вид $(x_1; y_1)$ т.е.
 $x \neq 0$, то оно имеет и решение
 $(-x_1; y_1)$. Зн., чтобы у ур-ния было
только 2 решения $x \neq 0$
 $(x_1; y_1)$ $(-x_1; y_1)$ была единственная
пара $\begin{bmatrix} (x_1; y_1) \\ (-x_1; y_1) \end{bmatrix}$

Это будет гости замка, когда одна ^{пара} окру-
 жность касается, а вторая — нет
 при $a = 7^2 = 49$
 и $a = 17^2 + 15^2 = 289 + 225 = 714$

Ответ: 714, 49

№1

$$\overline{abcdefgh} \quad abcdefgh = 9261 =$$

$$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Т.к. $a, b, c, d, e, f, g, h \leq 9$
 то цифрами числа могут
 быть три семерки
 три тройки и две единицы

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \\
 &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{1} = \\
 &= 16 \cdot 5 \cdot 7 = 80 \cdot 7 = 560
 \end{aligned}$$

Ответ: 560



...полняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

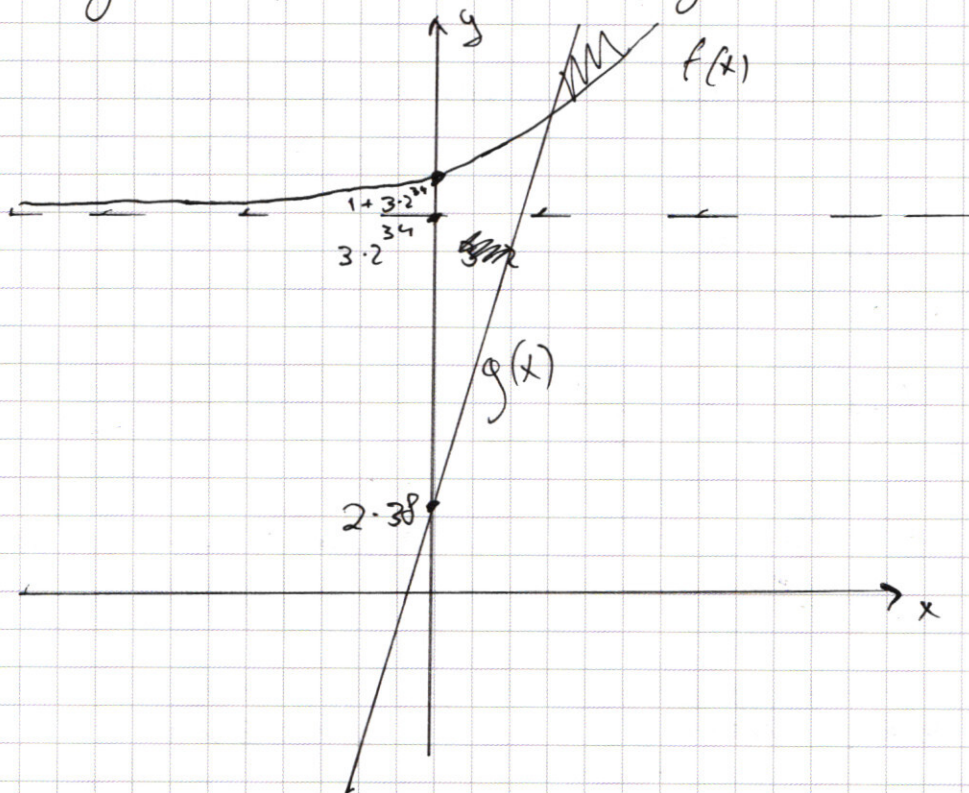
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} & (-) \\ y < 76 + 2(2^{33} - 1)x & (---) \end{cases}$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34} \quad f'(x) = 2^x \ln 2$$

$$g(x) = 76 + 2(2^{33} - 1)x \quad g'(x) = 2^{33} - 2$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2 \cdot 38 + 2^{33}x - 2x$$

один корень очевиден $x = 6$

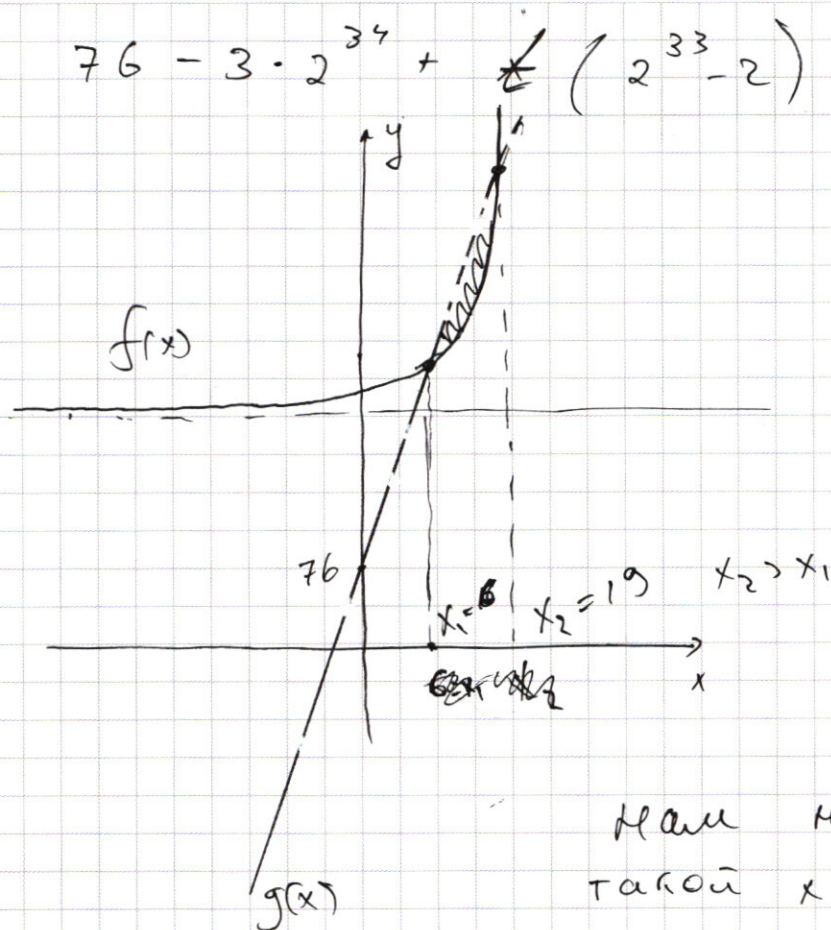


рассмотрим разность функций

$$g(x) - f(x) = 76 + x(2^{33} - 2) - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

нам подойдут пары $(x; y)$ т.ч. $g(x) - f(x) > 0$

$g(x) - f(x) \in Q(x)$



~~$x_1 = 6$~~
 ~~$x_2 = 19$~~
 Т.е. при

f'

Нам нужно найти
 такой x , что $g(x) - f(x) < 0$
 и $x > 6$

$$4.19 - 3 \cdot 2^{34} + t(2^{33} - 2) - 2^t = 0$$

$$t = 2 - 19 \quad | \quad 4.19 - 3 \cdot 2^{34} + 2^{34} \cdot 19 - 4.19 \cdot 2^{34} = 0$$

$$t = 2 - 3$$

6 и 19 не войдут в ответ
 Т.к. $y < g(x)$ т.е. как минимум
 найдутся решения
 $x \in (6; 19)$ лежащие на $f(x)$

$$n = 19 - 6 - 1 = 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение

для каждого $x \in (6; 19)$
будет более одного y
если $g(x) - f(x) > 1$ (строгое)

$$75 - 3 \cdot 2^{34} + 7 \cdot (2^{33} - 2) - 2^7 > 0 \quad | x \in (6; 19)$$

рассмотрим $g'(x) - f'(x)$
на $x \in (6; 19)$

$$2^x \ln 2 - 2^{33} - 2 > 1$$

подставим 7

$$75 - 3 \cdot 2^{34} + 7 \cdot 2^{33} - 14 - 2^7 \quad \text{но } V_0$$

$$75 - 3 \cdot 2^{34} + 3,5 \cdot 2^{34} - 14 - 2^7 \quad V_0$$

$$75 + 2^{33} - 14 - 2^7 > 0$$

это очень много > 0

подставим 18

$$g(7) - f(7) =$$

$$= 62 + 2^{33} - 2^7$$

$$g(18) - f(18) = 76 + 2 \cdot 9 \cdot 2^{33} - 2 \cdot 9 \cdot 2 - 2^{18} - 3 \cdot 2^{34}$$

$$= 40 + 6 \cdot 2^{34} - 2^{18}$$

Андрей

$$\sum_{x=7}^{18} 76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x + \cancel{2^{34}} + 3 \cdot 2^{34}$$

сумма для целых $x \in [7; 18]$
 $f(x)$ и $g(x)$ при целых x имеют
 целое значение

Ответ: 12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

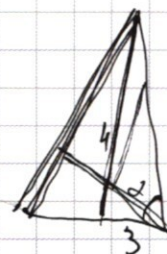
$$\sqrt{20+12/20+12}$$

$$\sqrt{8 \cdot 32}$$

$$\sqrt{8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2}$$



$$c^2 + d^2 = x^2$$



$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R$$

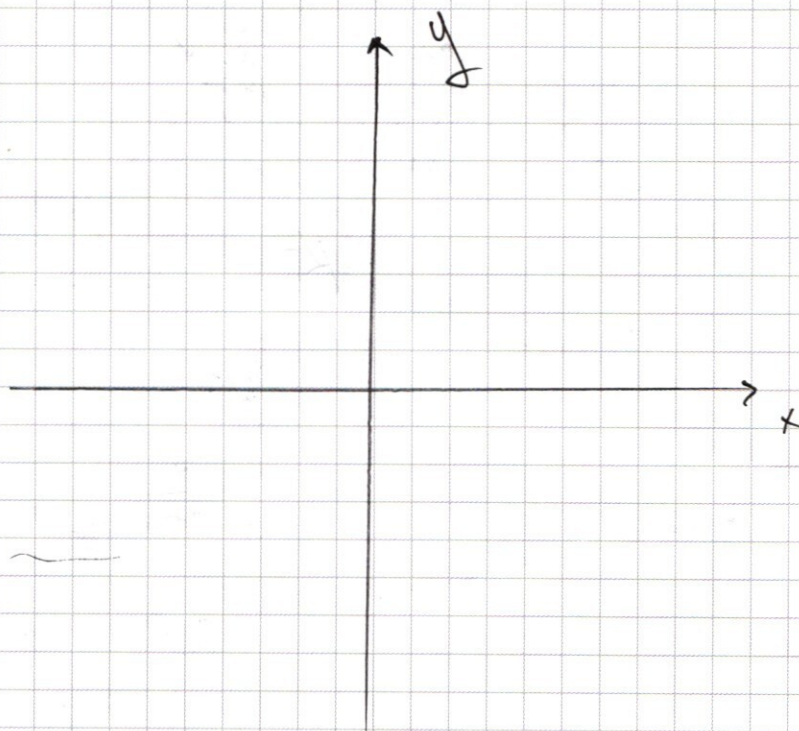
$$d = 2R \sin \alpha$$

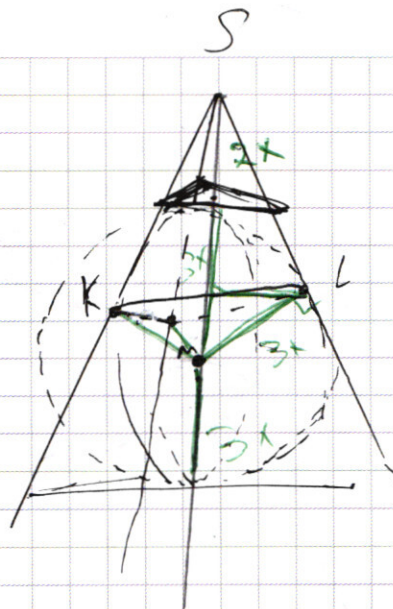
$$c = 2R \cos \alpha$$

$$x^2 = (2R)^2 (1)$$

$$x = 20$$

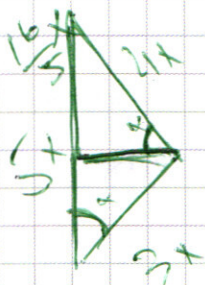
$$\tan \alpha = \frac{d}{c} = \frac{4}{3}$$





$$R = 4$$

$$d = 350,$$



$$(3+)^2 = 5 \cdot 4 \cdot 4$$

$$5 - \alpha = \frac{25 - 9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{16}{\sin \alpha}$$

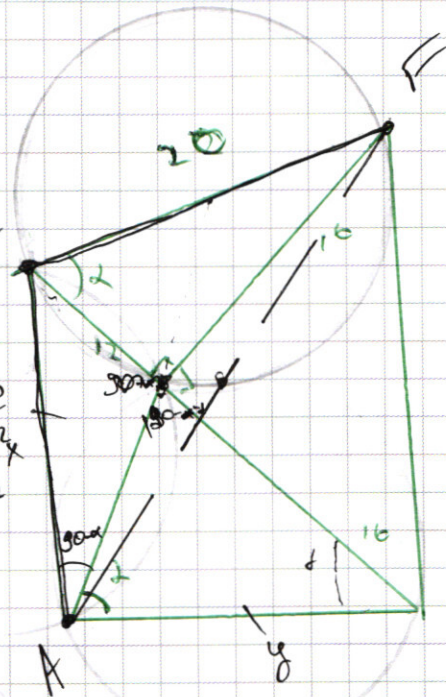
$$4 \text{ } 3 \text{ } \text{наем}$$

$$\frac{16}{\sin \alpha} = 20$$

$$\sin \alpha =$$

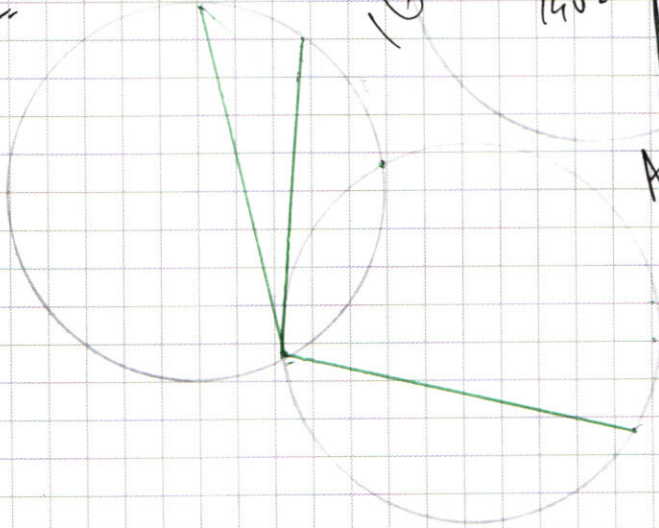


2/4



$$28 =$$

$$16\sqrt{2}$$



$$-\frac{x}{\cos \alpha} + y = 2R = \frac{8}{\cos \alpha}$$

$$2R \sin \alpha + y = 14\sqrt{2}$$

$$\sin \alpha + y = \frac{14\sqrt{2}}{2 \cdot 10}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} - 26 = 7\sqrt{2}$$

$$14 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{20}{12} = 77.2 \cdot 2 =$$

$$\left(\frac{7\sqrt{2}}{10} \right) 982$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 2 \cdot 38 + 2^{33} x - 2^x$$

$$k = 2^{33} - 2$$

$$2 \cdot 38 + (2^{33} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x \ln 2 > 2^{33} - 2$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2 \cdot 38 + (2^{33} - 2)x$$

$$(2^{12}) + 3 \cdot 2^{34} = 2 \cdot 38 + (2^{33} - 2)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2 \cdot 19 + x(2^{33} - 2)$$

$$2^x \ln 2 > 2(2^{32} - 1)$$

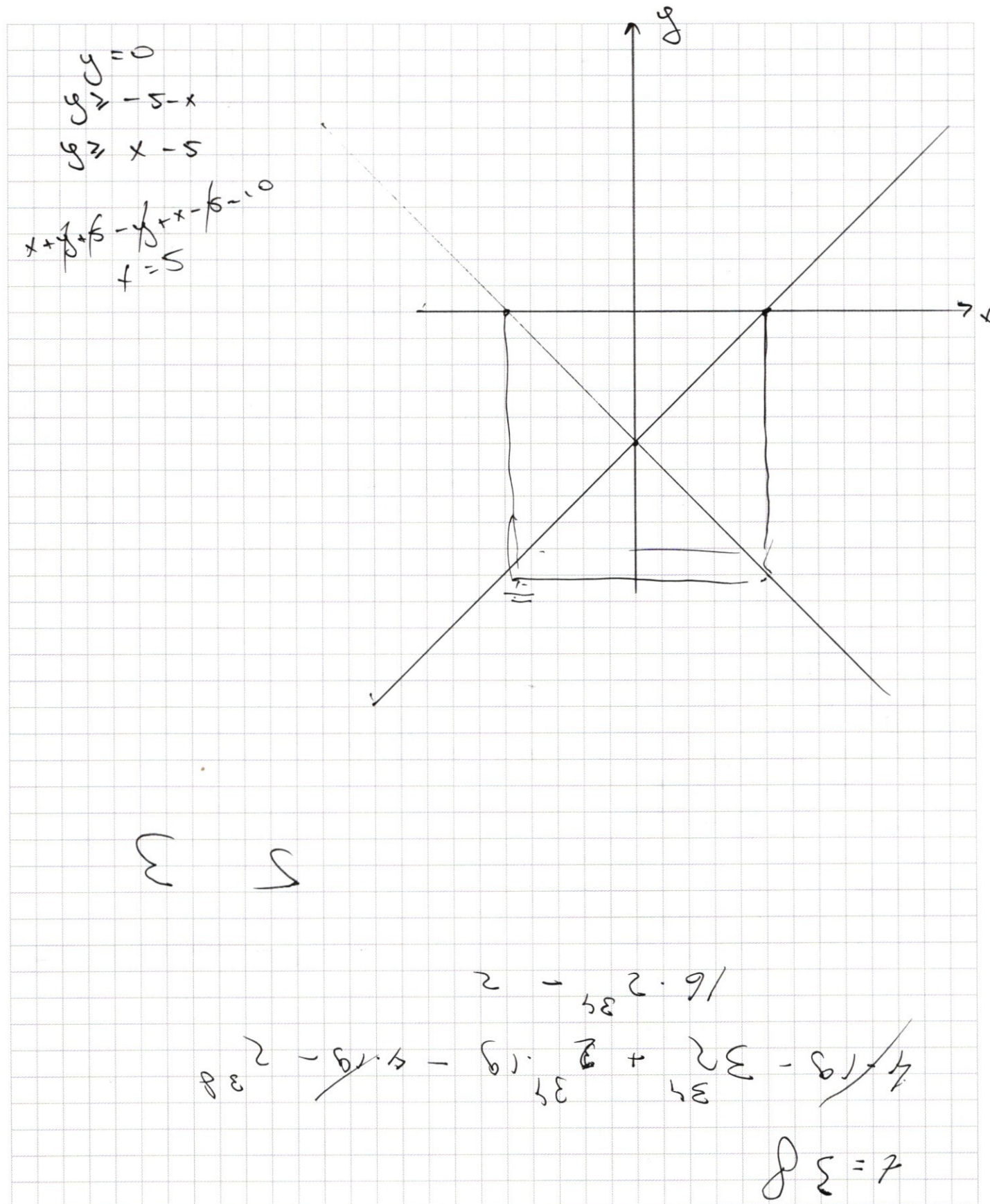
$$x + \ln$$

$$x \ln 2 + \ln(\ln 2) > \ln 2 + \ln(2^{32} - 1)$$

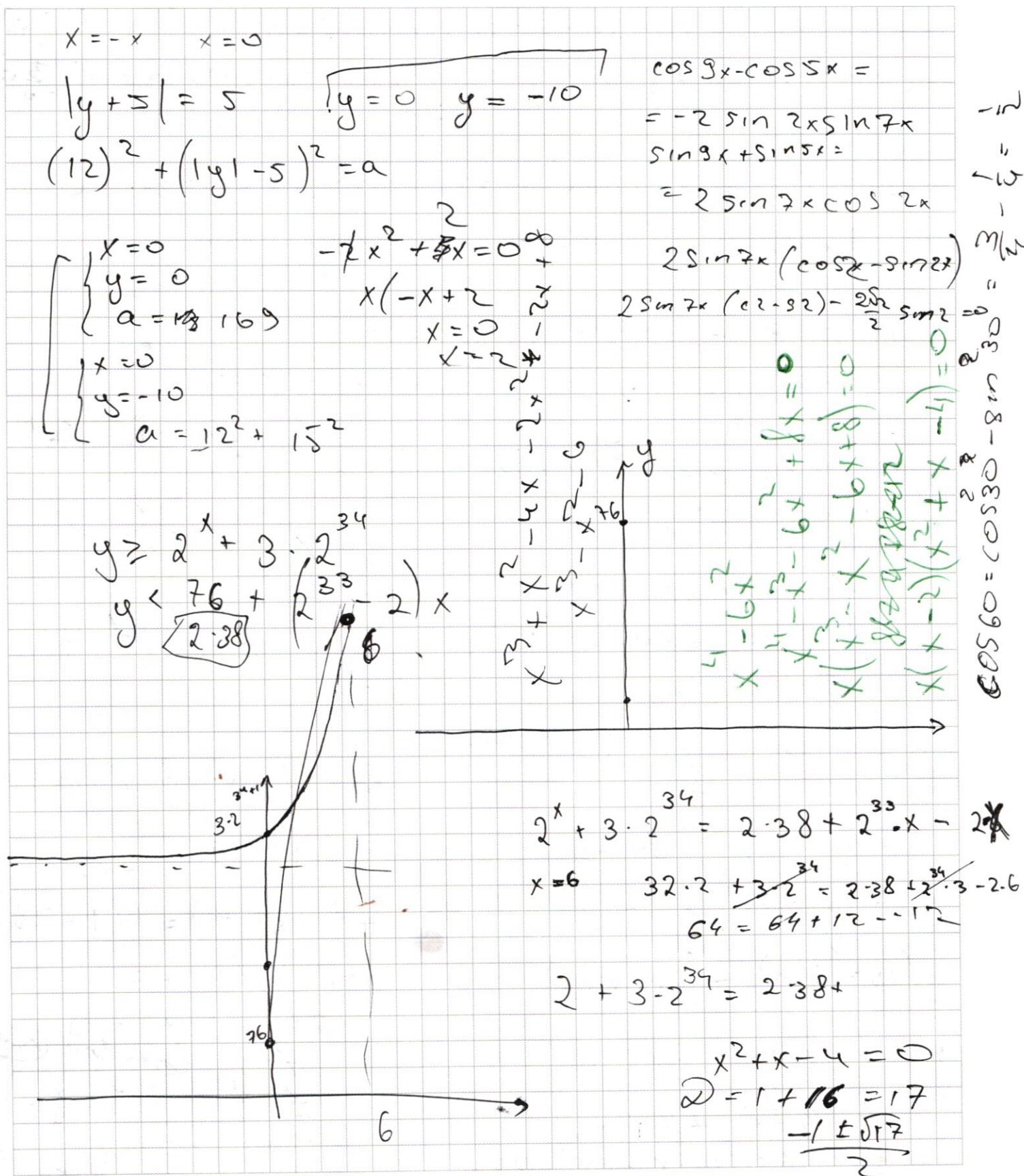
$$(x-1) \ln 2 > \ln(2^{32} - 1)$$

$$x > 1 + \frac{\ln(2^{32} - 1)}{\ln 2}$$

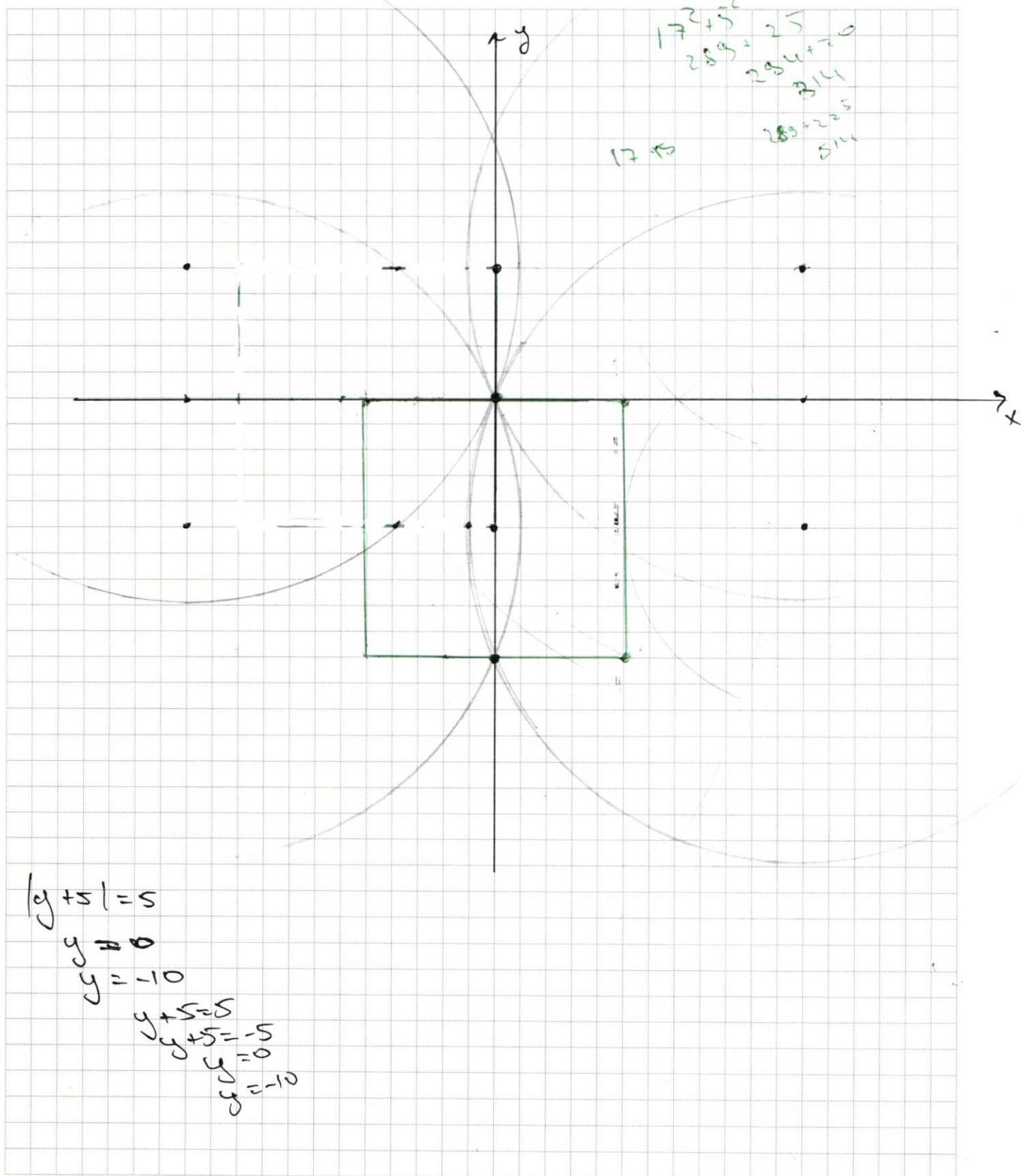
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x+y+5| + |y-x-5| = 10$$

$$\cancel{x+y+5} + y - \cancel{x-5} = 10 \quad ++$$

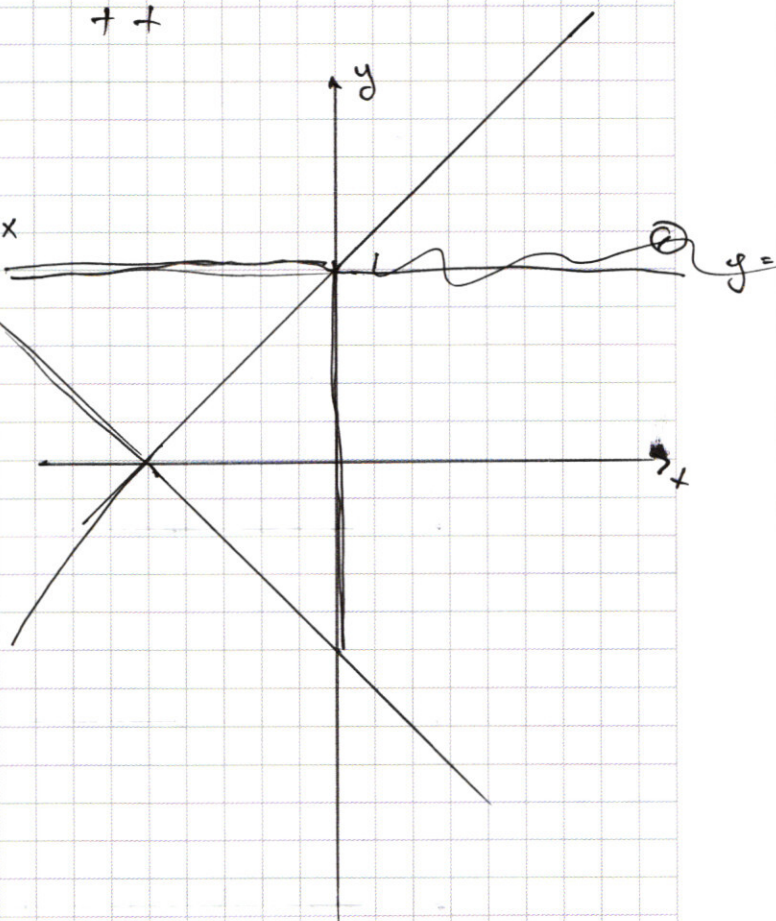
$$\boxed{y=5}$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq x+5$$

$$y \geq -5-x$$

$$y \geq x+5$$



$$\cancel{x+y+5} + \cancel{y} - \cancel{y} + \cancel{x+5} = 10$$

$$x=0$$

$$y \geq -5-x$$

$$y \leq x+5$$

$$-\cancel{x-y-5} - y + \cancel{x+5} = 10$$

$$y = -$$

$$-x - y - 5 + y - x - 5 = 10$$

$$2x = -20$$

$$x = -10$$

$$-\cancel{x-y-5} - y + \cancel{x+5} = 10$$

$$y = -5$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\cancel{x+y+5} + y - \cancel{x+5} = 10$$

$$y=0$$