

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ① [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ④ [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ⑤ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ⑦ [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



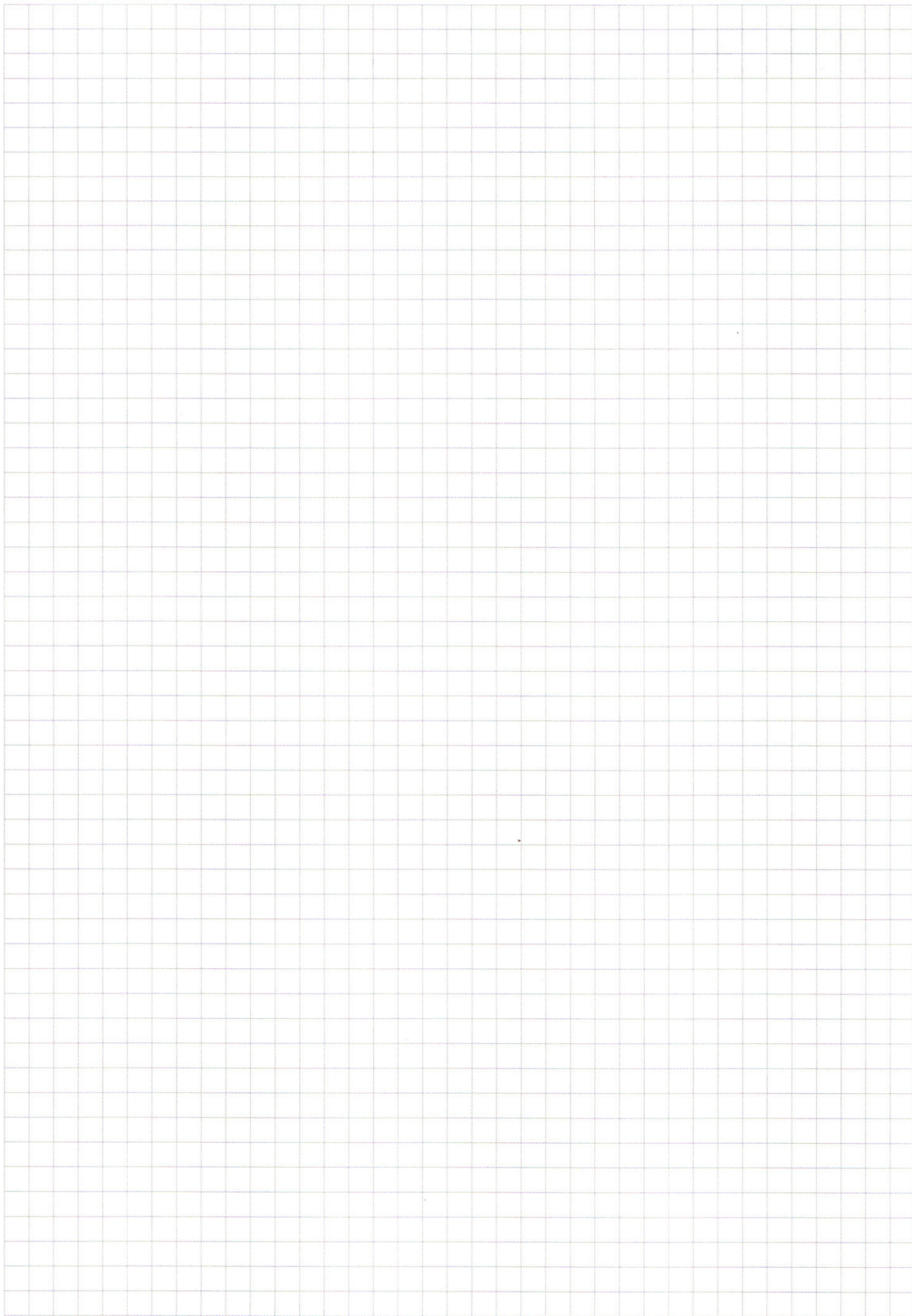
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

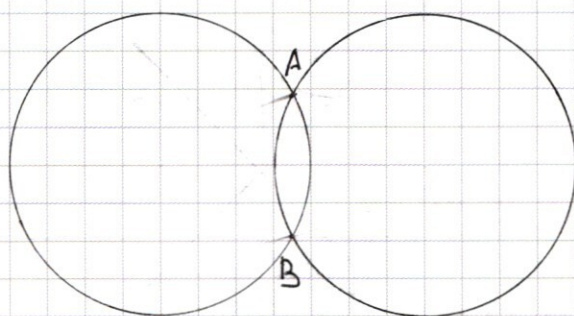
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $9261 \div 9 = 1029 \frac{3}{4}$ $9261 = 3^3 \cdot 7^3$ $1) 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 \leftarrow \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 20 \cdot 7 = 140$
 $2) 1, 1, 1, 3, 7, 7, 9$ $! (1, 3, 4, 6) !$ $20 \cdot 4 = 80 \cdot 7 = 560$
 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 20 \cdot 56$ $(14-3)^2 + (14-3)^2 = 1$

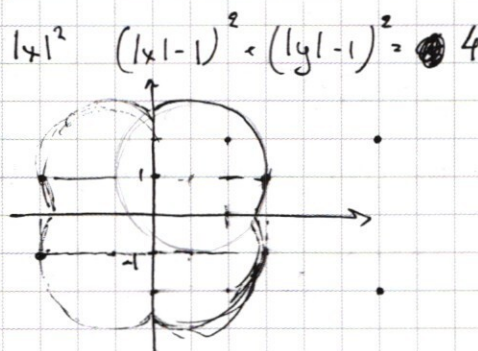
② $\cos 8x = \cos (4x + 5x) =$

③ $(y+x)(y-2x) - 4(y-2x) = (y+x-4)(y-2x) = 0$

④ ⑥

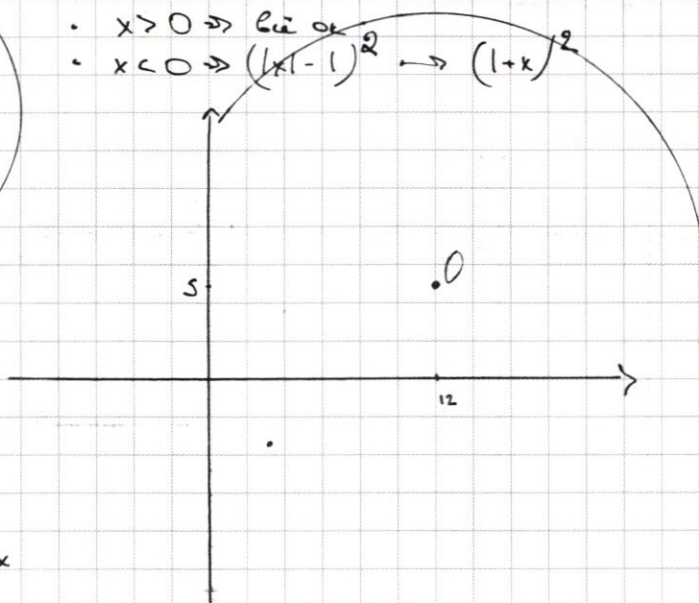


CF-?



$(|x|-1)^2 = |x|^2 - 2|x| + 1$

• $x > 0 \Rightarrow \ln x$
 • $x < 0 \Rightarrow (|x|-1)^2 \rightarrow (1+x)^2$



③ $y = 2x$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2^4 x^6)^{-\ln x} = (2^4)^{-\ln x} \cdot (x^6)^{-\ln x}$

$-\ln x \cdot \ln (16x^6) = \ln x^{-6} \cdot \ln 2x$

$\ln (16x^6) = 6 \ln 2x$

$16x^6 = 32x^6$

③

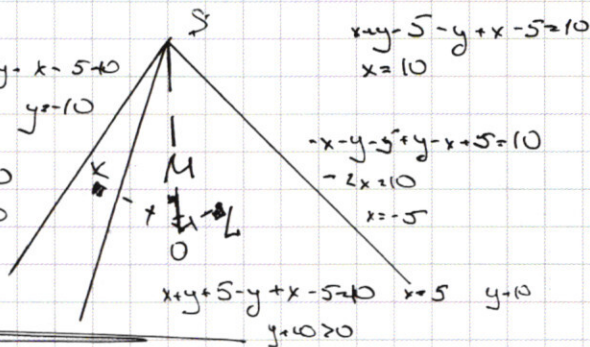
$$\begin{aligned} -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) &= \ln \frac{y}{x^3} \cdot \ln y \\ -2 \ln x \cdot \ln(xy^2) &= \ln(4 \cdot x^{-3}) \cdot \ln y \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} (x+y-4)(y-2x) &= 0 \\ y &= 2x \\ y &= 4-x \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} y+5 &\geq 0 \\ y-5 &\leq 0 \end{aligned}$$

• $y=2x$: $-2 \cdot \ln x \cdot \ln(4x^3) = \ln(2 \cdot x^{-6}) \cdot \ln(2x)$

① $2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$ $-x-y-5-y-x-5=0$
 $-2y=20 \quad y=-10$

$2^{33}(6-x) + 2^x + 2x < 76 = 2^6 + 12$ $x-5 \leq 0$
 $-y-5 \leq 0$

② $\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 5x = 0$



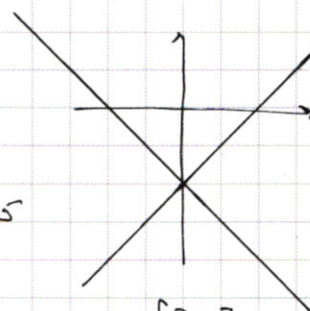
~~$2 \ln x \cdot \ln(xy^2) = \ln$~~ $-2 \cdot \ln x \cdot \ln(4x^3) = \ln(2 \cdot x^{-6}) \cdot \ln(2x)$
 $-2 \cdot \ln x \cdot \ln 4 - 2 \cdot \ln x \cdot 3 \cdot \ln x = \ln 2 \cdot \ln 2$

1) $y=2x$: $(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2 \cdot x^{-6})}$

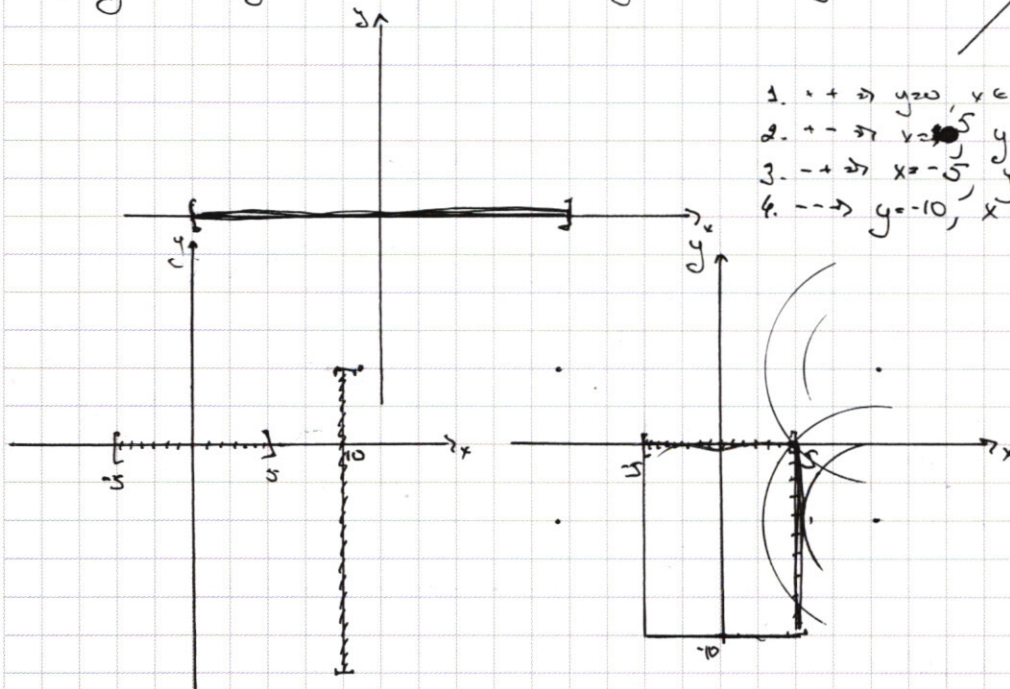
$-\ln x \cdot \ln(16x^6) = \ln(2 \cdot x^{-6}) \cdot \ln(2x)$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$y = -x-5$ $y = x-5$



1. $++ \rightarrow y \geq 0, x \in [5, 5]$
2. $+- \rightarrow x = 5, y \in [5, 5]$ $[-10, 0]$
3. $-+ \rightarrow x = -5, y \in [-10, 0]$
4. $-- \rightarrow y = -10, x \in [5, 5]$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^{32} (2 + 4 + \dots + 64) - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{38}) + 2 (7 + 8 + \dots + 38) - 32 \cdot 76$$

$$2^{33} \cdot \frac{32 \cdot 33}{2} \quad 2^7 (1 + 2 + 4 + 8 + \dots) \quad 2^7 (1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{31})$$

$$\frac{33}{\times 16} \quad \frac{33}{\times 29} \quad \frac{33}{\times 29}$$

$$\frac{528}{198} \quad \frac{528}{198} \quad \frac{528}{198}$$

$$\frac{464}{464} \quad \frac{464}{464} \quad \frac{464}{464}$$

$$2^{33} \cdot 33 \cdot 16 - 2^{33} \cdot 2^6 + 2^7 + 45 \cdot 32 - 32 \cdot 76$$

$$2^{33} \cdot 464 - 32(76 - 45 - 2) = 2^{33} \cdot 464 - 32 \cdot 29$$

$$-2 \ln(4-y) \cdot \ln(4y^2-y^3) = \ln^2 y - 7 \ln(y/4y) \cdot \ln y$$

$$\ln x (7 \cdot \ln(2x) - 2 \cdot \ln(4x^3)) = \ln^2(2x)$$

$$\ln x (7 \cdot \ln 2 + 7 \cdot \ln x - 2 \cdot \ln 4 - 2 \cdot 3 \cdot \ln x) = (\ln 2 + \ln x)^2$$

$$81 - 64 = 17$$

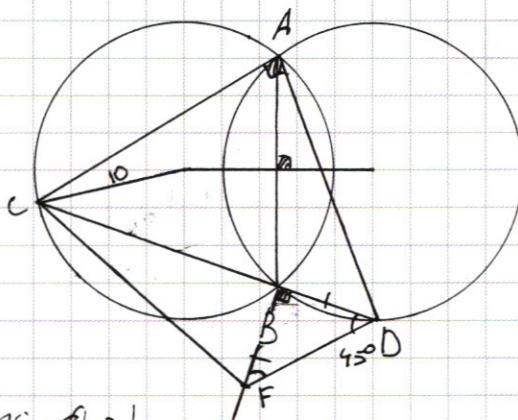
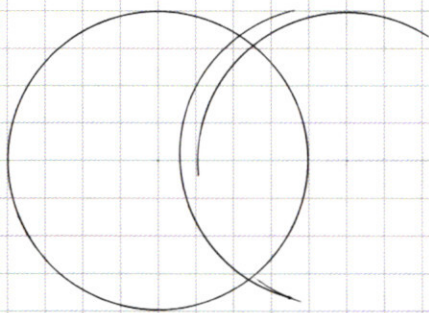
$$a(7 \cdot \ln 2 + 7a - 4 \ln 2 - 6a)$$

$$9 \pm 12$$

$$-2a(a+2b) = 6^2 - 7ae$$

$$(y^2 - 9y + 6)$$

$$6^2 - 3ae + 2a^2 \quad (a-b)(a+2b)$$



$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos 9x + \sin 9x$$

$$76. \quad 2^x + 3 \cdot 2^{34} \geq 3 \cdot 2^{33} \quad \text{and} \quad 2^x + 3 \cdot 2^{34} < 2^{33}$$

$$3 \cdot 2^{34} \leq 2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x < 2^{33} \cdot x + 76$$

$$2^{33}(6-x) < 76 - 2^x$$

$$2^x - 76 < 2^{33}(x-6)$$

$$2^{38} - 76 \vee 2^{33} \cdot 2^5$$

$$\begin{aligned} 2^{39} - 76 &\vee 2^{33} \cdot (2^5 + 1) \\ 2^{39} - 2^{38} &\geq 2^{33} + 76 \\ 2^{38} &\vee 2^{33} + 76 \end{aligned}$$

$$|x < 39|$$

$$33 \text{ знач. } \text{от } x$$

$$2^x - 76 > -76 \Rightarrow 2^{33}(x-6) > -76 \Rightarrow |x \geq 6|$$

$$\bullet \quad x = 6$$

$$76 + 12(2^{32} - 1) > y \geq 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 - 12 + 12 \cdot 2^{32}$$

$$3 \cdot 2^{34} + 64 - 76 + 12 - 12 \cdot 2^{32}$$

знак, т.к. равенство

$$2 \cdot (x-6)$$

$$\bullet \quad x = 7$$

$$128 + 3 \cdot 2^{34} - 76 + 14 - 14 \cdot 2^{32} = 2 \cdot 2^{32} - 2^7 + 2 \cdot 7 - 76$$

$$\bullet \quad x = 8$$

$$76 - 16 + 16 \cdot 2^{32} - 256 - 3 \cdot 2^{34} = 4 \cdot 2^{32} - 2^8 + 2 \cdot 8 - 76$$

...

$$\bullet \quad x = 38: 64 \cdot 2^{32} - 2^{39} + 2 \cdot 39 - 76$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y \cdot x^{-7}) \cdot \ln y \\ (x+y-4)(y-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\ln x \cdot \ln(x \cdot y^2) = \ln^2 y - 7\ln x \cdot \ln y \\ \begin{cases} y = 2x \\ x = 4-y \end{cases} \end{cases}$$

3. При $y = 2x$:

$$-2\ln x \cdot \ln(4x^3) = \ln^2(2x) - 7\ln x \cdot \ln(2x) \Leftrightarrow$$

$$\ln x (7\ln^2 + 7\ln x - 2\ln 4 - 6\ln x) = (\ln 2 + \ln x)^2$$

Пусть $\ln x = a$. Тогда:

$$a(7\ln^2 + 7a - 4\ln 2 - 6a) = (\ln 2 + a)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 3\ln 2 \cdot a = a^2 + 2\ln 2 + \ln^2 2 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{\ln 2 + 2}{3} \Rightarrow \ln x = \frac{\ln 2 + 2}{3} \Rightarrow x = 10^{\frac{\ln 2 + 2}{3}}, y = 10^{\frac{\ln 2 + 2}{3}} \cdot 2.$$

2. При $x = 4-y$:

$$-2\ln(4-y) \cdot \ln(4y^2 - y^3) = \ln^2 y - 7\ln(4-y) \cdot \ln y \Leftrightarrow$$

$$-2\ln(4-y) \cdot (\ln(4-y) + 2\ln y) = \ln^2 y - 7\ln(4-y) \cdot \ln y.$$

Пусть $\ln y = a$, $\ln(4-y) = b$. Тогда:

$$-2b(b+2a) = a^2 - 7ab \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

(см. на обратной стороне)

$$(a-b)/(a-2b)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=b \\ a=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \ln(4-y) \\ \ln y = 2\ln(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=4-y \\ y=y^2-8y+16 \\ 4-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<4 \\ y=2 \\ y=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=2 \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x=4-\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Order: $\left(10^{\frac{\ln 2 + 2}{3}}, 2 \cdot 10^{\frac{\ln 2 + 2}{3}}\right), (2; 2), \left(4 - \frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$ искомые числа могут состоять только из цифр 1, 3, 7 и 9 $\Rightarrow$ возможны два набора цифр:

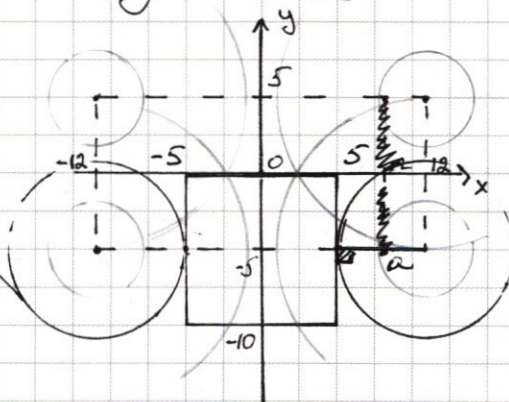
1. 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 $\Rightarrow$ всего таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 560$.

2. 1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 9 $\Rightarrow$ всего таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$.

$$560 + 1120 = 1680.$$

Ответ: 1680 чисел.

Задача 5.



Изобразим первое уравнение графически. Для этого рассмотрим четыре случая раскрытия модулей:

1. $++ \Rightarrow y = 0, x \in [-5; 5]$;
2. $+ - \Rightarrow x = 5, y \in [-10; 0]$;
3. $- + \Rightarrow x = -5, y \in [-10; 0]$;
4. $-- \Rightarrow y = -10, x \in [-5; 5]$.

Второе уравнение на графике представляет собой четыре окружности или сегменты окружностей, не выходящих за пределы четвертей с центрами в $(5, 5)$, $(-5, 5)$, $(-5, -5)$, $(5, -5)$ и радиусами a .

Т.к. точки пересечения графиков симметричны относительно Oy , единственный случай, при котором система имеет два решения, — случай касания $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 12 - 5 = 7 \text{ (других пересечений не будет, т.к. } \sqrt{7^2 + 5^2} > 1).$$

Ответ: $a = 7$.

Задача 7.

Найдём все возможные x :

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + (2^{32} - 1) \cdot 2 \cdot x < 2^{33} \cdot x + 76 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2^{33}(6-x) < 76 - 2^x$. Заметим, что неравенство верно при $x = 38$ и неверно при $x = 39 \Rightarrow \underline{x < 39}$.

$$2^x - 76 > -76 \Rightarrow 2^{33}(x-6) > -76 \Rightarrow \underline{x \geq 6}$$

$6 \leq x < 39 \Rightarrow$ существует 33 возможных x .

Найдём количество решений для каждого x :

- $x=6 \Rightarrow 76 - 12 + 12 \cdot 2^{32} - 64 - 3 \cdot 2^{34} = 0$ решений;
- $x=7 \Rightarrow 76 - 14 + 14 \cdot 2^{32} - 128 - 3 \cdot 2^{34} = 2 \cdot 2^{32} - 2^7 + 2 \cdot 7 - 76$ решений
- $x=8 \Rightarrow 4 \cdot 2^{32} - 2^8 + 2 \cdot 8 - 76$ решений
- $\vdots$
- $x=k \Rightarrow 2(k-6) \cdot 2^{32} - 2^k + 2 \cdot k - 76$ решений
- $\vdots$
- $x=38 \Rightarrow 64 \cdot 2^{32} - 2^{38} + 2 \cdot 38 - 76$ решений.

Спросуммируем полученные значения:

$$\begin{aligned} & 2^{32}(2+4+\dots+64) - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{38}) + 2(7+8+\dots+38) - 32 \cdot 76 = \\ & = 2^{33} \cdot \frac{32 \cdot 33}{2} - 2^7 \cdot \frac{2^{32}-1}{2-1} + 2 \cdot \frac{(38+7)(38-7+1)}{2} - 32 \cdot 76 = \\ & = 2^{33} \cdot 33 \cdot 16 - 2^{33} \cdot 2^6 + 2^7 + 45 \cdot 32 - 32 \cdot 76 = \\ & = 2^{33} \cdot 464 - 32 \cdot 29 = 2^{33} \cdot 464 - 928. \end{aligned}$$

Ответ: $2^{33} \cdot 464 - 928$ пар целых чисел (x, y) .